

On an expression of neighborhoods around elliptic curves

By

Takayuki KOIKE* and Takato UEHARA**

Abstract

We give an expression of holomorphic tubular neighborhoods around elliptic curves embedded in blow-ups of the projective planes at general nine points in terms of special functions. The existence of holomorphic neighborhoods enables us to give a gluing construction of a family of K3 surfaces.

§ 1. 導入

S を 2 次元複素多様体, $C \subset S$ を滑らかな楕円曲線とし, $C \cdot C = \deg N_{C/S} = 0$ を仮定する. ただし, $N_{C/S}$ は $C \subset S$ の法束である. 管状近傍定理によれば, $N_{C/S}$ のゼロ切断の近傍と可微分同相な C の近傍 (管状近傍) $W \subset S$ が存在する. しかし, 一般には C の正則な管状近傍 $W \subset S$, すなわち, $N_{C/S}$ のゼロ切断のある近傍と正則同型な C の近傍 $W \subset S$ が存在するとは限らない. それにも関わらず, 法束 $N_{C/S}$ が適当な条件をみたすとき, 正則な管状近傍が存在することが知られている:

Theorem 1 ([1]). $N_{C/S}$ が次の条件をみたすとき, C の正則な管状近傍 $W \subset S$ が存在する.

Diophantine 条件 : $\exists A > 0, \exists \alpha > 0$ s.t. $\text{dist}(\mathbb{I}_C, N_{C/S}^{\otimes n}) \geq A \cdot n^{-\alpha}$ ($\forall n > 0$).

ただし, $\mathbb{I}_C$ は C 上の自明な直線束, dist は $\text{Pic}^0(C)$ 上の不変距離である.

Theorem 1 の Diophantine 条件は, $\text{Pic}^0(C)$ において Lebesgue 測度に関して全測度で成立することに注意する. また, 正則な管状近傍の存在を応用することで, 広いクラスの K3 曲面族の構成が可能となる (§4 参照).

Received May 11, 2019. Revised July 5, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 14J28, 33E05

*Graduate School of Science, Osaka City University

e-mail: tkoike@sci.osaka-cu.ac.jp

**Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

e-mail: takaue@okayama-u.ac.jp

以下では、楕円曲線 $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ 上の 9 点 $\{p_1, \dots, p_9\} \subset C_0$ に対して、 $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ を $\{p_1, \dots, p_9\}$ のブローアップ、 $C := \pi_*^{-1}C_0$ を C_0 の強変換とする。まず、§2 において、特殊関数を用いて、 S 内の楕円曲線 C の正則な管状近傍 W を記述する。また、§3 と §4 において、管状近傍 W の存在を用いて、K3 曲面の族の構成方法について概説する。

§ 2. 近傍の表示

記号 本節で用いる特殊関数に関しては、例えば [3, 7, 8] を参照せよ。

- $\Lambda := \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ($\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$), $\omega_3 := -\omega_1 - \omega_2$.
- $\wp(z) : \Lambda$ に周期をもつ Weierstrass の $\wp$ 関数. $z = 0$ における展開は $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \dots$ となる.
- $\zeta(z) : \zeta'(z) = -\wp(z)$ となる Weierstrass の ζ 関数. $\zeta(z + 2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j$ に注意する. ただし, $\eta_j := \zeta(\omega_j)$ とおいた.
- $\sigma(z) : \zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$ となる Weierstrass の σ 関数. $\sigma(z)$ は $z = 0$ で 1 位のゼロかつ $z \neq 0$ でゼロではない正則な奇関数である. $\sigma(z + 2\omega_j) = -e^{2\eta_j(z + \omega_j)}\sigma(z)$ ($\eta_j := \zeta(\omega_j)$) に注意する. また, $z = 0$ における展開は $\sigma(z) = z - \frac{g_2}{240}z^5 + \dots$ となる.
- $C_0 := \{[\wp(z) : \wp'(z) : 1] \in \mathbb{P}^2 \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{P}^2$: 楕円曲線.
- $[\wp(p_j) : \wp'(p_j) : 1] \in C_0$ ($j = 1, \dots, 9$) : 楕円曲線 C_0 上でブローアップする点. 簡単のため, $p_j \neq 0 \pmod{\Lambda}$ とし, $p_j \neq p_k \pmod{\Lambda}$ ($j \neq k$) とする.
- $p := p_1 + \dots + p_9$ とおき, $p = \omega_1 \cdot s_2 - \omega_2 \cdot s_1$ となる $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ を固定する (ω_1, ω_2 は $\mathbb{R}$ 上独立であることに注意). また, $t_j := \exp(\pi\sqrt{-1}s_j) \in U(1)$ ($j = 1, 2$) とおく (Remark 2 参照). $(t_1, t_2) = (1, 1)$ となるための必要十分条件は $p = 0 \pmod{\Lambda}$ となることに注意する.
- $\mathcal{P}(k) := \{f : z \neq 0 \pmod{\Lambda} \text{ で正則な } \mathbb{C} \text{ 上の有理型関数, } f(z + 2\omega_j) = t_j^k \cdot f(z) \text{ (} j = 1, 2 \text{)}\}$.
- 有理型関数 $\delta_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$\delta_0(z) = \exp(a \cdot z) \prod_{k=1}^9 \frac{\sigma(z - p_k)}{\sigma(z)}, \quad a := \eta_1 s_2 - \eta_2 s_1.$$

