

ミニマル平面クエット流の不安定周期解と乱流制御

京都大工 河原 源太 (Genta Kawahara)

1. はじめに

乱流現象の制御は、幅広い分野における応用と密接に関連し、長らく工学上の重要課題とされてきた。例えば、乱流摩擦抵抗は、航空機や船舶の全抵抗の主要因子となっており、その低減はエネルギー有効利用に不可欠な制御技術のひとつとされている。最近では現代制御理論がチャンネル乱流における摩擦抵抗低減に適用されており (Kim 2003 参照)、非線形 (Bewley, Moin & Temam 2001) あるいは線形 (Högberg, Bewley & Henningson 2003) の最適制御理論を用いることにより、亜臨界レイノルズ数でのチャンネル乱流を層流化できることが報告されている。これらの研究における最適制御は、顕著な抵抗低減をもたらす流れの層流化に対する系統的かつ洗練されたアプローチである。しかしながら、これらの研究で開発された理論は複雑で込入ったものとなっており、今後、層流化のためのより簡潔な制御指針が望まれる。

その簡潔さゆえに魅力的な制御指針としてはいわゆるカオス制御があり、Ott, Grebogi & Yorke (1990) の先駆的な研究以来、少数自由度非線形力学系を中心にこれまで広く研究が進められている。カオスアトラクターには無数の不安定周期軌道が埋め込まれていることが知られており、カオス制御ではこれらの埋め込まれた周期軌道のうちでカオスよりも望ましい性質をもつ1つの軌道がさまざまな手法 (Ott, Grebogi & Yorke 1990; Pyragas 1992) によって安定化される。カオス制御の鍵となる着想は、カオス力学系の示す初期条件あるいはパラメータへの敏感な依存性を利用する点にあり、この敏感な依存性のおかげで、わずかに初期条件やパラメータの値を変化させることによって望ましい目標状態を実現することが可能となる。最近では、カオス制御が2次元乱流などの高自由度力学系にも徐々に適用されつつある (Guan *et al.* 2003)。しかしながら、3次元ナビエ・ストークス方程式に対する非線形の目標解を見つけることは困難であり、それがカオス制御による戦略を壁乱流に適用する上での重大な障害となっている。

この数年間に、カオス制御の目標状態ともなり得るナビエ・ストークス方程式の非線形解が、平面クエット流 (Nagata 1990; Waleffe 2003; Kawahara & Kida 2001)、平面ポアズイユ流 (Itano & Toh 2001; Waleffe 2003)、および自律壁面流 (Jiménez & Simens 2001) において数値的に発見されている。それらは3次元の不安定平衡解あるいは周期解であり、そのうちのいくつかは、摩擦抵抗が低く粘性散逸の小さい静穏な状態を示すことが明らかにされている。これらの静穏な非線形解は、カオス制御によって壁乱流の摩擦抵抗低減を実現する際の目標状態の候補として注目される。本稿では、最近平面クエット流において発見された2つの

周期解 (Kawahara & Kida 2001) のうちの 1 つで, 低摩擦を示す静穏周期解を摩擦抵抗低減のための目標状態の候補の一例として取り上げ, それに着目した乱流制御の可能性について議論したい. 相空間におけるこの周期軌道付近の乱流状態の振舞いを調べ, 低レイノルズ数のミニマル平面クエット乱流を層流化するための制御指針を得る. この制御指針では, 周期軌道が層流化のための中間的な目標として重要な役割を担うことになる.

