

Trudinger's inequality and related elliptic equations

Takashi SUZUKI (鈴木 貴, 愛媛大・理)

1. [7] において我々は固有値問題

$$-\Delta u = \lambda f(u) e^{u^q} \text{ in } B = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ on } \partial B \quad (1)$$

の古典解 $u(x)$ の $\lambda \downarrow 0$ での挙動を考察した。即ち非線形項 $f(u)$

$$0 \leq f(u) \leq C(1 + u^m) \quad (u \geq 0) \quad (2)$$

である場合.

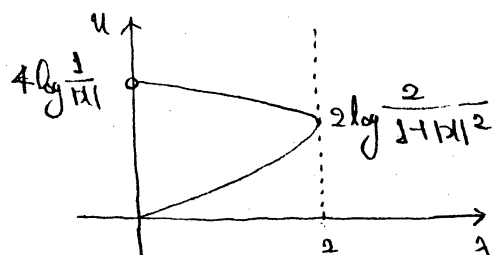
$$\lambda \downarrow 0, \quad \|u\|_{\infty} \rightarrow +\infty \quad (3)$$

であるような解 $\{(\lambda, u)\}$ は macroscopic には次のような挙動を示す:

定理 1. $0 < d < 1 \Rightarrow u(x) \rightarrow +\infty \quad (\forall x \in B)$

$d > 1 \Rightarrow u(x) \rightarrow 0 \quad (\forall x \neq 0)$

borderline case $d=1, m=0$ は, [6] によつて $u(x)$ は特異極限 $4 \log \frac{1}{|x|}$ に収束する。 $f \equiv 1, d=1$ に対する解の大域的分岐図は下図のようになるのである:



我々は更に次のような microscopic な漸近挙動を得た:

定理 2 $\alpha > 1$ の場合, 適当な列 $\varepsilon \rightarrow +\infty$ が存在して, 部分列に対し

$$u^\alpha(e^{-\varepsilon/2} \alpha) = u^\alpha(e^{-\varepsilon/2}) + 2 \log \frac{2}{1+|\alpha|^2} + o(1) \quad (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ に広義一様}) \quad (4)$$

となる。但し,

$$f(u) \geq 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} (\log f)'(u) = 0, \quad f(u) \approx u^{-m} \quad (u \gg 1) \quad (5)$$

(4) の右辺第 2 項は $\lambda=2$, $f(u)=1$, $\alpha=1$ に対する (3) の一意古典解であることを注意する。即ち, (3) の解の挙動は microscopic には全て

$$-\Delta u = \lambda e^u \quad \text{in } B, \quad u=0 \quad \text{on } \partial B \quad (4')$$

の解に制御していきように思われる。このように考えることで正しく, どこかお誤りであるのを本稿では吟味してみた。実際「7」において我々は次の事を示している:

定理 3 $\alpha < 2$ で $f(u)=1$ である場合には, 定理 2 の収束は $|\alpha| \leq e^{\varepsilon/2}$ において一様とはならない。

2. 前項において問題 (3) において 2 つの borderline: $\alpha=1$, $\alpha=2$ が存在する事を明らかにした。ここで考えるのは $\alpha=2$ の場合である。この場合は Tundinger-Moser の不等式

$$\sup \left\{ \int_B e^{v^2} dx \mid \|\nabla v\|_2^2 \leq 4\pi \right\} < +\infty \quad (6)$$

と密接な関係がある。特に (2) の下で

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u|^2 dx \geq 4\pi \quad (7)$$

となることを示す。

(6) に現われる数値は Moser によって最良であることがわかってゐる。実は次のような形で精微化することが出来る：

命題 4 $\lim_{u \rightarrow +\infty} k(u) = +\infty$ ならば

$$\exists \{w\} \subset H_0^1(B) \text{ s.t. } \int_B |\nabla w|^2 dx < 4\pi, \quad \int_B k(w) e^{w^2} dx \rightarrow +\infty, \quad w \geq 0 \quad (8)$$

一方 (6) に基づいて、Schar の次の存在定理と Lagrange 乗数法により、示した：

命題 5 $\exists v \in H_0^1(B)$ s.t. $\int_B G(v) dx = \mu, \quad \int_B |\nabla v|^2 dx = \delta < 4\pi \Rightarrow$

$$\exists (\lambda, u) : (1) \text{ の古典解, s.t. } \int_B G(u) dx = \mu, \quad \int_B |\nabla u|^2 dx = \delta.$$

