

プラズマの非線型な集団励起

早大 相 沢 洋 二

(1月19日受理)

Pines & Bohm は古典力学の方程式から出発して、プラズマ内に線型な集団運動が可能である事を示した。しかし、それらは始めに何らかの仕方で励起される事がないければ、自励的に発振する事がない振動である。この小論では、Pines & Bohm の論文に基礎を置いて、熱的なものとして無視されて来た項を解析する事によって、励起 — 減衰を、不断に繰り返す非線型な自励振動が可能である事を述べる。

§ 1. 1952年の論文で、Pines & Bohm は波数 $\mathbf{k}$ に対する電子密度 $\rho_{\mathbf{k}}$ が次の式で決まる事を示した。

$$\frac{d^2 \rho_{\mathbf{k}}}{dt^2} = - \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} - \sum_{\mathbf{k}', i, j} \frac{4\pi e^2}{mk^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_i} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_j} \quad (1)$$

ここで、右の第2項は、random phase approximation から、 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ の項だけの寄与を取り出して、

$$\frac{d^2 \rho_{\mathbf{k}}}{dt^2} = - \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} - \omega_p^2 \rho_{\mathbf{k}} \quad (2)$$

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}$$

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2}$$

として、さらに $|\mathbf{k}| \ll 1$ の場合に限って、

$$\frac{d^2 \rho_{\mathbf{k}}}{dt^2} + \omega_p^2 \rho_{\mathbf{k}} = 0 \quad (3)$$

相沢 洋二

という linear な集団励起が可能である事を示した。(2) 式の ensemble average $\langle \quad \rangle$ を取る事によって

$$\frac{d^2 \langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle}{dt^2} = - \langle \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \rangle - \omega_p^2 \langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle \quad (2')$$

として、第1項も考慮する事によって解析を進めよう。

Tschebycheff の定理

$$\langle \{ \sum_i A_i \}^2 \rangle = \sum_i \langle A_i^2 \rangle \quad (3)$$

から、

$$\begin{aligned} - \sum_i \langle (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \rangle &= - \langle \{ \sum_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{i\frac{\mathbf{k}}{2} \cdot \mathbf{x}_i} \}^2 \rangle \\ &= 4 \langle \left(\frac{d}{dt} \sum_i e^{i\frac{\mathbf{k}}{2} \cdot \mathbf{x}_i} \right)^2 \rangle = 4 \langle \left(\frac{d}{dt} \rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}} \right)^2 \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

となり、さらに

$$\langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle = \sum_i \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \rangle = \langle \{ \sum_i e^{i\frac{\mathbf{k}}{2} \cdot \mathbf{x}_i} \}^2 \rangle = \langle \rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}}^2 \rangle \quad (5)$$

となっている。ここで新らしい仮定

$$\langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle = \langle \rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}} \rangle^2 \quad (6)$$

をしよう。これについては後の、3-(2) で述べる。これによって、(4) 式は、

$$4 \langle \left(\frac{d}{dt} \rho_{\frac{\mathbf{k}}{2}} \right)^2 \rangle = \frac{\left(\frac{d}{dt} \langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle \right)^2}{\langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle} \quad (7)$$

となっている。したがって (2)' 式は $\langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle = X_{\mathbf{k}}$ として、

$$\frac{d^2 X_k}{dt^2} = \frac{\left(\frac{dX_k}{dt}\right)^2}{X_k} - \omega_p^2 X_k \quad (8)$$

のようになる。第1項によって、 $X=0$ が特異点になっている。この(8)式が非線型な集団励起を与える方程式である。

§ 2. (8)式の解析を行おう。 $X_k = A_k e^{i\phi_k}$ と置いて、方程式(8)に代入すると

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{A} e^{i\phi} + iA\dot{\phi} e^{i\phi} \\ \ddot{X} = \{\ddot{A} + 2i\dot{A}\dot{\phi} + iA\ddot{\phi} + (i\dot{\phi})^2 A\} e^{i\phi} \\ \frac{\dot{X}^2}{X} = \frac{1}{A} (\dot{A}^2 - A^2 \dot{\phi}^2 + 2iA\dot{A}\dot{\phi}) e^{i\phi} \end{cases} \quad (9)$$