2. 静穏周期解

本研究では, 非圧縮ナビエ・ストークス方程式をスペクトル法により数値的に解くことによって, Hamilton, Kim & Waleffe (1995) が得たものと同一のミニマル平面クエット乱流に対する直接数値シミュレーションを行う. 平面クエット系は任意のレイノルズ数において線形安定であることが知られており, 層流状態は相空間において吸引域をもつ. したがって, 状態点は初期条件に依存して時間とともに層流状態あるいは乱流状態に漸近する. ここでは適切な初期状態から長時間のシミュレーションを行うことで発達した乱流状態を得る. シミュレーションのための数値計算プログラムは Kawahara & Kida (2001) において用いられたものと同一であり, 藤氏によって開発されたものである (Itano & Toh 2001 参照). エイリアジング誤差を除去したフーリエ展開およびチェビシェフ多項式展開を, それぞれ壁面に平行な方向 (流れ方向 x およびスパン方向 z) と壁面に垂直な方向 (y) に用いて流れ場を離散化する. 流れ方向の流量およびスパン方向の平均圧力勾配をそれぞれゼロに設定する. 数値計算はレイノルズ数 $Re \equiv Uh/\nu = 400$ において $8,448 (= 16 \times 33 \times 16)$ 点の格子点上で行う. ここに, U は 2 平行平板の速度差の半分, h は 2 平行平板間距離の半分, ν は流体の運動粘性率を表す. このとき, 乱流状態での平均摩擦速度 u_τ と h に基づくレイノルズ数は $Re_\tau = 34.1$ となる. 流れ方向とスパン方向の周期箱寸法はそれぞれ $L_x/h = 1.755\pi$ ($L_x^+ = 188$), $L_z/h = 1.2\pi$ ($L_z^+ = 129$) である. 以後, 上付き添え字 $+$ は u_τ と ν で規格化された物理量であることを表す. 格子間隔は, x, y, z の各方向に $\Delta x^+ = 12$, $\Delta y^+ = 0.16 - 3.3$, $\Delta z^+ = 8.1$ であり, この間隔は壁乱流の直接数値シミュレーションで用いられる標準的な値と同程度である. ミニマル平面クエット乱流では, 2 つの空間対称性 (Nagata 1990): (i) 面 $z = 0$ に関する反転および x 方向への半周期 $L_x/2$ の並進; (ii) 直線 $x = y = 0$ まわりの 180° の回転および z 方向への半周期 $L_z/2$ の並進, が自発的 (かつ近似的) に現れることが観測されている (Kawahara & Kida 2001). ここではこれらの対称性を課した乱流場と課さない乱流場とを計算する. 一方, 下で計算する静穏周期解にはこれらの対称性を課す. これらの対称性をもつ乱流解は平板に平行な方向への並進対称性をもたないため, 相空間における (後述の) ポアンカレ断面上での周期運動に対応する状態点と (対称性をもつ) 乱流運動のそれとの距離を厳密に測ることができる.

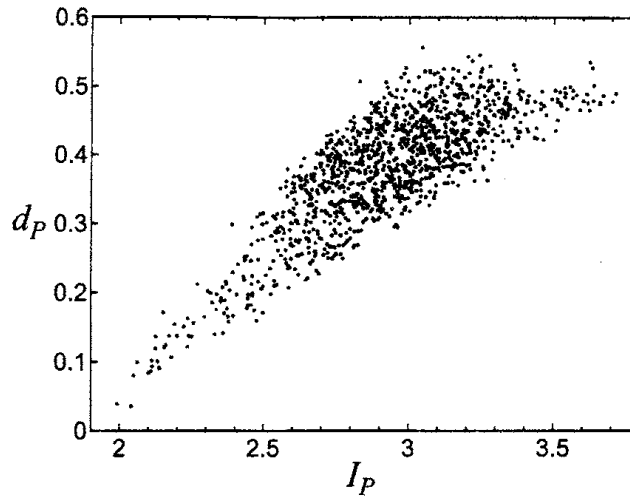


図1. 相空間における周期軌道とポアンカレ断面との交点 $\mathbf{x}_f$ および乱流軌道とポアンカレ断面との交点 $\mathbf{x}$ 間の規格化された距離 $d_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_f\| / \|\mathbf{x}_f\|$. 横軸は交点 $\mathbf{x}$ に対応する乱流状態の壁面剪断率 I_p を表す.