$\delta_0(z) \in \mathcal{P}(1)$ となることに注意する. 実際, 知られている関係式 $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi\sqrt{-1}/2$ を用いると, $\delta_0(z + 2\omega_j) = \exp(2a\omega_j - 2p\eta_j) \cdot \delta_0(z) = t_j \cdot \delta_0(z)$ ($j = 1, 2$) となるためである.

- $kp \neq 0 \pmod{\Lambda}$ となる $k \in \mathbb{N}$ に対して, 有理型関数 $\kappa_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$\kappa_k(z) := -\frac{e^{akz} \cdot \sigma(z - kp)}{\sigma(kp) \cdot \sigma(z)}.$$

$\kappa_k(z) \in \mathcal{P}(k)$ となることが δ_0 と同様の計算により示される. $z = 0$ における展開は $\kappa_k(z) = \frac{1}{z} + (\text{正則})$ となることに注意する.

Remark 2. 楕円曲線 C の正則な管状近傍 $W \subset S$ に対して, 次の条件をみたす W の局所座標系 $\{W_j, (z_j, w_j)\}$ が存在する ([6, 9] 参照): (a) $W_j \cap C = \{w_j = 0\}$, (b) $z_j|_C$ は $W_j \cap C$ の局所座標, (c) $\exists A_{jk} \in \mathbb{C}, t_{jk} \in U(1)$ s.t.

$$\begin{cases} z_j = z_k + A_{jk} \\ w_j = t_{jk} \cdot w_k \end{cases} \text{ on } W_j \cap W_k.$$

ここで, $t_{jk} \in U(1)$ や上記の記号における $t_j \in U(1)$ は, 平坦直線束 $N_{C/S}$ のモノドロミーに対応している.

本節では, 9 点ブローアップ $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ に関する C_0 の強変換 $C := \pi_*^{-1}C_0$ に対して, S 内の楕円曲線 C の正則な管状近傍を, 特殊関数を用いて記述する. そのため, $(x, y) = [x : y : 1] \in \mathbb{P}^2$ に対して, $(\wp(z), \wp'(z)) \in C_0$ のまわりでの冪級数展開を次の形で表す.

$$(2.1) \quad x = \wp(z) + \sum_{k \geq 1} f_{xk}(z) \cdot w^k, \quad y = \wp'(z) - \sum_{k \geq 1} f_{yk}(z) \cdot w^k.$$

後の都合のため, y の w^k における係数は $-f_{yk}(z)$ としておく. $f_{xk}(z), f_{yk}(z)$ は $z \neq 0 \pmod{\Lambda}$ で正則な (有理型) 関数となる. また, $z = 0 \pmod{\Lambda}$ における表示を与えるため, 座標 $(v_0, u_0) := [v_0 : 1 : u_0] \in \mathbb{P}^2$ を用いて次で表す.

$$u_0 = \frac{1}{y} = \frac{1}{\wp'(z)} + \sum_{k \geq 1} g_{0k}(z) \cdot w^k, \quad v_0 = \frac{x}{y} = \frac{\wp(z)}{\wp'(z)} + \sum_{k \geq 1} h_{0k}(z) \cdot w^k.$$

$g_{0k}(z), h_{0k}(z)$ は $z = 0 \pmod{\Lambda}$ で正則な関数となる. さらに, ブローアップでの状況をみるために, $j = 1, 2, \dots, 9$ に対して次の座標を導入する.

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{1}{y - \wp'(p_j)} = \frac{1}{\wp'(z) - \wp'(p_j)} + \sum_{k \geq 1} g_{jk}(z) \cdot w^k, \\ v_j &= \frac{x - \wp(p_j)}{y - \wp'(p_j)} = \frac{\wp(z) - \wp(p_j)}{\wp'(z) - \wp'(p_j)} + \sum_{k \geq 1} h_{jk}(z) \cdot w^k. \end{aligned}$$

$h_{jk}(z)$ は $z = p_j \pmod{\Lambda}$ で正則な関数となる. $g_{jk}(z)$ は後の都合のために導入した ($z = p_j$ で正則である必要はない). 本節の目標は次の定理を示すことである.

