

空間 $\text{Map}(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n)$ のホモトピー

東工大 理学部 笹尾靖也

$\text{map}(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n)$, $0 \leq m \leq n$, を m 次元複素射影空間から n 次元複素射影空間への連続写像の集合とし, コンパクト一閉位相を与えた空間としよう。 $\text{map}(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n)$ は $0 < m$ のときに無数の path -連結成分をもつが, $\text{Map}(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n)$ で各写像 $\mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$ の path -連結成分をあらわそう。 他方, $U(m+1)$ を次数 $n+1$ のユニタリ群とし, Δ_{m+1} を $\mathbb{Z} \cdot I_{m+1}$, $|Z|=1$ の形のユニタリ群の部分群とする。 ここで I_{m+1} は $U(m+1)$ の単位行列とする。

$U(m+1)$ の通常の $\mathbb{C}P^n$ への作用を考えれば次の写像が自然に得られる:

$$S_m : U(m+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n).$$

たとえば $m=n$ ならば左辺は射影群である。 我々の目標は S_m の誘導同型

$$S_{m*} : \pi_i(U(m+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m)) \rightarrow \pi_i(\text{Map}(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^n))$$

を調べることである。このとき次の定理を得る。

定理 $\mathbb{Q}$ を有理数体とする。

$$\begin{aligned} a) \quad \mathcal{S}_{m*} \otimes 1: \pi_i(U(n+1)/\Delta_{n+1} \times U(n-m)) \otimes \mathbb{Q} \\ \longrightarrow \pi_i(\text{Map}(CP^m, CP^n)) \otimes \mathbb{Q} \end{aligned}$$

はすべての i で同型写像である。

b) $\mathcal{S}_{m*}$ は $i < 4n - 4m + 1$ で同型写像であり、
 $i = 4n - 4m + 1$ で上への準同型写像である。

c) $\mathcal{S}_{n*}: \pi_i(U(n+1)/\Delta_{n+1}) \rightarrow \pi_i(\text{Map}(CP^n, CP^n))$
 は $i < 2n + 2$ で単射準同型写像である。

$$\begin{aligned} d) \quad \pi_1(\text{Map}(CP^n, CP^n)) &\cong \mathbb{Z}_{(n+1)} \\ \pi_2(\text{Map}(CP^n, CP^n)) &\cong \mathbb{Z}_{(2)} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

ここで $\mathbb{Z}_{(k)}$ は位数 k の巡回群とする。

証明は m を固定して、 m についての帰納法で行なわれる。
 $m=0$ ならば $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_0$ は homeomorphism であるから a),
 b) は明らかである。
 次にファイブレーション

$F_m \longrightarrow \text{Map}(cp^m, cp^n) \xrightarrow{j_m} \text{Map}(cp^{m-1}, cp^n)$
 を考えよう。このとき次の可換図式は明らかであろう。

$$\begin{array}{ccc}
 S^{2n-2m+1} = \frac{\Delta_m \times U(n-m+1)}{\Delta_{m+1} \times U(n-m)} & \xrightarrow{S'_m} & F_m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (A) \quad U(n+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m) & \xrightarrow{S_m} & \text{Map}(cp^m, cp^n) \\
 \downarrow & & \downarrow j_m \\
 U(n+1)/\Delta_m \times U(n-m+1) & \xrightarrow{S_{m-1}} & \text{Map}(cp^{m-1}, cp^n)
 \end{array}$$

更に F_m は

$F_m = \{f: cp^m \rightarrow cp^n, f|_{cp^{m-1}} = \text{包含写像}\}$
 と考えられるから、 $cp^m = cp^{m-1} \cup e^{2m}$ より

$$\Omega^{2m}(cp^n) \simeq F_m \quad (\text{up to homotopy})$$

となり。

$$(*) \quad \pi_i(F_m) \simeq \pi_i(\Omega^{2m}(cp^n)) \simeq \pi_i(\Omega^{2m}S^{2n+1})$$

が得られる。更に基本的事実として次の $(**)$ が得られる。

$$(**) \quad S'_{m*}; \pi_i(S^{2n-2m+1}) \rightarrow \pi_i(F_m) \text{ は } i = 2n-2m+1 \text{ で同型写像である。}$$

$(**)$ を認めれば次のように帰納法が定まる。

$\pi_i(F_m)$ は $i = 2n-2m+1$ を除いて torsion 数から $S'_{m*} \otimes 1$ は同型写像となり、図式 (A) の five lemma から a) が

得られる。 $S'_m : S^{2m-2m+1} \rightarrow F_m$ は

$$\tilde{S}' : S^{2n-2m+1} \rightarrow \Omega^{2m} S^{2m+1} \text{ と考えれば } \text{懸垂同型定理}$$