本研究では, Kawahara & Kida (2001) によって発見された低摩擦状態を示す静穏な時間周期解をニュートン法の適用により高精度で再計算する. 瞬時の流れ場を表現する N 個の独立な変数, すなわち, 流れ方向とスパン方向の (平板に平行な面内での) 平均速度成分に対するチェビシェフ係数, および平板に垂直な方向の速度成分と渦度成分に対するフーリエ・チェビシェフ係数で張られる N 次元の相空間を考える ($N \approx 1.5 \times 10^4$). 前述の対称性 (i), (ii) を流れに課すと, その動力学は n 次元の部分空間において記述される ($n \approx N/4$). この部分空間においてポアンカレ断面を $\text{Im}(\tilde{\omega}_{y1,2,0}) = 0$ によって定義する. ここに, $\text{Im}(\tilde{\omega}_{y1,2,0})$ は, 流れ方向波数が $2\pi/L_x$, 多項式の次数が 2 次, スパン方向波数がゼロのフーリエ・チェビシェフ係数の虚数部を表す. 本研究では, $(n-1)$ 次元のポアンカレ写像 $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ の不動点として周期解を求める. ここに, $\mathbf{r}$ はポアンカレ断面上の $(n-1)$ 次元状態ベクトルである. ポアンカレ写像を前述の直接数値シミュレーションにより計算し, $\mathbf{r}$ における写像のヤコビ行列 $D_{\mathbf{r}}\mathbf{f}(\mathbf{r})$ を有限差分によって近似する. ニュートン反復の初期推定データとして Kawahara & Kida (2001) が発見した静穏周期解を用いる. ニュートン反復の収束判定条件を $\|\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\| / \|\mathbf{r}\| < 10^{-9}$ とする. ここに, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す. $L_x/h = 1.755\pi$, $L_z/h = 1.2\pi$ (あるいは $Re = 400$, $L_z/h = 1.2\pi$) に対して, 少なくとも $Re = 240 - 500$ (あるいは $L_x/h = 1.755\pi - 1.88\pi$) の範囲で周期解の存在を確認している. 以下では, 前述のミニマル乱流 (Hamilton, Kim & Waleffe 1995) と同一条件での静穏周期軌道について調べる.

既に Kawahara & Kida (2001) が報告しているように, 相空間において乱流状

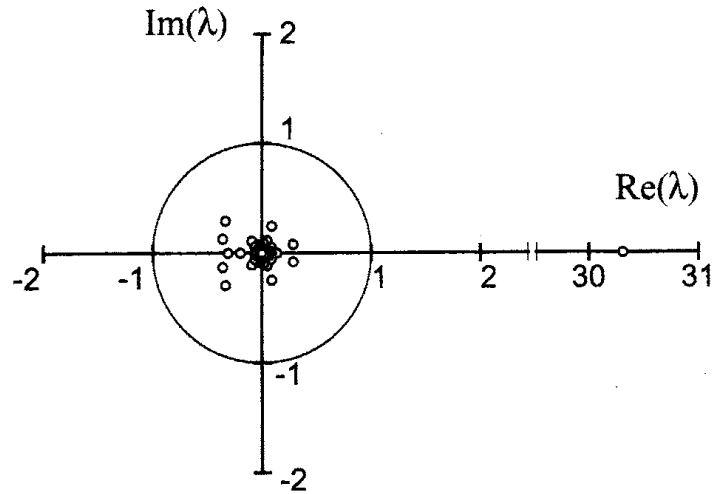


図 2. ポアンカレ写像の不動点（周期軌道）におけるヤコビ行列の固有値 λ . 横軸と縦軸はそれぞれ λ の実数部と虚数部を示す. 単位円外の固有値は不安定を意味する.