そこで、 $G(u) = \int_0^u f(t) e^{t^2} dt$ とある。 $G(u) = k(u) e^{u^2}$ と書くと、
 $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u)/u = +\infty \Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} k(u) = +\infty$ となる。従って、命題 4 の w を、命題 5 の v として採用出来ることに注意す。

$\exists (\lambda, u) : (1) \text{ の古典解, s.t. } \int_B G(u) dx \rightarrow +\infty, \quad \lim_{B \rightarrow \infty} \int_B |\nabla u|^2 dx \leq 4\pi$
 となることを示す。

第一式により、 $\|u\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty$ となる。一方 $f'(u) \geq 0$ ($u > 1$)

より、

$$u f(u) e^{u^2} \geq \int_0^u f(t) e^{t^2} dt = G(u) \quad \text{となるので}$$

$$4\pi \geq \int_B |Vu|^2 dx = \lambda \int_B u f(u) e^{u^2} dx \geq \lambda \int_B g(u) dx$$

となり, $\lambda \downarrow 0$ を得る。(7) と合わせると,

定理 6 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)/u = +\infty \Rightarrow$

$\exists (\lambda, u) : (1)$ の古典解の族 (3) を満たし,

$$F = \int_B |Vu|^2 dx \rightarrow +\infty \quad (9)$$

3. 前定理における $\{E\}$ の挙動と, (4) の収束の一意性とは, 次の様相関係にある:

定理 7 定理 2 において, $\alpha = 2$ で

$$F = \int_B |Vu|^2 dx \rightarrow F_0 < 6\pi \quad (10)$$

であるときは, (4) は $\mathbb{R}^2$ 上広義一様である。

証明を述べるためには, 定理 2 の証明の概略と, 次の Brezis-Merle の定理に言及する必要がある。

定理 8 (Brezis-Merle)

$$-\Delta v = V(x) e^v \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (11)$$

$$\text{において } \|V\|_{\frac{p}{2}} = O(1), \quad \int_{\Omega} |V| e^v dx \leq \delta < 4\pi_{\frac{p}{2}} \Rightarrow \|v\|_{\frac{p}{2}} = O(1)$$

但し, $1 < p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ である。

定理 2 の証明の概略: $\alpha = 2$ に対して述べる。

1° Gidas-Nirenberg の定理によつて (1) の古典解は回転対称.

$u = u(|x|)$, $u_r < 0$ ($0 < r = |x| \leq 1$) とある. Liouville 変換 $r = e^{-t/2}$,

$U(t) = u(r)$ と置入すると, $\cdot = \frac{d}{dt}$ に対し

$$\ddot{U} + \frac{\lambda}{4} f(U) e^{U^2 - t} = 0, \quad U > 0 \quad (t > 0); \quad U(0) = 0, \quad \dot{U} e^{t/2} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty) \quad (12)$$

を得る.

$\tau \rightarrow +\infty$ に対し $U_\tau(t) = U(t + \tau)$, $V(t) = U_\tau^2(t) - U^2(t) \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{V} + \frac{\lambda}{2} U_\tau f(U_\tau) e^{U_\tau^2 - \tau} e^{V - t} &= 2 \dot{U}_\tau^2 \quad (t > -\tau), \\ V(0) &= 0, \quad \dot{V} e^{t/2} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

とある. 即ち, $K(t) = 2 \lambda U_\tau(t) f(U_\tau(t)) e^{U_\tau^2(t) - \tau}$ に対し

$$\int_t^\infty (s - t) 2 \dot{U}_\tau^2(s) ds = V(t) + \int_t^\infty (s - t) \frac{K(s)}{4} e^{V(s) - s} ds = V(+\infty) \quad (14)$$

また $v(t) = V(t)$, $k(t) = K(t)$ ($r = e^{-t/2}$) と置けば

$$-\Delta v = k(|x|) e^v - f \quad (|x| < e^{\tau/2}), \quad v \begin{cases} > 0 & (|x| < 1) \\ = 0 & (|x| = 1) \\ < 0 & (1 < |x| < e^{\tau/2}) \end{cases} \quad (15)$$

よつて $f(t) = 8 e^t \dot{U}_\tau^2(t)$ に対し成立する.