から、(kを省略する)、左右の Real Part, Imaginary Part を等しいとすると、

$$\begin{cases} \ddot{A} = \frac{\dot{A}^2}{A} - \omega_p^2 A \\ A\ddot{\phi} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

が導かれる。 $A \neq 0$ の解を考えると、(10)の第2式から、位相部分に対して

$$\phi_k = \omega_k^* t + \phi_0 \quad (11)$$

さらに、(10)の第1式を、 $dt = \omega_p^{-1} d\tau$ および改めて $\frac{d}{d\tau} = \dot{}$ と書くことにすると、 $\dot{A} = B$ として、

$$\dot{B} = \frac{B^2}{A} - A \quad (12)$$

相沢 洋二

となるから、 τ を消して、 $A-B$ の位相面で解析すると、図1のようになる。

この曲線は、微分方程式

$$\frac{dB}{dA} = \frac{B}{A} - \frac{A}{B} \quad (13)$$

を積分して、積分定数を α として、

$$\alpha = \frac{B^2}{2A^2} + \log A \quad (14)$$

となる。 $(A > 0)$ として以下考えている。)

これから、振幅部分 A の閉じたループに対する再帰時間を計算しよう。まづ (14) 式で $B = \dot{A}$ に注意すると、

$$\frac{dA}{d\tau} = \sqrt{2A^2(\alpha - \log A)} \quad (15)$$

であるから、再帰時間 T_r は

$$T_r = 2 \cdot \int_0^{e^\alpha} \frac{dA}{\sqrt{2A^2(\alpha - \log A)}} \quad (16)$$

$$0 < A < e^\alpha$$

となる。 $A = e^\alpha \cdot S$ と変換して

$$\begin{aligned} T_r &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{2S^2 \log \frac{1}{S}}} ; 0 < S < 1 \\ &= 2 \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x}} ; x = -\log S \\ &= \infty \end{aligned} \quad (17)$$

これは、 $A \approx 0$ の近傍で、時間経過が無限大になることによっている。 A が最大値になったときからはかった時間を τ とすると、

$$S = e^{-\frac{\tau^2}{2}} \quad (18)$$

と与えられる。最後になったが、(11)式で現われた、 ω_k^* をはっきりと決める方法はみつからないが、分散関係 $\omega = \omega(k)$ から決まる $\omega(k)$ と同じであると考えるのが適当だと思う。Pines & Bohm によって、 $|k| \ll 0$ で

$$\omega_k^{*2} = \omega_p^2 + |k|^2 \langle v^2 \rangle_{AV} \quad (19)$$

と考えられるが証明は出来ない。分散関係(19)から決まる固有振動が、振幅変調図1を受けて自励発振をしているというイメージになる。

§ 3. 2つの点について、議論しよう。

(1) 非線型集団励起について

(2) 仮定(6)について

(1) プラズマに於いて、 $\omega = \omega(k)$ で与えられる固有振動が存在する事は、多くの線型理論から知られている。そして、その固有振動は生成消滅を繰り返している。例えば Vlasov の方程式から出発した、Landau の理論は、固有振動の Damping を導びいているが、Vlasov の式自体が、Time Reversal な形になっている事から、固有振動の、Growth もあり得る事を示している。

固有振動の励起・減衰は、2つの仕方で生じているだろう。1つは他の固有振動との非線型 Coupling、他の1つは、熱的な Random Force との相互作用。第1の Coupling は、全ての固有モードにエネルギーの等分配を斉らし、第2の Coupling は、全ての固有モードが、減衰して、Collective な様相から、Thermal な様相に変える作用をする。方程式の可逆性は、熱的な様相から、集団的な様相が現われて来る事を示す。方程式(2)'で、第1項を解析したのは、この事情による。

先の解析によると、振幅Aは自励的に振動している。振幅が最大になると、その後は減衰してゆく。位相面(図1)で原点は、特異点であり、トラジェクトリが閉じるまでの時間は、原点で無限大の時間が経過する。したがって、