態はカオス的に運動しつつ、時おり低壁面摩擦の状態を示す静穏周期軌道に接近する. 静穏な平衡状態（定常進行波）への同様の接近は、平面ポアズイユ系において初めて観測された (Itano & Toh 2001). N 次元相空間における周期軌道とポアンカレ断面との交点 $\mathbf{x}_f$ および対称性を課した乱流の軌道とポアンカレ断面との交点 $\mathbf{x}$ 間の規格化された距離 $d_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_f\| / \|\mathbf{x}_f\|$ を図 1 に示す. 図 1 の横軸は交点 $\mathbf{x}$ に対応する乱流状態の示す壁面剪断率 I_p を表す. ここに、 $I = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} (\partial u / \partial y|_{y=-h} + \partial u / \partial y|_{y=+h}) dx dz / (2L_x L_z U / h)$ はエネルギー注入率であり (Kawahara & Kida 2001), I を層流状態での値で規格化された壁面剪断率と見なすこともできる. ただし、 u は流れ方向の速度成分である. 図 1 から I_p と d_p との強い相関が認められる. 乱流状態が周期軌道付近に接近する際にのみ壁面剪断率は小さな値をとる. したがって、低い壁面剪断率は乱流状態が静穏な周期軌道に接近していることを示す有用な指標となる. 周期 $TU/h = 85.3$ ($T^+ = 248$) の周期軌道に沿う平均壁面剪断率は $\bar{I} = 1.95$ であり、乱流軌道に沿う長時間 ($TU/h \approx 2.5 \times 10^4$, $T^+ \approx 7.2 \times 10^4$) の平均 $\bar{I} = 2.91$ よりもずっと低い.

ポアンカレ写像の不動点（周期軌道） $\mathbf{r}_f$ におけるヤコビ行列 $D_{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}_f)$ の固有値（フロケ乗数）は、周期解と同一の空間周期性と対称性をもつ無限小擾乱に対する周期解の安定性を表す. 図 2 から、ヤコビ行列の固有値 λ には絶対値が 1 より大きい（実）不安定固有値 $\lambda_u = 30.3$ がただ 1 つ存在し、それ以外の全ての固有値は安定であることがわかる. この不安定固有値 λ_u に対応する単位固有ベクトルを $\mathbf{e}_u$ とする. 図 3 に示す 2 つの曲線は、相空間におけるポアンカレ断面上の 2 つの初期点 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_f \pm \epsilon \|\mathbf{r}_f\| \mathbf{e}_u$ ($\|\mathbf{r}_f\| = 0.310$) からそれぞれ始まる軌道の 2 次元

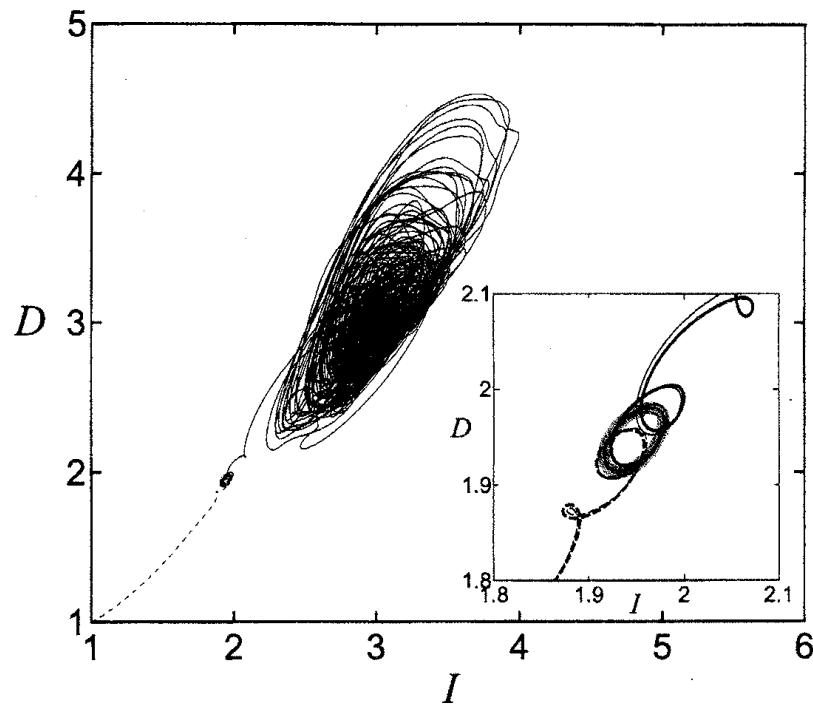


図 3. 周期軌道から正（実線）あるいは負（点線）の不安定方向へわずかに摂動を加えた場合の2つの軌道の (I, D) 面への射影．閉じた太い灰色の線は周期軌道を示す．差込図は周期軌道付近のこれら2つの軌道の拡大図である．差込図には，スパン方向軸まわりに系を回転させた場合 $(2\Omega h/U = \pm 10^{-4})$ の流れに対応する2つの軌道も太線で示されている．太い実線および太い点線は，それぞれクエット系における2平板の運動による剪断の渦度と反平行な回転（正の回転）および平行な回転（負の回転）下での流れを表す．