Theorem 3. $g_2 \neq 0$ かつ $p \notin \mathbb{Q} \pmod{\Lambda}$ 及び次を仮定する.

(a) 各 $k = 1, 2, \dots$ に対して, $f_{xk}(z) \in \mathcal{P}(k)$, $f_{yk}(z) \in \mathcal{P}(k)$.

(b) $g_{0k}(z)$ と $h_{0k}(z)$ は $z = 0$ で正則で, 各 $j = 1, \dots, 9$ に対して, $h_{jk}(z)$ は $z = p_j$ で正則.

このとき, 非自明 $(f_{x1}(z), f_{y1}(z)) \neq (0, 0)$ な (形式的) 冪級数展開 (2.1) が存在し, 次の意味で一意である: $\tilde{f}_{xk}(z), \tilde{f}_{yk}(z)$ に対する非自明な冪級数展開 (2.1) が仮定をみたすとき, 複素数 $c \in \mathbb{C}^\times$ が存在して, $\tilde{f}_{xk}(z) = c^k f_{xk}(z)$, $\tilde{f}_{yk}(z) = c^k f_{yk}(z)$ となる. さらに, $\delta(z) = c\delta_0(z)$ ($c \in \mathbb{C}^\times$) をみたす. ただし,

$$\delta(z) := \left| \frac{\partial x}{\partial z}(z, 0) \frac{\partial x}{\partial w}(z, 0) \right| = -(\wp'(z) \cdot f_{y1}(z) + \wp''(z) \cdot f_{x1}(z)).$$

Remark 4. 点 $(\wp(z), \wp'(z))$ の近傍で冪級数展開が意味をもつためには, $\delta(z)$ は $z \neq 0, p_1, \dots, p_9$ でゼロでない正則で $z = p_1, \dots, p_9$ で 1 位のゼロ点となる必要がある. また, (u_0, v_0) を用いて,

$$\left| \frac{\partial u_0}{\partial z}(z, 0) \frac{\partial u_0}{\partial w}(z, 0) \right| = \frac{\delta(z)}{\wp'(z)^3}$$

が $z = 0$ でゼロでない正則となるためには $\delta(z)$ は $z = 0$ でちょうど 9 位の極となる必要がある.

しばらくは $p \notin \mathbb{Q} \pmod{\Lambda}$ を仮定せず計算を進める. まず, $f_\bullet(z)$ と, $g_\bullet(z)$, $h_\bullet(z)$ の関係を求める. 記号を簡略化するために,

$$x_j := \begin{cases} x & (j = 0) \\ x - \wp(p_j) & (j = 1, \dots, 9), \end{cases} \quad y_j := \begin{cases} y & (j = 0) \\ y - \wp'(p_j) & (j = 1, \dots, 9), \end{cases}$$

$$\wp_j^{(k)}(z) := \begin{cases} \wp^{(k)}(z) & (j = 0) \\ \wp^{(k)}(z) - \wp^{(k)}(p_j) & (j = 1, \dots, 9), \end{cases}$$

とおくことにすると, $j = 0, 1, 2, \dots, 9$ に対して,

$$u_j = \frac{1}{\wp_j'(z)} \frac{1}{1 - \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{f_{yk}(z)}{\wp_j'(z)} w^k \right\}} = \frac{1}{\wp_j'(z)} \sum_{\ell \geq 0} \left\{ \sum_{k \geq 1} \frac{f_{yk}(z)}{\wp_j'(z)} w^k \right\}^\ell.$$

展開して係数を比較すると,

$$(2.2) \quad g_{jk}(z) = \frac{1}{\wp_j'(z)} \sum_{\ell=1}^k \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = \ell \\ 1 \cdot m_1 + \dots + k \cdot m_k = k}} \binom{\ell}{m_1, \dots, m_k} \prod_{n=1}^k \left\{ \frac{f_{yn}(z)}{\wp_j'(z)} \right\}^{m_n},$$

$$\binom{\ell}{m_1, \dots, m_k} = \frac{\ell!}{m_1! \dots m_k!}$$

が得られる. 例えば, $g_{j1}(z), \dots, g_{j4}(z)$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned} g_{j1}(z) &= \frac{1}{\wp'_j(z)^2} f_{y1}(z) \\ g_{j2}(z) &= \frac{1}{\wp'_j(z)^3} \{ \wp'_j(z) f_{y2}(z) + f_{y1}(z)^2 \} \\ g_{j3}(z) &= \frac{1}{\wp'_j(z)^4} \{ \wp'_j(z)^2 f_{y3}(z) + 2\wp'_j(z) f_{y2}(z) f_{y1}(z) + f_{y1}(z)^3 \} \\ g_{j4}(z) &= \frac{1}{\wp'_j(z)^5} \{ \wp'_j(z)^3 f_{y4}(z) + \wp'_j(z)^2 (2f_{y3}(z) f_{y1}(z) + f_{y2}(z)^2) \\ &\quad + 3\wp'_j(z) f_{y2}(z) f_{y1}(z)^2 + f_{y1}(z)^4 \}. \end{aligned}$$