(8)式の集団変数 x_k は、図2の時間変化を示す。しかし、実際は、原点付近

に戻ったとき、今まで無視して来た項が振動として働く為に、モードは再び励起されて、振動を開始するのである。しかし、その新たな励起は、以前のトラジェクトリーと同一のものとは限らない。

ただ、全体系のエネルギー的に許された範囲で、確率的に励起されるだろうから、最大振幅は変ってくる。位相部分の振動数 ω_k^* は、元のままであり、振幅変調の再帰時間も、ほぼ同一であろう。その結果、持続的に、図3のような、集団運動が生じているだろう。

(2) Pines & Bohm によると、 ρ_k を、純粹に集団的なもの q_k と、熱的なもの η_k に分離出来て、熱的なものが零の極限で、 ρ_k に一致する変数として

$$q_k = \sum_i \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}}{\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2} \quad (20)$$

がある事が知られている。熱的な部分については、 $\langle \quad \rangle$ を取る事によって落とす事が出来るから

$$q_k = \langle \rho_k \rangle \quad (21)$$

と考えられる。ところで、Tschebycheff の定理から、 $\langle \rho_k \rangle = \langle \rho_k^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ であるから、 $\langle q_k \rangle = q_k$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \langle \rho_k \rangle &= \langle q_k \rangle = \left\langle \sum_i \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}}{\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2} \right\rangle \\ &= \left\langle \left\{ \sum_i \frac{e^{-i\frac{\mathbf{k}}{2} \cdot \mathbf{x}_i}}{[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\}^2 \right\rangle = \left\langle q_{\frac{\mathbf{k}}{2}}^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (22)$$

最後の等式では、 $|(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)/\omega| \ll 1$ の場合に、

$$\frac{1}{[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{[\omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)]^{\frac{1}{2}} [\omega + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i)]^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{\omega^2 - (\frac{\mathbf{k}}{2} \cdot \mathbf{v}_i)^2} \quad (23)$$