(I, D) 面への射影を表す．ここに $\epsilon = 10^{-4}$ であり，図の縦軸はエネルギー散逸率 $D = \int_0^{L_x} \int_{-h}^{+h} \int_0^{L_z} |\omega|^2 dx dy dz / (2L_x L_z U^2 / h)$ を表す (Kawahara & Kida 2001)．ただし， ω は渦度ベクトルである．周期軌道から正の不安定方向 $+e_u$ へわずかに摂動を加えた場合の（実線で示す）軌道は乱流状態に漸近し，他方，負の不安定方向 $-e_u$ へ摂動を加えた（点線で示す）軌道は層流状態 $(I, D) = (1, 1)$ に漸近する．この結果は，周期軌道およびその局所安定多様体が乱流状態と層流状態との吸引域間のセパトリックスを形成することを意味する．このような吸引域に関する情報は，乱流への遷移機構の解明のみならず乱流制御のためにもきわめて有用である．しかしながら，一般に高次元相空間における吸引域境界は複雑な形状をもち，それを取り出すことは困難である．ここでは，周期軌道を手がかりにして吸引域境界を見つけることができたといえる．以下では，この吸引域間

のセパトリックスに関する知見に基づいてミニマル平面クエット乱流の層流化を図る。

3. 乱流制御

まず、流れの制御のために新たなパラメーター σ を導入する。この σ を $\sigma = 0$ まわりに小さな幅で変化させるものとする。周期軌道は新たなポアンカレ写像 $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \sigma)$ の $\sigma = 0$ に対する不動点に対応する。すなわち、 $\mathbf{r}_f = \mathbf{f}(\mathbf{r}_f, 0)$ である。乱流状態が周期軌道付近に滞在しているものと仮定し、写像を不動点（周期軌道）まわりで

$$\mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}_f = D_{\mathbf{r}}\mathbf{f}(\mathbf{r}_f, 0)(\mathbf{r}^i - \mathbf{r}_f) + D_{\sigma}\mathbf{f}(\mathbf{r}_f, 0)\sigma^i \quad (1)$$

のように線形化する。ここに、上付き添え字 i ($= 0, 1, \dots$) は制御開始 ($i = 0$) から数えて第 i 回目の写像における値であることを意味する。局所安定多様体上の任意のベクトル $\mathbf{v}_s$ に対して $\mathbf{v}_u \cdot \mathbf{v}_s = 0$ を満足する（乱流の吸引域内部に向く）ベクトル $\mathbf{v}_u$ と式(1)との内積をとると

$$\mathbf{v}_u \cdot (\mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}_f) = \lambda_u [\mathbf{v}_u \cdot (\mathbf{r}^i - \mathbf{r}_f)] + \sigma^i [\mathbf{v}_u \cdot D_{\sigma}\mathbf{f}(\mathbf{r}_f, 0)]$$

となる。したがって、本研究の層流化手法では、第0回目から第1回目までの写像間の時間にのみ

$$\sigma^0 = -c \lambda_u [\mathbf{v}_u \cdot (\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_f)] / [\mathbf{v}_u \cdot D_{\sigma}\mathbf{f}(\mathbf{r}_f, 0)] \quad (2)$$

で与えられるゼロでない σ^0 を系に課す。ここに、 $c > 1$ であり、状態点は乱流状態の側から層流状態の側に向かって安定多様体を横断することができる。この手法は1より大きい数の不安定方向をもつ場合にも拡張することができる。一方、不安定周期軌道の安定化を図るOGY (Ott-Grebogi-Yorke) 法 (Ott, Grebogi & Yorke 1990) では、 $i = 0, 1, \dots$ の各写像の際に式(2)と同一だが $c = 1$ とした式で決定される σ^i を印加して、状態点が安定多様体上に推移するよう制御がなされる。式(2)では $\mathbf{v}_u \cdot D_{\sigma}\mathbf{f}(\mathbf{r}_f, 0) \neq 0$ を仮定している。スパン方向軸まわりの系の回転がこの条件を満足することを確認した（図3の差込図参照）。そこで、層流化を実現可能な制御入力の一例としてスパン方向 (z) 軸まわりの系の回転を取り上げ、制御パラメーターとして回転に対応する一様な渦度 2Ω をとる。