さらに, $v_j = x_j \cdot u_j$ に注意すると,

$$h_{jk}(z) = \sum_{\ell=0}^k f_{x\ell}(z) \cdot g_{j,k-\ell}(z) \quad \left(f_{x0}(z) := \wp_j(z), \quad g_{j0}(z) := \frac{1}{\wp'_j(z)} \right)$$

で与えられる. 一方, $x_j = y_j \cdot v_j$ に注意すると, $f_{xk}(z) = -\sum_{\ell=0}^k f_{y\ell}(z) \cdot h_{j,k-\ell}(z)$ が得られる. ただし $h_{j0}(z) := \wp_j(z)/\wp'_j(z)$ で, ここでは $f_{y0}(z) := -\wp'_j(z)$ とおいた. 特に, 次の表示が得られる.

$$(2.3) \quad h_{jk}(z) = \frac{1}{\wp'_j(z)} \left(\frac{\wp_j(z)}{\wp'_j(z)} \cdot f_{yk}(z) + f_{xk}(z) \right) + \frac{1}{\wp'_j(z)} \sum_{\ell=1}^{k-1} f_{y\ell}(z) \cdot h_{j,k-\ell}(z).$$

以下, $\mathcal{P}(k)$ に含まれ $z=0$ で高々 m 位の極となる関数全体の集合を $\mathcal{P}_m(k)$ で表すことにする (記号を参照).

Lemma 5. $\mathcal{P}_m(k)$ は m 次元複素ベクトル空間であり, 基底は次で与えられる.

- (1) $kp \neq 0 \pmod{\Lambda}$ のとき, $\kappa_k(z), \kappa'_k(z), \dots, \kappa_k^{(m-1)}(z)$.
- (2) $kp = 0 \pmod{\Lambda}$ のとき, $1, \wp(z), \wp'(z), \dots, \wp^{(m-2)}(z)$.

Proof. $\mathcal{P}_m(k)$ がベクトル空間となることは明らかである. 今, $f_1(z), f_2(z) \in \mathcal{P}_m(k)$ を $z=0$ における Laurent 展開の主要項が一致する有理型関数とすると, $f_1(z) - f_2(z) \in \mathcal{P}(k)$ は極をもたないため, Liouville の定理より $f_1(z) - f_2(z)$ は定数となる. $kp \neq 0$ のときは, $(t_1, t_2) \neq (1, 1)$ に注意すると, $f_1(z) - f_2(z) = 0$, つまり $f_1(z) = f_2(z)$ となる. 特に, $\mathcal{P}_m(k)$ の次元は m 以下となる. また $kp = 0$ のときは, $\mathcal{P}_m(k)$ が $z=0 \pmod{\Lambda}$ にのみ (高々 m 位の) 極をもつ楕円関数からなり, 各楕円関数の $z=0$ における留数が 0 となることに注意すると, 同様に $\mathcal{P}_m(k)$ の次元は m 以下となる.

さらに $kp \neq 0$ のとき, $\kappa_k(z) \in \mathcal{P}(k)$ に対して, $\kappa_k^{(\ell)}(z) \in \mathcal{P}(k)$ であって (Remark 6 も参照), $z=0$ における展開 $\kappa_k(z) = \frac{1}{z} + (\text{正則})$ より, $\kappa_k^{(\ell)}(z) = \frac{(-1)^\ell \ell!}{z^{\ell+1}} + (\text{正則})$ となる. よって, $\mathcal{P}_m(k)$ の次元は m となり, 所望の基底が得られる. $kp = 0$ のときも同様である.

□

Remark 6. $\kappa_k(z)$ の微分は次で表される.

$$\kappa'_k(z) = \mu_k(z)\kappa_k(z), \quad \mu_k(z) := a + \zeta(z - kp) - \zeta(z).$$

ここで, $\mu_k(z)$ は楕円関数となることに注意しておく.

