

Purely infinite simple C^* -algebra の projection space と K -groups について

愛媛大 理 坂上鉄郎 (Tetsuro Sakane)

§ 1 $\mathcal{A}$ は C^* -algebra with unit とする。 $\mathcal{A}$ の projection space を $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ とし, unitary space を $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ とする。

$p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ について 次の3つの関係を考える。

(1) p と q は $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 内の arc で結べる。

(2) $p \preceq q$, すなわち $\exists U \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ st. $U^* p U = q$

(3) $p \sim q$, すなわち $\exists V \in \mathcal{A}$ st. $V^* V = p, V V^* = q$

一般に (2) $\Rightarrow$ (3) は自明で, (1) は $p \overset{s}{\sim} q$, すなわち有限個の $U_i \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$, $U_i^* = U_i$ が存在して $(U_1 \cdots U_m) p (U_n \cdots U_1) = q$ と同値である事が, S. Maeda [4] で示されているから,

(1) $\Rightarrow$ (2) である。特に $\mathcal{A}$ が AW^* -algebra ならば, (1) と (2) は同値 ([4]), さらに finite であれば (1), (2), (3) は全て同値である ([43])。

ここでは, $\mathcal{A}$ が purely infinite simple の場合にも, $p \neq 1$, $q \neq 1$ の時 (1), (2), (3) が同値なる事を示し, さらに その系

として、 $K_0(\mathcal{O})$ と $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ の component 全体から 孤立点 $\{0\}, \{1\}$ を除いたものが 1対1に対応する事を、

J. Cuntz [3] の結果を用いて示す。又、purely infinite simple C^* -algebra についてのいくつかの remark を述べる。

$p \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ が infinite とは $p \sim p' < p$ なる p' が存在する時を言い、1 が infinite の時 $\mathcal{O}$ は infinite であると言う。infinite projection の全体を $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{O})$ と書く。 $\mathcal{O}$ を infinite simple とする時 次の結果が J. Cuntz [2], [3] で示されている。

Lemma 1.1. $\forall p \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{O})$ について projection の列 $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ で $p_i \sim p$, $p_i p_j = 0$ ($i \neq j$) $p_i < p$ ($i, j \in \mathbb{N}$) なるものが存在する。

Lemma 1.2. $p \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, $q \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{O})$ とする時 $p \sim p' < q$ かつ $q - p' \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{O})$ となる p' が存在する。

ところで J. Cuntz は [2] において $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{O})$ という group を次のように定義している。 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{O})$ を 同値関係 $\sim$ で分類したものを $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{O})/\sim$ とする。 $[p], [q] \in \mathcal{P}_\infty(\mathcal{O})/\sim$ について $[p] + [q] = [p' + q']$ $p \sim p'$, $q \sim q'$ $p'q' = 0$ (p', q' の存在は Lemma 1.1. より分かる) として算法を定義すると group となり、これを $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{O})$ と定義する ([2])。この時 $K_0(\mathcal{O}) \cong \mathcal{S}_\infty(\mathcal{O})$ である ([3])。

§ 2 まず (2) と (3) の同値性を示す。一般に

$p \overset{\sim}{\sim} q \Leftrightarrow p \sim q$ かつ $1-p \sim 1-q$ である事に注意する。

Definition (I3) C^* -algebra $\mathcal{O}$ が purely infinite であるとは 全ての non zero positive H について $\overline{H\mathcal{O}H}$ の中に infinite projection が存在する事を言う。

従って $\mathcal{O}$ が purely infinite simple の時 $\mathcal{P}(\mathcal{O}) - \{0\} = \mathcal{P}_0(\mathcal{O})$ になり、 $\mathcal{S}_0(\mathcal{O})$ が group であるという事を用いると次の事が示される。

Proposition 2.1. $\mathcal{O}$: purely infinite simple C^* -algebra

$p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ $p \neq 1, q \neq 1$ について $p \sim q \Leftrightarrow p \overset{\sim}{\sim} q$.

