

|          |                            |
|----------|----------------------------|
| 氏 名      | さだ かね とも ゆき<br>定 兼 知 行     |
| 学位(専攻分野) | 博士 (人間・環境学)                |
| 学位記番号    | 人 博 第 136 号                |
| 学位授与の日付  | 平成 13 年 11 月 26 日          |
| 学位授与の要件  | 学位規則第 4 条第 1 項該当           |
| 研究科・専攻   | 人間・環境学研究科文化・地域環境学専攻        |
| 学位論文題目   | Dressing 法の拡張とその格子可積分系への応用 |

|        |                     |            |             |
|--------|---------------------|------------|-------------|
| 論文調査委員 | (主 査)<br>教授 後 藤 喬 雄 | 教授 宇 敷 重 廣 | 助教授 高 崎 金 久 |
|        | 助教授 早 川 尚 男         |            |             |

### 論 文 内 容 の 要 旨

Landau-Lifshitz 方程式 (LL 方程式) は連続空間の非等方的強磁性スピン場の古典論の運動方程式である。格子 Landau-Lifshitz 方程式 (格子 LL 方程式) は、空間離散化された LL 方程式で、Sklyanin によって提案された。いずれの方程式も磁性体の可積分模型として長年にわたって研究されているが、離散化された方程式の解については未知の部分が残されている。

dressing 法は、可積分系の解、特にソリトン解を構成する方法として Zakharov らによって開発され、逆散乱法と並んで広く用いられている。逆散乱法と同様、 dressing 法も方程式の Lax 表示を利用するものであるが、Lax 表示された方程式の既知解から出発し、 dressing 行列と呼ばれる行列を構成して新しい解を構成する。従来の dressing 法ではこの dressing 行列がスペクトルパラメータと呼ばれる補助変数の有理関数で構成されているため、適用できる系も同様の性質をもつ系に限られていた。ところが、LL 方程式や格子 LL 方程式は Lax 形式に楕円関数を含むため dressing 行列も同様の性質を持たなくてはならない。従って、従来の有理関数に基づく dressing 法をこれらの方程式に適用することはできず、 dressing 法の何らかの拡張が必要になる。このような dressing 法の拡張の試みは 80 年代初期の Mikhailov の研究に遡る。それを具体的な形で実行して LL 方程式のソリトン解を構成したのは Bobenko である。Bobenko の方法の鍵は古典 Yang-Baxter 方程式の解 (三角関数や楕円関数から構成される行列値関数で、LL 方程式自体がその行列要素を用いて書かれている) を dressing 行列として用いることにある。Bobenko はこれによって LL 方程式に対してソリトン数が 1 および 2 のソリトン解 (1 - ソリトン解および 2 - ソリトン解) を求めた。Volkov は Bobenko の方法を踏襲して格子 LL 方程式に対する 1 - ソリトン解を得たが、技術的困難のため多ソリトン解を得ることができなかった。

本論文の主要な目標は、Bobenko らとは異なる方法で三角関数や楕円関数に基づく dressing 法の拡張を行うことによって彼らの方法の技術的困難を克服し、それを用いて格子 LL 方程式に対する多ソリトン解を求めることにある。

第 1 章と第 2 章では、従来用いられてきた逆散乱法と dressing 法について、例に則して解説し、あわせて格子 LL 方程式以外の格子可積分系の具体例の紹介している。まず、格子可積分系の代表例として知られる Ablowitz-Ladik の格子非線形 Schrödinger 方程式を例として、逆散乱法を説明する。逆散乱法の枠組ではソリトン解は無反射ポテンシャルに相当し、その構成は線形代数的計算に帰着することを説明する。第 2 章では、格子 Heisenberg 方程式を例として、従来の dressing 法を説明している。格子 Heisenberg 方程式は、格子 LL 方程式の完全等方な場合であり、第 1 章の Ablowitz-Ladik の格子非線形 Schrödinger 方程式と等価であることが知られている。

第 3 章では、格子 LL 方程式を定式化し、方程式とその Lax 表示を明示する。

第 4 章、第 5 章には、本論文の主結果を示す。第 4 章では部分非等方な場合、第 5 章では完全非等方な場合の格子 LL 方程式を扱うため、それぞれの場合について、 dressing 法を三角関数型・楕円関数型に拡張した。第 4 章・第 5 章で示す方法

では Bobenko たちとは異なる形の dressing 行列を用いる。Bobenko たちは古典 Yang-Baxter 方程式の解とその  $\lambda$  に関する導函数とを組み合わせ、多ソリトン解を構成するための dressing 行列として用いた。このためソリトン数が増えるにつれて取り扱いが急激に複雑になる。これが前述の技術的困難の原因である。これをふまえて本論文では、古典 Yang-Baxter 方程式の解を  $\lambda$  平面上で平行移動した関数を用意し、これらを重ね合わせたものを dressing 行列として用いる。これによって容易に多ソリトン解を得ることができる。なお、本文では格子 LL 方程式を例としてこの方法を詳細に紹介しているが、この方法は類似のさまざまな方程式（非等方的主カイラル場の方程式やその時空離散化版など）に対しても適用できる。