図4は系の回転による層流化の試行結果を示したものである。乱流状態が周期軌道に接近する際（すなわち $i = 0$ において $d_p < 0.15$ となる場合）、式(2)において $c = 2$ として系の回転 2Ω を決定し、第0回目から第1回目までの写像間の短時間スパン方向軸まわりに系を 2Ω で回転させる。この図から、前述したように観測可能な指標である壁面剪断率が低い状態 $I_p \lesssim 2.2$ に対しては層流化が実現されていることがわかる。壁面剪断率が低い状態の流れの層流化には弱い回転で十分であることもわかる。壁面剪断率が比較的高い状態 $I_p \gtrsim 2.2$ （およ

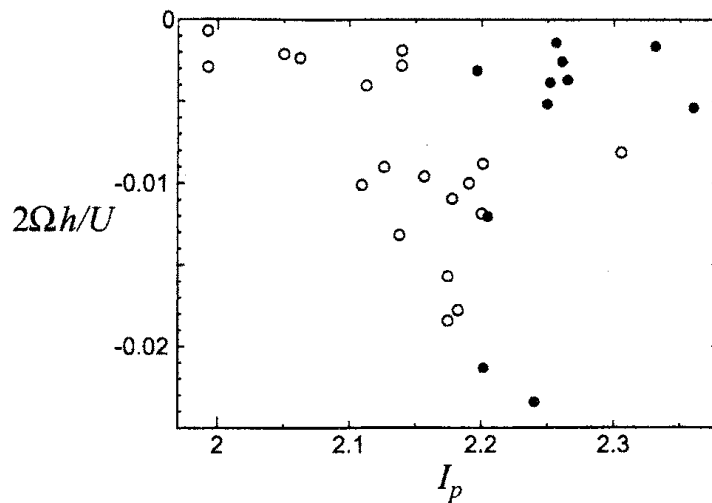


図 4. 層流化の試行に用いられた系の回転の渦度 2Ω [$c=2$ とした式 (2)] と制御開始の際 ($i=0$) の流れの壁面剪断率 I_p との関係. 白丸 (あるいは黒丸) は層流化に成功 (あるいは失敗) したことを示す.

そ $d_p \gtrsim 0.1$ に相当, 図 1 参照) には線形理論が適用できないようである. なお, OGY 法 (Ott, Grebogi & Yorke 1990) によって周期軌道の安定化を実現するための条件はもっと厳しく, 状態点が $d_p \lesssim 10^{-2}$ 程度に周期軌道に接近する必要があることが判明した.

以上の層流化法では, 状態ベクトル $\mathbf{r}^0$ を知る必要があるが, 実際の応用においては $\mathbf{r}^0$ を観測することは不可能であろう. しかし, 一定の $\|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_f\|$ に対する $2|\Omega|$ には自明な上限が存在し, それは $\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_f$ が $\mathbf{v}_u$ に平行になる際に与えられる. つまり, ある小さい値 2Ω の回転によって, I_p が小さい起こり得る全ての状態を層流化できるものと期待される. そこで, 図 4 の結果を考慮し, $I_p < 2.1$ となる場合に, 対称性 (i), (ii) を課さない非対称なミニマル平面クエット乱流に対して, 各状態によらず一定値 $2\Omega h/U = -3 \times 10^{-3}$ で系の回転を印加することにする. 回転を周期運動の周期 ($T^+ = 248$) と同一時間だけ印加する. この方法を 3 つの異なる乱流状態に対して適用し, 全ての場合に乱流が層流化することを確認した [この 3 つの乱流状態のうちの 1 つの層流化については図 5 (太い破線) 参照]. 印加された回転は非常に弱いので, 制御時の総回転角 ΩT はわずか 7.3° である. 図 5 に太い破線で示す結果では, $t_{on}^+ = 0$ から系の回転を印加しているが, $-100 \lesssim t_{on}^+ \lesssim 20$ の範囲の t_{on}^+ であれば層流化が達成できることを確認している. また, $t_{on}^+ = 0$ とした場合に対して, 層流化のための回転の印加時間を $T^+ \approx 100$ にまで短縮できることも判明した. この方法では, 流れの層流化のために知る必要がある物理量は壁面剪断率だけであることに注意されたい.