一般の $f(z) \in \mathcal{P}(k)$ に対して, $\tilde{f}(z) := f(z)/\kappa_k(z)$ は楕円関数より, ゼロ点と極の位数は等しく, ゼロ点の総和と極の総和は Λ を法として等しい. よって, $f(z)$ のゼロ点と極の位数も等しく, $f(z)$ は $z = 0 \pmod{\Lambda}$ にのみ極をもつため, ゼロ点の総和は Λ を法として kp に等しい.

特に, $f(z) \in \mathcal{P}_9(k)$ が $z = 0$ にちょうど 9 位の極をもつ場合, ゼロ点の位数も 9 であり, ゼロ点を $q_1, \dots, q_9$ とおくと $q_1 + \dots + q_9 = kp$ となる. 実際, $f(z)$ は定数倍を除いて $f(z) = \exp(a \cdot z) \prod_{k=1}^9 \sigma(z - q_k)/\sigma(z)$ となる. よって, 次の補題が示された.

Lemma 7. $f(z) \in \mathcal{P}_9(k)$ のゼロ点が $p_1, \dots, p_9$ となると仮定する.

(1) $kp \neq p \pmod{\Lambda}$ のとき, $f(z) = 0$.

(2) $kp = p \pmod{\Lambda}$ のとき, $f(z)$ は定数倍を除いて $\delta_0(z)$ と一致する.

Proof of Theorem 3. $f_{xk}(z), f_{yk}(z)$ を構成していく. そのため, $f_{xk}(z) \in \mathcal{P}_{3k+2}(k)$, $f_{yk}(z) \in \mathcal{P}_{3k+3}(k)$, つまり, $f_{xk}(z)$ は $z = 0$ で高々 $3k + 2$ 位の極で, $f_{yk}(z)$ は $z = 0$ で高々 $3k + 3$ 位の極であることを帰納法で示す. まず, $g_{01}(z) = f_{y1}(z)/\wp'(z)^2$ と $h_{01}(z) = (\wp(z) \cdot f_{y1}(z) + \wp'(z) \cdot f_{x1}(z))/\wp'(z)^2$ が $z = 0$ で正則であるためには, $f_{y1}(z) \in \mathcal{P}_6(k)$ で $f_{x1}(z) \in \mathcal{P}_5(k)$ となる. また, $k - 1$ まで正しいとする. 表示 (2.2) の $g_{0k}(z)$ が $z = 0$ で正則あるためには,

$$(b1) \quad \frac{f_{yk}(z)}{\wp'(z)^2} \sim \tilde{g}_k(z) := \frac{-1}{\wp'(z)} \sum_{\ell=2}^k \sum_{\substack{m_1+\dots+m_k=\ell \\ 1 \cdot m_1+\dots+k \cdot m_k=k}} \binom{\ell}{m_1, \dots, m_k} \prod_{n=1}^k \left\{ \frac{f_{yn}(z)}{\wp'(z)} \right\}^{m_n}$$

となる必要がある. ただし, $\sim$ は両辺の $z = 0$ における Laurent 展開の主要項が等しいことを表す. 仮定から, 右辺の和の各項は全て $z = 0$ で高々 $3k$ 位の極となるため, $f_{yk}(z) \in \mathcal{P}_{3k+3}(k)$ となる. 同様に, 表示 (2.3) の $h_{0k}(z)$ が $z = 0$ で正則であるためには,

$$(b2) \quad \frac{1}{\wp'(z)} \left(\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} \cdot f_{yk}(z) + f_{xk}(z) \right) \sim \frac{\tilde{h}_{0k}(z)}{\wp'(z)}, \quad \tilde{h}_{jk}(z) := - \sum_{\ell=1}^{k-1} f_{y\ell}(z) \cdot h_{j,k-\ell}(z)$$

となる必要がある. $\tilde{h}_{0k}(z)$ と $f_{yk}(z)$ はそれぞれ $z = 0$ で高々 $3k$ 位と高々 $3k + 3$ 位の極となるため, $f_{xk}(z) \in \mathcal{P}_{3k+2}(k)$ が示された.