2° 定理 1 の証明に於いて $d > 1$ のときは

$$\gamma = \max_{0 \leq r \leq 1} |r u_r| \rightarrow 0 \quad (16)$$

とある. γ の代わりに γ_τ とする. $\dot{U}_\tau(t) = -\frac{1}{2} r u_r \Big|_{r=e^{-t/2}}$ とある

ので

$$\|\dot{U}_\tau\|_{L^\infty(-\tau, \infty)} \rightarrow 0 \quad (17)$$

とある。

3° $m \equiv \max_{0 \leq r \leq 1} 2\lambda u(r) f(u(r)) e^{u^2(r)/r^2} \rightarrow +\infty$ の場合は、 $0 < \lambda \ll 1$ において $K(r) = 2$ なる $r \rightarrow +\infty$ まである。(17)より、(15)において、

$$\rho \rightarrow 0, \beta \rightarrow 2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \text{ 上 広義 - 様} \quad (18)$$

ρ, ρ は $r = e^{r/2}$ の近くで固有界なので、(15)より、 $\{v\}$ の爆発点 $|x| \geq 1$ には存在しないことがわかる。すなわち、評価 (16) と

$$\|S\|_{L^1(\rho_1 < u < \rho_2)} \leq \frac{2}{\rho_1 e^{-r_1/2}} \int_{\rho_1 e^{-r_1/2} < u < \rho_2 e^{-r_2/2}} |Vu|^2 dx \quad (19)$$

より、 $\varepsilon > 0$ に対し $\|S\|_{L^1(\varepsilon < u < 1)} = O(1)$ であることがわかる。

このことから非線形 Harnack 原理 [7] を用いると、 $0 < u \leq 1$ において $\{v\}$ の爆発点に存在しないことがわかる。最後に、

$\{v\}$ の特異極限 $v_0(|x|) = 2 \log \frac{2}{1+|x|^2}$ であることは、

$$-\Delta v_0 = 2e^{v_0} \quad (\text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad v_0(|x|) \geq 0 \quad (|x| \leq 1) \quad (20)$$

を解いて決定される。

4° $m = O(1)$ の場合は、 $0 < \lambda \ll 1$ において

$$U^2(+\infty) = U^2(r) + 2 \log 2 \quad (21)$$

なる $r \rightarrow +\infty$ がある。 $\|K\|_{L^\infty(-r, \infty)} = O(1)$ であり、部分列をとって

$$K(r) \rightarrow \frac{3}{2} U \geq 0 \quad (22)$$

とすると $K(t) \rightarrow 2\mu$ $(-\infty, \infty)$ 上広義一様である。

(15) により $\|v\|_{L^\infty(|u| < e^{v_2})} = 2\log 2$ である。 $\{v\}$ は

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上広義一様収束し、極限関数 $v_0(|u|)$ は

$$-\Delta v_0 = 2\mu e^{v_0} \text{ in } \mathbb{R}^2, \|v_0\|_{L^\infty} = v_0(0) \leq 2\log 2, v_0 = 0 \text{ } (|u|=1) \quad (23)$$

であることわかる。

$v_0(0) = 2\log 2$ を示されるは、 $v_0(|u|) = 2\log \frac{2}{1+|u|^2}$ となること

わかる。これは、(14) により $v \geq 0$, $v(+\infty) = 2\log 2$

であるので、Lebourg の収束定理により極限移行することにより

示される。

定理7の証明:

1° 定理2の証明で導入した関数 $R(|u|)$ は

$$\|R\|_{L^p(|u|<1)} = O(1) \quad (1 < p < \infty) \quad (24)$$

となる。

2° $m = O(1)$ のときは $\|R\|_{L^\infty} = O(1)$ であるので、 $m \rightarrow +\infty$ の場合

について示せば良い。このときは

$$K(t) = \frac{U_\tau(t)f(U_\tau(t))}{U(\tau)f(U(\tau))} \approx \left\{ \frac{U_\tau(t)}{U(\tau)} \right\}^{m+1}$$

であり、

$$\frac{U_\tau(t)}{U(\tau)} = 1 + \frac{1}{U(\tau)} \int_0^t \dot{U}_\tau(s) ds$$

と書ける。

$$|U_\tau(t)/U(\tau)| \leq C(1+t) \quad (t \geq 0)$$

である。 $t = e^{-t/2}$ に t を τ とし (24) は得られ、

$$2^\circ \quad \int_{Re^{-\tau/2} < |u| < 1} |\nabla u|^2 d\lambda \geq 4\pi + o(1) \quad (V_R > 0) \quad (25)$$

$\therefore$ 定理 2 により、 $U(t) = u(\tau)$, $U_\tau(t) = U(t+\tau)$, $V(t) = U_c^2(t) - U^2(t)$ に対し、

$$V(t) \rightarrow V_0(t) = 2\log \frac{2}{1+e^{-t}}, \quad (-\infty, \infty) \text{ 上 広義一様}$$