乱流状態は時おり周期軌道付近に接近するが, 十分な接近は頻繁には起きな

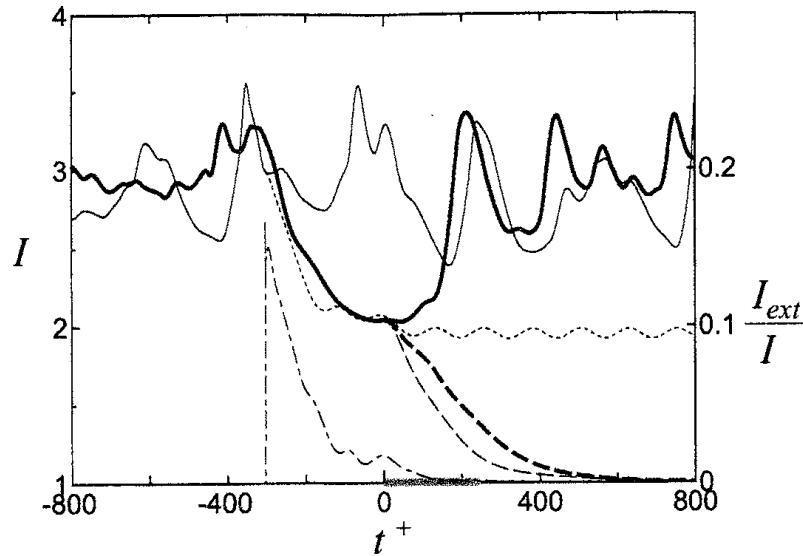


図 5. 制御を行わない場合と行う場合の流れにおける壁面剪断率 I の時間発展. 太い実線と細い実線は制御を行わない 2 つの流れを表す. 太い実線で示すそのうちの 1 つの流れは周期軌道に自然に接近し, この自然な接近の際 ($t^+ = 0$) に系の回転を印加すると, 太い破線で示す制御された流れは層流化する. 細い実線で示すもう 1 つの流れは自然には周期軌道に接近しないが, $t^+ = -302$ から Pyragas の外力制御 ($kh/U = 0.1$) を行くと, 細い点線で示す制御された流れは周期軌道に接近する. この強制的な接近の際 ($t^+ = 0$) に系の回転を印加すると, 細い破線で示す制御された流れは層流化する. 一点鎖線は Pyragas の外力制御によって注入されたエネルギー I_{ext} を I で規格化した値を示す. 系の回転は太い灰色の線分で示した時間帯だけ印加される.

い ($I_p < 2.2$ となる連続した接近の間の平均時間間隔は $T^+ \approx 4 \times 10^4$ ほどである). 高レイノルズ数あるいは大きい計算領域 (周期箱) では十分な接近はもっとまれになるものと考えられる (Jiménez *et al.* 2005). したがって, 十分な周期軌道への接近を待つことなく層流化を実現する方法が望まれる. そこで, つぎにそのような方法を手短に議論する. 任意の時刻に乱流状態を周期軌道に接近させるため, Pyragas の外力制御 (Pyragas 1992) に従い, 単位質量あたりの外力 $kP(\mathbf{u}_p - \mathbf{u})$ をナビエ・ストークス方程式に導入する. ここに, k (> 0) はゲイン定数であり, $\mathbf{u}_p$ と $\mathbf{u}$ はそれぞれ, 周期流と制御対象の流れの速度場を表す. また, 射影演算子 P は, $(m, m') = (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ および $l = 0, 2$ のみの壁垂直方向速度, 渦度のフーリエ・チェビシェフ係数 $\tilde{u}_{m,l,m'}, \tilde{\omega}_{y,m,l,m'}$ によって与えられるソレノイダル速度場の再構成を表す. この外力の自由度の数は, 系の自由度の総数 N に比べてきわめて小さい. 最近, 物理空間において局在した