次に, 関数 $f_{xk}(z) \in \mathcal{P}_{3k+2}(k)$, $f_{yk}(z) \in \mathcal{P}_{3k+3}(k)$ を帰納的に構成していく. Theorem 3 の条件 (b) をみたすためには, 次の条件をみたすことが必要十分であることに注意しておく.

$$(b1) \quad \frac{f_{yk}(z)}{\wp'(z)^2} \sim \tilde{g}_k(z),$$

$$(b2) \quad \frac{1}{\wp'(z)} \left(\frac{\wp(z)}{\wp'(z)} \cdot f_{yk}(z) + f_{xk}(z) \right) \sim \frac{\tilde{h}_{0k}(z)}{\wp'(z)},$$

$$(b3) \quad \wp'(p_j) \cdot f_{yk}(p_j) + \wp''(p_j) \cdot f_{xk}(p_j) = \wp''(p_j) \cdot \tilde{h}_{jk}(p_j) \quad (j = 1, \dots, 9).$$

条件 (b3) は表示 (2.3) において $h_{jk}(z)$ が $z = p_j$ で正則となるための必要十分条件である. 以下, $p \notin \mathbb{Q} \pmod{\Lambda}$ を仮定する. このとき,

$$f_{xk}(z) = \sum_{\ell=1}^{3k+2} a_{\ell} \cdot \frac{(-1)^{\ell-1} \cdot \kappa_k^{(\ell-1)}(z)}{(\ell-1)!}, \quad f_{yk}(z) = \sum_{\ell=1}^{3k+3} b_{\ell} \cdot \frac{(-1)^{\ell-1} \cdot \kappa_k^{(\ell-1)}(z)}{(\ell-1)!}$$

と表わされる. すると, $f_{xk}(z)$ と $f_{yk}(z)$ の $z = 0$ における Laurent 展開の主要項はそれぞれ, $\sum_{\ell=1}^{3k+2} a_{\ell}/z^{\ell}$ と $\sum_{\ell=1}^{3k+3} b_{\ell}/z^{\ell}$ になる.

$k = 1$ のとき, $\tilde{g}_k(z) = 0$ となるため, 条件 (b1) は自明に成立する. また, $\wp'(z)$ は $z = 0$ で 3 位の極で $\wp(z)/\wp'(z) = -z/2 - g_2 \cdot z^5/20 + \dots$ に注意すると, $\tilde{h}_{0k}(z) = 0$ より, 条件 (b2) は $b_6 = 2a_5$, $b_5 = 2a_4$ と同値である. 残りの条件 (b3) から $\{a_{\ell}\}$ と $\{b_{\ell}\}$ を決定する. $g_2 \neq 0$ のとき,

$$\left\{ \wp'(z) \cdot \sum_{\ell=1}^6 b_{\ell} \cdot \frac{(-1)^{\ell-1} \cdot \kappa_k^{(\ell-1)}(z)}{(\ell-1)!} + \wp''(z) \cdot \sum_{\ell=1}^5 a_{\ell} \cdot \frac{(-1)^{\ell-1} \cdot \kappa_k^{(\ell-1)}(z)}{(\ell-1)!} \mid a_{\ell}, b_{\ell} \in \mathbb{C}, b_6 = 2a_5, b_5 = 2a_4 \right\}$$

は $\mathcal{P}_9(k)$ と一致することに注意すると, Lemma 7 (2) より $\wp'(z) \cdot f_{y1}(z) + \wp''(z) \cdot f_{x1}(z)$ は定数倍を除いて $-\delta_0(z)$ と一致して, 係数 $\{a_{\ell}\}$, $\{b_{\ell}\}$ が決定される.

次に $k \geq 2$ 未満のとき係数が決定されたと仮定する. (b1)–(b3) をみたす係数 $\{a_{\ell}\}$, $\{b_{\ell}\}$ が一意的に存在するために必要十分条件は, $\tilde{g}_k(z) = \tilde{h}_{0k}(z) = \tilde{h}_{jk}(z) = 0$ と仮定したときに $a_{\ell} = 0$ ($\forall \ell$), $b_{\ell} = 0$ ($\forall \ell$) となることである. そこで, $\tilde{g}_k(z) = \tilde{h}_{0k}(z) = \tilde{h}_{jk}(z) = 0$ を仮定する. まず, 条件 (b1) より係数 $b_{3k+3} = \dots = b_7 = 0$ となり, 条件 (b2) より $a_{3k+2} = \dots = a_6 = 0$ かつ $b_6 = 2a_5$, $b_5 = 2a_4$ となる. そこで, $k = 1$ のときと同様に, 残りの条件 (b3) と Lemma 7 (1) から $a_{\ell} = 0$ ($\forall \ell$), $b_{\ell} = 0$ ($\forall \ell$) となる. よって, 与えられた $\tilde{g}_k(z)$, $\tilde{h}_{0k}(z)$, $\tilde{h}_{jk}(z)$ に対して, 係数 $\{a_{\ell}\}$, $\{b_{\ell}\}$ が一意的に決定される. 以上の議論より Theorem 3 が証明された.