実際の解構成の手順は、Lax 表示の解析的な性質に基づいて前述のような dressing 行列の函数系を決める複素解析的な部分と、複素解析的な議論では不定のまま残る係数を可積分系の構造に合うように具体的に決める線形代数的な部分とからなる。後者の部分では、未知係数に対する連立一次方程式を立てて解く。その係数行列には dressing 行列の構成函数（有理函数・三角函数・楕円函数）が現れる。本論文で提案された楕円函数型 dressing 法は有利函数型 dressing 法に現れる連立一次方程式とは異なる構造を持つこと、および、従来の有理函数型 dressing 法をその特別な場合として含むことが明らかにされた。

本論文で述べた拡張された dressing 法によって得られる dressing 行列の要素は 2 つの行列式の比で表される。このことからこれらの行列式がタウ函数（ソリトン解をもつ可積分方程式で基本的な意味を持つ量）と何らかの関係があることを示唆した。

第 6 章は、まとめとともに本研究の今後の発展方向についての議論にあてられている。

## 論文審査の結果の要旨

可積分系（正確には完全可積分系）とは、厳密解をすべて求めうる微分方程式系である。可積分系はその方程式の背後に豊かな数学的構造が隠れていることが多く、近年そのような数学的構造に関する研究が盛んに行われているが、厳密解を具体的に構成することもまた基本的な問題である。

代表的な可積分系として、1 次元強磁性体の古典論的模型は長年にわたって研究されてきた。特に、格子を連続化して得られる等方的スピン場の運動方程式（いわゆる Heisenberg 方程式）は、同じく代表的な可積分系である非線形 Schrödinger 方程式と等価であるため、可積分系を扱うための標準的な技法が適用できる。他方、非等方スピン場（Landau-Lifshitz 方程式：LL 方程式）の場合には、運動方程式やその Lax 表示に楕円函数や三角函数が現れるため、数学的により高度な技法が要求される。本論文で取り上げている格子 Landau-Lifshitz 方程式（格子 LL 方程式）は、1 次元格子にスピンの分布するスピン鎖の模型に対する運動方程式である。これは LL 方程式の単純な離散化ではなく、その取扱いは連続空間上の LL 方程式以上に複雑である。他方では、近年、可積分系の研究が離散化・差分化の方向に向かう中で、このような格子上の可積分系が重要性を増している。特に、格子 LL 方程式は格子非線形 Schrödinger 方程式、格子 sine-Gordon 方程式など、よく知られた基本的な可積分系の格子化・離散化を特殊な場合として含むという普遍性を持ち、その点でも重要な可積分系と考えられている。

本論文は格子 LL 方程式のソリトン解を構成するという問題を取り上げ、ソリトン解の構成に際して従来用いられてきた dressing 法の拡張を行ったものである。スピン系の古典論的運動方程式を解くという問題は物理的意味が必ずしも明確ではないが、本論文ではこれらの方程式の物理的意味を問わず、それらを可積分系としてどのように扱うか、という数学的側面に力点が置かれている。

一般に、dressing 法によって方程式を解くには dressing 行列と呼ばれるものを用いる。従来の dressing 法では、それはスペクトルパラメータと呼ばれる補助変数  $\lambda$  の有理函数として構成されていた。他方、本論文が取り扱っている問題には、有理函数の代わりに楕円函数や三角函数を用いる必要がある。本論文では格子 LL 方程式の Lax 表示（そこにも楕円函数や三角函数が含まれている）の解析的な性質に注目し、そこから演繹的に導かれる一連の条件によって dressing 行列を特徴づけ、それに基づく複素解析的議論と線形代数的計算によって dressing 行列を具体的に決定している。

本論文で用いられた dressing 行列は、古典 Yang-Baxter 方程式の解において  $\lambda$  平面上の極の位置を変えた函数を重ね合

わせたものである。このような dressing 行列を用いることで、従来部分的に試みられてきた多重極をもつ楕円関数による dressing 法に比べ、技術的にはるかに見通しよく多ソリトン解を得ることに成功している。

こうして構成された dressing 行列の各成分は行列式の比で表される。従来の有理関数型の dressing 法では、dressing 行列の各成分がタウ関数とよばれる量（ソリトン解をもつ可積分系では基本的な意味を持つ）の比で表されることが知られていることから、拡張された dressing 法に現れる行列式がタウ関数と深く関係していることを申請者は示唆している。拡張された dressing 法でもタウ関数に類似の量が行列式として現れることは興味深い結果であり、この方向からタウ関数との関連を追及することは今後の研究課題である。

本論文で提案された方法の最も興味深い点は、それが他の類似の方程式にも最小限の変更でただちに適用できることにある。例えば、2次元時空の相対論的場の方程式として主カイラル場と呼ばれるものが知られている。それを非等方化したものは LL 方程式とよく似た構造をもち、また格子 LL 方程式にならって時空離散化を行うこともできる。本論文で提出された拡張された dressing 法を適用することによって、これらの方程式のソリトン解もただちに構成できる。このように、特定の方程式に限定されない一般的な解法の仕組みを明らかにしたことが本論文の最も注目すべき成果であり、その意義は大きい。

以上のように、本学位申請論文は、Landau-Lifshitz 型の可積分系に対して数学的解法の面から新たな知見を示している。これは物理学と数学にまたがる分野横断的な研究として高く評価できる。また、環境要素物質に関する総合的・基礎的研究をめざして創設された文化・地域環境学専攻環境物性解析論講座にふさわしい内容を含むものと言える。

よって本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成13年7月30日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。