である。(15) において積尸型評価を用いると

$$\dot{V}(t) = 2 U(t+\tau) \dot{U}(t+\tau) \rightarrow \dot{V}_0(t) = \frac{2e^{-t}}{1+e^{-t}} \quad (V_t)$$

$R = e^{-\tau/2}$ と書けば、

$$-Re^{-\tau/2} u(Re^{-\tau/2}) u_\tau(Re^{-\tau/2}) \rightarrow \frac{2R^2}{1+R^2} \quad (V_R > 0)$$

$\therefore \therefore$

$$\int_{Re^{-\tau/2} < |u| < 1} |\nabla u|^2 d\lambda = -2\pi R e^{-\tau/2} u(Re^{-\tau/2}) u_\tau(Re^{-\tau/2}) + \int_{Re^{-\tau/2} < |u| < 1} \lambda u f(u) e^{u^2} d\lambda$$

$$\frac{4\pi R^2}{1+R^2} + o(1) = \int_{Re^{-\tau/2} < |u| < 1} \{|\nabla u|^2 - \lambda u f(u) e^{u^2}\} d\lambda \leq \int_{Re^{-\tau/2} < |u| < 1} |\nabla u|^2 d\lambda \quad (V_R > 0)$$

$R < R_1$ に対して、

$$\frac{4\pi R_1^2}{1+R_1^2} + o(1) \leq \int_{R_1 e^{-\tau/2} < |u| < 1} |\nabla u|^2 d\lambda \leq \int_{Re^{-\tau/2} < |u| < 1} |\nabla u|^2 d\lambda$$

$R_1 \rightarrow +\infty$ とすれば、

3° (25) より、 $F_0 < 6\pi$

$$\int_{|u| < Re^{-\tau/2}} |\nabla u|^2 d\lambda < 2\pi + o(1) \quad (V_R > 0)$$

定理 2 の証明に導入した関数 $\varphi(r) = 2v_r^2 \Big|_{r=e^{-\frac{r}{2}}}$ は

$$\|\varphi\|_{L^1(H<1)} = 2 \int_{H < e^{-\frac{1}{2}}} |v|^2 d\lambda < 4\pi + o(1) \quad (26)$$

と 2) と 3)。

$0 < R < 1$ とする。

$$-\Delta R_1 = 0, \quad -\Delta R_2 = \varphi \quad \text{in } H < R; \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0 \quad \text{on } H = R \quad (27)$$

と $R_1, R_2 \in C^\infty$, $R = R_1 + R_2 \in C^\infty$ 。

$$\|v\|_{L^\infty(H=R)} = O(1) \quad \text{より} \quad \|R_1\|_{L^\infty(H<R)} = O(1)$$

$$(26) \leq \text{Brezis-Morle 定理より} \quad \|e^{R_2}\|_{L^8(H<1)} = O(1) \quad (1 < 8 < \infty)$$

$$\|e^R\|_{L^8(H<R)} = O(1) \quad (1 < 8 < \infty) \quad (27)$$

$w = v - R$ は

$$-\Delta w = R e^R e^w \quad \text{in } H < R, \quad w = 0 \quad \text{on } H = R \quad (28)$$

と 2) と 3)。 (24), (27) より

$$\|R e^R\|_{L^p(H<R)} = O(1) \quad (1 < p < \infty) \quad (29)$$

— 3 —

$$\|R e^R e^w\|_{L^1(H<R)} = \|R e^w\|_{L^1(H<R)} = \|\varphi\|_{L^1(H<R)} + \int_{H<R} (-\Delta v) d\lambda$$

$$= \|\varphi\|_{L^1(H<R)} + 2\pi(-v_r(R)) \leq \|\varphi\|_{L^1(H<1)} + 2\pi(-v_{or}(R)) + o(1)$$

$$= \|\varphi\|_{L^1(H<1)} + \int_{H<R} (-\Delta v_0) d\lambda + o(1) \quad (30)$$

(26) より, $0 < R < 1$ と δ を $(4.24) < 4\lambda + o(1)$ とする。

3. Brezis-Merle の Cor.3. (本稿の定理 8) により $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{H}^n(\mathbb{R}))} = O(1)$

となる。

4. $v \rightarrow v_0 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上 L^∞ -収束である。

$$V_0(+\infty) = 2 \log 2 \leq \liminf V(+\infty).$$

- 5. $V(t) \rightarrow V_0(t)$, $K(t) \rightarrow 2$ は $(-\infty, \infty)$ 上 L^∞ -収束である。