Remark 8. 上記の議論は $p \in \mathbb{Q} \pmod{\Lambda}$ についても Lemma 5 で与えた $\kappa_k(z)$ の代わりに $\wp(z)$ を用いることで, 同様の議論が可能となるが, 最後の箇所は, $kp = p \pmod{\Lambda}$ となる場合 Lemma 7 (2) より係数が一意的に存在しなくなり, 障害の可能性がある. 一方, $p \in \mathbb{Q} \pmod{\Lambda}$ をみたす点配置でブローアップした場合, 曲面 S は楕円ファイブレーションの構造をもつことが知られている.

Question 9. $p \notin \mathbb{Q} \pmod{\Lambda}$ に対して, 本構成による形式冪級数展開は収束するか?

Question 10. $p \in \mathbb{Q} \pmod{\Lambda}$ に対して, 本構成と同様の構成方法は存在しないか?

§ 3. K3 曲面

本節では, K3 曲面の定義とその性質について紹介する. K3 曲面については, [2, 4] を参考にした. さらに, 変形理論については, [5, 10] も参考にした.

Definition 11. X をコンパクトで連結な 2 次元複素多様体とする. X が単連結 (つまり, 基本群が自明: $\pi_1(X) = 0$), かつ, X 上に至る所消えない正則 2 次形式 σ (つまり, X の複素局所座標 $(U, (z_1, z_2))$ を用いて $\sigma|_U = f(z)dz_1 \wedge dz_2$ と表したとき, $f(z)$ は U 上の正則関数で $f(z) \neq 0$ ($\forall z \in U$)) が存在するとき, X を **K3 曲面** という. また, 射影空間への埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ が存在するとき, X は射影的であるといい, 射影的でない X は超越的であるという.

K3 曲面 X 上の正則 2 次形式 σ は定数倍を除いて一意的に決まることに注意する. 全ての K3 曲面は 1 つの K3 曲面の変形によって記述されるため, 全ての K3 曲面は可微分多様体として同相となるが, 複素多様体として 20 次元の族によって記述される. また, 全ての K3 曲面は Kähler 曲面となる.

K3 曲面 X のコホモロジー群について考察する. Poincaré 双対性より $H^2(X; \mathbb{Z}) \cong H_2(X; \mathbb{Z})$ と同一視することで, $H^2(X; \mathbb{Z})$ には自然に交差形式 (カップ積) が入る. 具体的には $H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$ で $H^2(X; \mathbb{Z}) (\cong H_2(X; \mathbb{Z}))$ の基底 $(\gamma_1, \dots, \gamma_{22})$ を適当に選ぶことで, マーキング $\phi: H^2(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ が得られる. ここで,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad E_8(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

つまり, 基底 $(\gamma_1, \dots, \gamma_{22})$ に関するベクトル $C, D \in H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$ に対して, 交差形式は

$$C \cdot D = CLD^t$$

で与えられる. 一方, X は単連結のため, $H^0(X; \mathbb{Z}) \cong H^4(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H^\nu(X; \mathbb{Z}) = 0$ ($\nu \neq 0, 2, 4$) となる.

K3 曲面は Kähler 曲面となるため, Hodge 分解

$$H^2(X; \mathbb{C}) = H^2(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

が存在する, ここで, $H^{p,q}(X) \cong H^q(X; \Omega^p)$ で, $H^{1,1}(X) = \overline{H^{1,1}(X)}$, $H^{2,0}(X) = \overline{H^{0,2}(X)}$ である. ただし, Ω^p は X 上の正則 p 次形式の芽の層である. また, $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(X) = 20$, $\dim_{\mathbb{C}} H^{2,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{0,2}(X) = 1$ となる. $H^{2,0}(X)$ と $H^{0,2}(X)$ は X 上の正則 2 次形式 σ を用いて $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\sigma$, $H^{0,2}(X) = \mathbb{C}\bar{\sigma}$ と表される. さらに, $\sigma \cdot \sigma = \int_X \sigma \wedge \sigma = 0$, $\sigma \cdot \bar{\sigma} = \int_X \sigma \wedge \bar{\sigma} = 4 \int_X |\sigma|^2 > 0$ に注意する. よって, $\phi_{\mathbb{C}}(\sigma) \in \{\sigma \in L \otimes \mathbb{C} \mid \sigma \cdot \sigma = 0, \sigma \cdot \bar{\sigma} > 0\}$ となる. ここで, $\phi_{\mathbb{C}} : H^2(X; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} L \otimes \mathbb{C}$ は複素化したマーキングである. 具体的に $H^2(X; \mathbb{Z})$ の基底 $(\gamma_1, \dots, \gamma_{22})$ を用いて,

$$\phi_{\mathbb{C}}(\sigma) = \left(\int_{\gamma_1} \sigma, \dots, \int_{\gamma_{22}} \sigma \right) \in L \otimes \mathbb{C}$$

と表される. 一方, $\text{Pic}(X) := H^{1,1}(X) \cap H^2(X; \mathbb{Z})$ を **Picard 群** といい, $\rho(X) := \text{rank}(\text{Pic}(X))$ を **Picard 数**という. Picard 数は $0 \leq \rho(X) \leq 20$ となるが, X が射影的ならば次が成立する.