外力を用いる、いわゆる pinning 制御も 2 次元乱流に適用されているが (Guan *et al.* 2003), ここではフーリエ・チェビシェフ空間において局在した外力を用いることにする. この外力制御によって周期軌道が大域的に安定化させることが可能である. 事実, 任意の時刻に外力を印加すると, 図 5 に細い点線で示すように, 乱流状態は直ちに周期軌道に漸近する. 制御開始直後 ($-302 < t^+ \lesssim 0$) を除けば, 乱流運動を周期運動に移行させるのに必要な制御入力 (図 5 の一点鎖線) はごくわずかである ($I_{ext}/I \ll 1$). 十分な接近 ($I_p < 2.1$) の後, 上と同一の系の回転により流れの層流化が実現される (図 5 の細い破線). 外力制御によって乱流状態が周期軌道へ十分接近するに要する時間は各状態に依存し, その平均値は $\bar{T}^+ \approx 300$ である.

4. まとめ

本稿ではミニマル平面クエット系に対して流れの層流化手法を提案した. この手法では不安定周期軌道が重要な役割を果たす. この手法をミニマルチャネル乱流に拡張するためには, 本研究で用いたのと同様の非線形解が平面ポアズイユ系に対して必要とされる. 亜臨界レイノルズ数の平面ポアズイユ系ではそのような解が既に Itano & Toh (2001) および Waleffe (2003) によって発見されている. 彼らは, 彼らが発見した定常進行波解が乱流状態と層流状態との吸引域間のセパトリックス上に存在することを報告している. 彼らの進行波解は, 本研究の周期解のように, 流れの層流化を図る際の道しるべの候補として有望である. しかしながら, 超臨界レイノルズ数のポアズイユ系では流れの層流化は (不安定化した) 層流状態の安定化を必要とする. また, 今回の層流化手法を十分大きい周期箱での平面クエット乱流に適用するためには, 空間的に低調波の擾乱に対する周期解の安定性を調べる必要がある. これらは今後の重要な研究課題である.

本研究の過程においてお励ましを頂いた永田雅人先生ならびに木田重雄先生に深い感謝の意を表します. さらにシミュレーションプログラムを提供して下さいました藤定義先生に深く感謝します. 本研究は, 科学研究費補助金および 21 世紀 COE プログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」— 複雑系の科学による機械工学の新たな展開 — の援助の下で行われた. ここに記して謝意を表する.

文献

- Bewley, T. R., Moin, P. & Temam, R. 2001 DNS-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms. *J. Fluid Mech.* **447**, 179.
- Guan, S., Zhou, Y. C., Wei, G. W. & Lai, C.-H. 2003 Controlling flow turbulence. *Chaos* **13**, 64.

- Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317.
- Högberg, M., Bewley, T. R. & Henningson, D. S. 2003 Relaminarization of $Re_\tau = 100$ turbulence using gain scheduling and linear state-feedback control. *Phys. Fluids* **15**, 3572.
- Itano, T. & Toh, S. 2001 The dynamics of bursting process in wall turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 703.
- Jiménez, J., Kawahara, G., Simens, M. P., Nagata, M. & Shiba, M. 2005 Characterization of near-wall turbulence in terms of equilibrium and “bursting” solutions. *Phys. Fluids* **17**, 015105-1.
- Jiménez, J. & Simens, M. P. 2001 Low-dimensional dynamics in a turbulent wall flow. *J. Fluid Mech.* **435**, 81.
- Kawahara, G. & Kida, S. 2001 Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.* **449**, 291.
- Kim, J. 2003 Control of turbulent boundary layers. *Phys. Fluids* **15**, 1093.
- Nagata, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519.
- Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. 1990 Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196.
- Pyragas, K. 1992 Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Letter A* **170**, 421.
- Waleffe, F. 2003 Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows. *Phys. Fluids* **15**, 1517.