により,

$$S'_* : \pi_i(S^{2n-2m+1}) \rightarrow \pi_i(\Omega^{2m} S^{2m+1})$$

は $i < 4n-4m+1$ で同型, $i = 4n-4m+1$ で全射になることがわかる。つまり

$$S'_{m*} : \pi_i(S^{2n-2m+1}) \rightarrow \pi_i(F_m)$$

は $i < 4n-4m+1$ で同型, $i = 4n-4m+1$ で全射となるから, 再び five lemma (b) が得られる。 a) で $m=n$ とし,

$$\begin{aligned} \pi_i(U(n+1)/\Delta_{n+1}) &= 0 & i = \text{偶数}, 1 \leq i \leq 2n+2 \\ &= \mathbb{Z} & i = \text{奇数}, 1 \leq i \leq 2n+2 \end{aligned}$$

を考えると (c) が得られる。 d) についてはホモトピー群の完全系列を使って計算すればよい。

結局, 我々に与っている, (**) を示せばよいことになる。さて, 二つの写像

$$S, \pm : S^{2n-2m+1} \times \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

を次のように定める。

$$\underline{Z} = (z_0, \dots, z_{n-m}) \in S^{2n-2m+1}$$

$$\underline{W} = [w_0, \dots, w_m] \in \mathbb{C}P^m$$

として,

$$S(\underline{z}, \underline{w}) = [w_0, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m z_0, \dots, w_m z_{n-m}]$$

$$I(\underline{z}, \underline{w}) = [w_0, w_1, \dots, w_m, 0, \dots, 0]$$

S と t は $S^{2n-2m+1} \times \mathbb{C}P^{m-1} \cup \Delta_0 \times \mathbb{C}P^m$ の上で一致するから、差 $d(t, s) \in \pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n)$ を定める。
定義から $d(t, s)$ が生成元になることを示せばよいことがわかる。このためには次のリフトが可能であればよい。

$$(B) \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\deg 1} S^{2n+1} \\ S^{2n+1} & \xrightarrow{d(t, s)} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

$$\text{さて, } \overline{w} = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in S^{2m-1}$$

$$\overline{z} = (z_0, \dots, z_{n-m}) \in S^{2n-2m+1}$$

$$\text{とすれば } S^{2n+1} = S^{2m-1} * S^{2n-2m+1}$$

$$= \{ (\cos \theta) \overline{z}, (\sin \theta) \overline{w} \}$$

$$\text{として, } S^{2n-2m+1} \times E^{2m} = \{ (\cos \theta) \overline{z}, (\sin \theta) \overline{w},$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/4 \} \text{ が } S^{2n+1} \text{ に埋め込まれていること}$$

を認める。

$$\alpha: (E^{2m}, S^{2m-1}) \rightarrow (\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^{m-1})$$

$$\in \alpha(\sin \theta \cdot \overline{w}) = (\sin 2\theta \cdot \overline{w}, \cos 2\theta), 0 \leq \theta \leq \pi/4,$$

を定める。

$$d(t, s) = d(t \circ 1 \times \alpha, s \circ 1 \times \alpha)$$

が得られる。

シンボル2つの写像

$$\tau, \sigma : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

を次のように定める。

$$\tau(\cos \theta \cdot \bar{Z}, \sin \theta \cdot \bar{W}) = [\sin 2\theta \cdot \bar{W}, \cos 2\theta (1, 0, \dots, 0)]$$

$$\sigma(\cos \theta \cdot \bar{Z}, \sin \theta \cdot \bar{W}) = [\sin 2\theta \cdot \bar{W}, \cos 2\theta \cdot \bar{Z}]$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi/4)$$

$$\tau(\cos \theta \cdot \bar{Z}, \sin \theta \cdot \bar{W}) = \sigma(\cos \theta \cdot \bar{Z}, \sin \theta \cdot \bar{W})$$

$$= [\bar{W}, 0] \quad (\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2).$$

このとき次の性質が成り立つ。

$$(1) \quad d(\tau, \sigma) = \tau - \sigma$$

$$(2) \quad \tau = 0,$$

$$(3) \quad d(t \circ 1 \times X, s \circ 1 \times X) = d(\tau, \sigma)$$

したがって結局

$$d(\sigma, \tau) = \sigma = d(t, s)$$

が得られる。

$$\text{よって } \tau' : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1} \text{ と}$$

$$\sigma'(\cos \theta \cdot \bar{Z}, \sin \theta \cdot \bar{W}) = (\sin \theta \cdot \bar{W}, \cos \theta \cdot \bar{Z})$$

$$\text{ただし } \theta = 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi/4)$$

$$= \pi/2 \quad (\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2)$$

定めれば σ' が (B) のリフトを与えることがわかる。