を用いた。又、第3番目の等号は、Tschebycheff の定理を再び用いた。

(22) 式から、

$$\langle \rho_k \rangle = \langle \rho_{\frac{k}{2}} \rangle^2$$

となり、これは仮定 (6) になっている。

おもわぬ計算違い、考え違いがあるやもしれず、御高批いただければ幸いです。

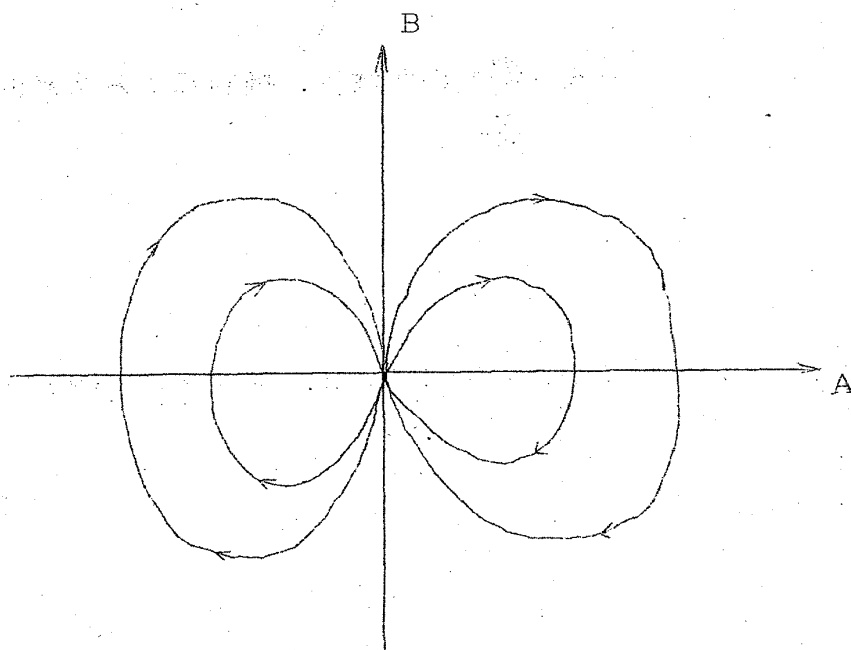


図 1. $\alpha = \frac{B^2}{2A^2} + \log |A|$

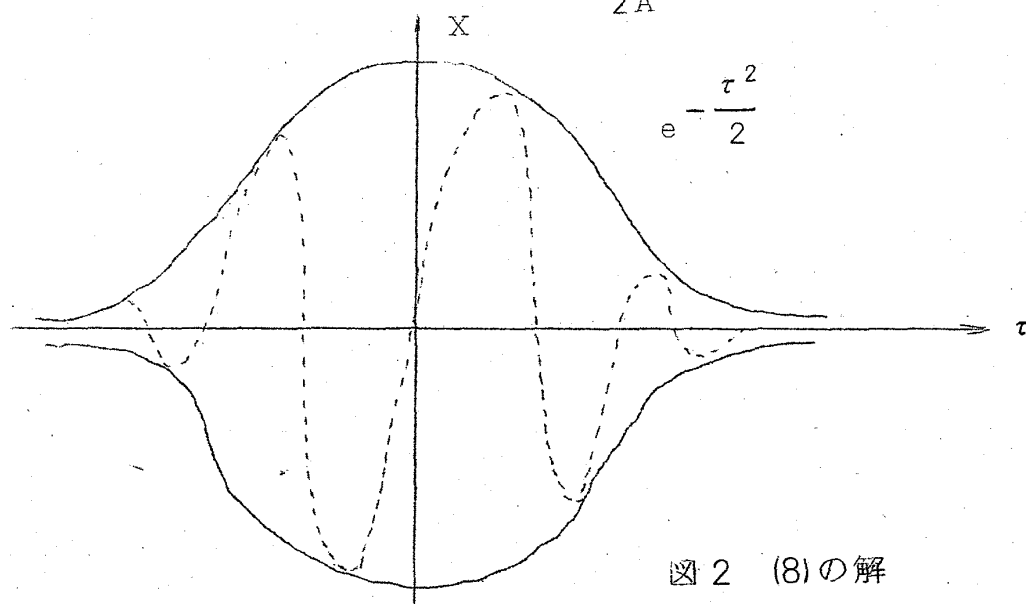


図 2 (8) の解

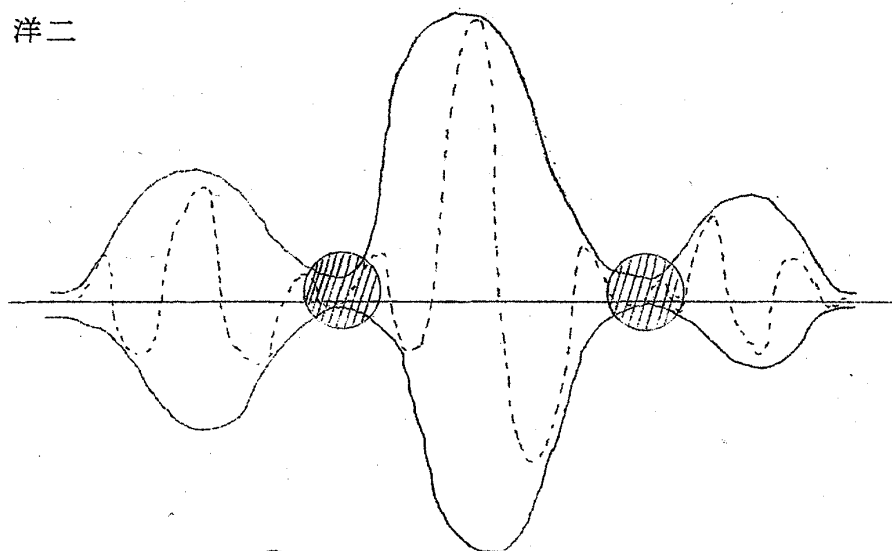


図 3.  の領域は，摂動による確率的な領域を示す。

Reference

D. Pines and D. Bohm: Phys. Rev 85 (1952) 338.