3. より, $\|V\|_{L^\infty(-\infty, +\infty]} = O(1)$, かつ $|K(t)| \lesssim 1 + |t|^{m+1}$

従って (14) により Lebesgue の収束定理により極限移行す

べし。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_t \int_t^\infty (s-t) 2 \dot{V}_t^2(s) ds \leq V_0(t) + \int_t^\infty (s-t) \frac{1}{2} e^{V_0(s)-s} ds - \liminf V(+\infty) \\ &= V_0(+\infty) - \liminf V(+\infty) \leq 0 \end{aligned}$$

$$V(+\infty) \rightarrow V_0(+\infty), \quad \int_t^\infty (s-t) \dot{V}_t^2(s) ds \rightarrow 0 \quad (V_t) \quad (31)$$

また (14) により

$$\begin{aligned} |V(t) - V_0(t)| &\leq \int_t^\infty (s-t) 2 \dot{V}_t^2(s) ds + |V(+\infty) - V_0(+\infty)| \\ &\quad + \int_t^\infty (s-t) \left| \frac{K(s)}{4} e^{V(s)} - \frac{1}{2} e^{V_0(s)} \right| e^{-s} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_1} |V(t) - V_0(t)| &\leq \int_{t_1}^\infty (s-t_1) 2 \dot{V}_{t_1}^2(s) ds + |V(+\infty) - V_0(+\infty)| \\ &\quad + \int_{t_1}^\infty (s-t_1) \left| \frac{K(s)}{4} e^{V(s)} - \frac{1}{2} e^{V_0(s)} \right| e^{-s} ds \rightarrow 0 \quad (V_{t_1}) \quad (32) \end{aligned}$$

これは $V \rightarrow V_0$, $\mathbb{R}^2$ 上広義一致を意味する。

± (1) において (2) や (5) のような適当な仮定を付け加え, (3) なる解の族 $f(\lambda u)$ は 全て 定理 6 の結論, 即ち

$$E = \int_B |\nabla u|^2 dx \rightarrow 4\lambda$$

を満たす λ の集合を思ふべき。これは McLeod-Pohleier [4] の Ode approach に基づく評価を用いて $f(u) = u$ に対してはこのことを示すことができる。

定理 9 固有値問題

$$-\Delta u = \lambda u e^{u^2} \text{ in } B = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ on } \partial B \quad (33)$$

において (2) が成立するとする, (7) が成立する。

(33) において (2) なる解の族が存在すること [4] によりわかる。

実際, $t = e^{-t/2}$, $V(t) = u(r)$ とおくと

$$\ddot{V} + \frac{\lambda}{4} V e^{V^2 - t} = 0, \quad \dot{V} > 0 \quad (t > 0), \quad V(0) = 0, \quad V(+\infty) = \delta$$

であり, $y(\tau) = V(t)$, $t = \tau + \log \frac{\lambda}{4}$ と変換すれば, $\tau_0 = -\log \frac{\lambda}{4}$ に対し

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + y e^{y^2 - \tau} &= 0, \quad \dot{y} > 0 \text{ on } (\tau_0, +\infty) \\ y(\tau_0) &= 0, \quad y(+\infty) = \delta < +\infty \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

となる。(34) の解の定性的性質は [4] で詳しく解析されている。以下 $\delta \rightarrow +\infty$ の挙動を記す:

$$1^\circ \quad \tau_0 = 2 \log \delta + 1 + o(1) \quad (2.4), \quad \int_0^\infty e^{U^2-t} dt = 1 + e + o(1) \quad (3.4) \quad (a)$$

$$2^\circ \quad H(\tau) = y^2(\tau) + 2 \log y(\tau) - \tau, \quad \tau^*: \text{the first zero of } H' \text{ as } \tau \searrow$$

$$\infty \quad (3.3)$$

$$y(\tau^*) = \delta + O(\delta^{-1}) \quad (\text{p. 273 } \S 2), \quad e^{H(\tau^*)} = \frac{1}{4} + o(1) \quad (\text{p. 273, } \S 5) \quad (b)$$

$$\therefore y'(\tau^*) = \frac{1}{2} \frac{y(\tau^*)}{y^2(\tau^*) + 1} = \frac{1}{2} \delta^{-1} \{1 + o(1)\} (= \dot{U}(\tau^*))$$

$$3^\circ \quad \tau^* = \delta^2 + 2 \log \delta + O(1) \quad ((6.2); \text{ } \delta \gg 1 \text{ に } \S 1 \text{ の } \tau^*) \quad (c)$$