以後 $\mathcal{O}$ は全て purely infinite simple とする。 $\mathcal{U}_0(\mathcal{O})$ を $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ における 1 の component とする。さらに $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$ について、 $U_1, U_2^{-1} \in \mathcal{U}_0(\mathcal{O})$ 、すなわち U_1 と U_2 が $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ 内の arc で結べる時 $U_1 \overset{\text{arc}}{\sim} U_2$ と書く。

Lemma 2.2. (I3) $U \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$ とする時 次の(*)を満足

する non-zero positive H が存在する。

(*) $\forall p' \in \mathcal{P}(\overline{H\mathcal{O}H})$ に対して、 $U \overset{\text{arc}}{\sim} U' + p'$ となる $U' \in \mathcal{U}((1-p')\mathcal{O}(1-p'))$ が存在する。

Lemma 2.3. $\forall p \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ ($p \neq 1, 0$) $\forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$ に対して

$p \sim q$ かつ $U \overset{\text{arc}}{\sim} V + 1 - q$ となる $q \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$, $V \in \mathcal{U}(\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O})$ が存在する。

ここで J. Cuntz [3] により $K_1(\mathcal{O}) \cong \mathcal{U}(\mathcal{O})/\mathcal{U}_0(\mathcal{O})$ なる事が示されているので次の事が分かる。

Lemma 2.4. $\mathcal{U}(\mathcal{O})/\mathcal{U}_0(\mathcal{O})$ は abelian である。

Lemma 2.5. $p \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ $p \neq 0$ とする。 $\forall \pi \in \mathcal{U}(\mathcal{O})$ に対し $\pi \overset{\text{arc}}{\sim} \pi + 1 - p$ となる $\pi \in \mathcal{U}(p\mathcal{O}p)$ が存在する。

Theorem 2.6. $p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ について $p \neq 1, q \neq 1$ の時次の (1), (2), (3) は同値である。

- (1) p と q は $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ 内の arc で結べる。
- (2) $p \overset{\pi}{\sim} q$
- (3) $p \sim q$

§1 で述べたように $K_0(\mathcal{O}) \cong \mathcal{K}_0(\mathcal{O})$ を用いるとさらに次の事が分かる。

Corollary 2.7. $K_0(\mathcal{O})$ と $\mathcal{P}(\mathcal{O}) - \{0, 1\}$ の component 全体は 1対1に対応する。

これに対応するものとして、 $K_1(\mathcal{O}) \cong \mathcal{U}(\mathcal{O})/\mathcal{U}_0(\mathcal{O})$ から、 $K_1(\mathcal{O})$ と $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ の component 全体が 1対1に対応する事実がある。

Corollary 2.8. Cuntz-algebra $\mathcal{O}_n$ について、 $\mathcal{P}(\mathcal{O}_n)$ の component の数は $n+1$ 個である。 ($n=2, 3, \dots$)

§3 ここでは purely infinite simple C^* -algebra

に関するいくつかの remark を述べる。

Proposition 3.1. $\mathcal{O}_2$: infinite simple C^* -algebra with unit. とする時, 次の (1), (2), (3) は同値である。

- (1) $\mathcal{O}_2$: purely infinite
- (2) 任意の non-zero positive H に対して $XHX^* = 1$ となる $X \in \mathcal{O}_2$ が存在する。
- (3) 任意の non-zero な $A \in \mathcal{O}_2$ に対して, $XAY = 1$ となる $X, Y \in \mathcal{O}_2$ が存在する。

Proposition 3.2. $\mathcal{O}_2$: purely infinite simple C^* -algebra with unit とし, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}_2$ の hereditary C^* -sub-algebra とする。この時 $\mathcal{B}$ は purely infinite simple C^* -algebra である。

Proposition 3.3. $\mathcal{O}_2$: simple C^* -algebra with unit とする時 次の (1), (2) は同値である。

- (1) $\mathcal{O}_2$: purely infinite
 - (2) $K \otimes \mathcal{O}_2$: purely infinite
- 又 (1). K は infinite dimensional separable Hilbert space $\mathcal{H}$ の compact operator 全体のなる C^* -algebra である。

参考文献

- [1] J. Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, Commun. Math. Phys. 57 (1977), 173-185.

- [2] J. Cuntz, Murray-von Neumann equivalence of projections in infinite simple C^* -algebras, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 23 (1978), 1011-1014.
- [3] J. Cuntz, K-theory for certain C^* -algebras, *Ann. of Math.*, 113 (1981), 181-197.
- [4] S. Maeda, On arcs in the space of projections of a C^* -algebra, *Math. Japonicae*, 21 (1976), 371-374.