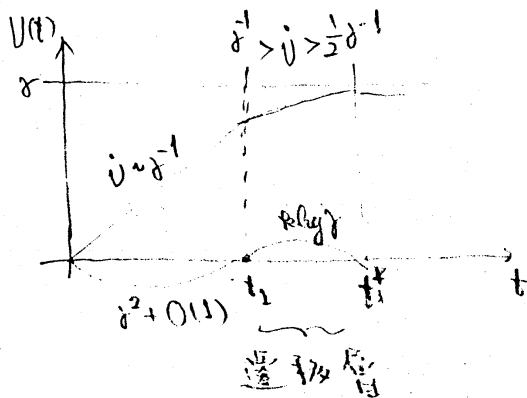
$$\therefore t^* = \tau^* - \tau_0 = \delta^2 + O(1)$$

$$4^\circ \quad \tau_2 = \tau^* - k \log \delta \quad (k > 2), \quad t_1 = \tau_2 - \tau_0 = \delta^2 \{1 + o(1)\} \quad ((6.2), (6.4), (a))$$

$$\Rightarrow \dot{U}(t) = \delta^{-1} \{1 + o(1)\} \quad \text{on } [0, t_1] \quad (\text{p. 278 } \S 2 \text{ } \oplus (6.13)) \quad (d)$$

$$5^\circ \quad H' + 1 = 2U^{-1} \dot{U}(U^2 + 1) \approx e^H = U^2 e^{U^2 - \tau} \quad (t \geq t^*) \quad (\text{p. 273 } \S 5) \quad (e)$$

$$\dot{U} \approx U e^{U^2 - \tau} = e^{-\tau_0} U e^{U^2 - t} \approx \delta^{-2} U e^{U^2 - t} \quad (t \geq t_*)$$



$$U > 0, \quad \dot{U} > 0, \quad \ddot{U} < 0$$

又由 (3.2)

$$\int_0^{t_1} \dot{v}^2(t) dt = \delta^2 \{1+o(1)\} \cdot \delta^{-2} \{1+o(1)\} = 1+o(1)$$

$$\int_{t_1}^{t^*} \dot{v}^2(t) dt \leq \frac{(t^* - t_1)}{4} \delta^{-2} \{1+o(1)\} = \frac{R}{4} \delta^{-2} \log \delta \{1+o(1)\} = o(1)$$

($\dot{v} < 0$)

$$\int_{t^*}^{\infty} \dot{v}^2(t) dt \leq \delta^{-4} \int_{t^*}^{\infty} v^2 e^{2(v^2-1)} dt \leq \delta^{-4} \delta^2 e^{2\delta^2} \int_{\delta^2+R \log \delta + o(1)}^{\infty} e^{-2t} dt = o(1)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \dot{v}^2(t) dt \rightarrow 1, \quad \int_{\mathbb{R}} |Vu|^2 dt \rightarrow 4\pi \quad \text{c.f. } 3. \quad //$$

[1] Atkinson, F.V., Pelletier, L.A., Ground states of $-\Delta u = f(u)$ and the Emden-Fowler equation, ARMA 93 (1986) 103-127.

[2] Brezis, H., Merle, F., Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions, Comm. PDE 16 (1991) 1223-1253.

[3] Gidas, B., Ni, W.M., Nirenberg, L., Symmetry and related properties via the maximum principle, CMP 68 (1979) 209-243.

[4] McLeod, J.B., Pelletier, L.A., Observation on Moser's inequality, ARMA (1989) 261-285.

[5] Moser, J., A sharp form of an inequality by N. Trudinger, Indiana 26 (1971) 1031-1092.

[6] Nagasaki, K., Suzuki, T., Asymptotic analysis for two dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially dominated nonlinearities,

Asymptotic Analysis 3 (1970) 143-148.

- [7] Ogawa, T., Suzuki, S., Nonlinear elliptic equations with critical growth related to the Trudinger inequality, preprint 1992
- [8] Shao, M. C., Eigenfunctions of the nonlinear equation $\Delta u + \lambda S(x, u) = 0$ in $\mathbb{R}^2$, Pacific J. Math. 129 (1987) 349-356
- [9] Suzuki, T., Harnack principle for spherically subharmonic functions, preprint 1991
- [10] Trudinger, N., On imbedding into Orlicz space and some applications, J. Math. Mech. 17 (1967) 473-484