Proposition 12. X を K3 曲面とすると, X が射影的であるための必要十分条件は, $L \cdot L > 0$ となる $L \in \text{Pic}(X)$ が存在することである. 特に, X が射影的な K3 曲面ならば, $\rho(X) \geq 1$ である.

コンパクト複素多様体の族とは, 固有で正則な沈め込み $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ のことである, ただし, $\mathcal{X}$ と B は連結な複素多様体である. 各 $b \in B$ に対して, $\mathcal{X}_b := \pi^{-1}(b)$ はコンパクトな複素多様体であり, $0 \in B$ を固定したとき, $\mathcal{X}_0$ と $\mathcal{X}_b$ は可微分同相である. 族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ を $(\mathcal{X}_b) = (\mathcal{X}_b)_{b \in B}$ と表すことがある. 二つの族 $\pi_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow B$ と $\pi_2 : \mathcal{X}_2 \rightarrow B$ が同値であるとは, 双正則写像 $\mathcal{F} : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ が存在して $\pi_1 = \pi_2 \circ \mathcal{F}$ となることである. また, 族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ が $\mathcal{X}_0$ の普遍族であるとは, $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}'_0$ となる任意の族 $\pi' : \mathcal{X}' \rightarrow B'$ に対して, $\pi'' : \mathcal{X}'' := \{(x, b') \in \mathcal{X} \times B' \mid \pi(x) = \pi'(b')\} \rightarrow B'$ と $\pi' : \mathcal{X}' \rightarrow B'$ が同値となる射 $\nu : (B', 0') \rightarrow (B, 0)$ が唯一存在することである.

コンパクト複素多様体の族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ と $b \in B$ に対して, 小平-Spencer 写像 $\text{KS}_b : T_b B \rightarrow H^1(\mathcal{X}_b; \mathcal{T})$ が定義される. ここで, $\mathcal{T}$ は X 上の正則ベクトル場の芽の層である. このとき, 写像 $B \ni b \mapsto \text{rank}(\text{KS}_b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は (一般の $b \in B$ に対して) 定数であることが知られている. この定数 $\text{rank}(\text{KS}_b)$ を $m(\mathcal{X})$ もしくは $m(\mathcal{X}_b)$ と表す.

Definition 13. $m(\mathcal{X}) = m(\mathcal{X}_b)$ をコンパクト複素多様体の族の次元という.

複素多様体の族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ と $0 \in B$ を固定したときに $\mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0)$ が K3 曲面となるとき, $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ を **K3 曲面の族**という. このとき, 各 $b \in B$ に対して $\mathcal{X}_b$ も K3 曲面となる. 以下, B は単連結であると仮定する. このとき, マーキング $\phi : H^2(\mathcal{X}_0; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$

を固定すると, 各 $b \in B$ に対してマーキング $\phi: H^2(\mathcal{X}_b; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$ が自然に誘導される. K3 曲面 $\mathcal{X}_b$ に対して, $\mathcal{X}_b$ 上の正則 2 次形式 σ_b は定数倍を除いて一意に定まるため, 写像

$$\mathcal{P}: B \rightarrow \Omega := \{[\sigma] \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) \mid \sigma \cdot \sigma = 0, \sigma \cdot \bar{\sigma} > 0\}, \quad \mathcal{P}(b) := [\phi_{\mathbb{C}}(\sigma_b)]$$

が定義され, $\mathcal{P}$ は正則写像となる. Ω を周期領域, $\mathcal{P}$ を周期写像という. Ω は $\mathbb{P}^{21}$ 内の 20 次元の部分超曲面となることに注意する. このとき, 次の事実が知られている.

Proposition 14. $\mathcal{X}_0$ を K3 曲面とすると, $\mathcal{X}_0$ の普遍族 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(\mathcal{X}_0)$ が存在する. ここで, $\text{Def}(\mathcal{X}_0)$ は 20 次元の複素多様体であり, $m(\mathcal{X}) = 20$ となる. さらに, $B \subset \text{Def}(\mathcal{X}_0)$ を連結かつ単連結な 0 の近傍とすると, 周期写像 $\mathcal{P}: B \rightarrow \Omega$ は局所同型となる.

小平-Spencer 写像は周期写像の微分を用いて記述される. K3 曲面の族 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$ と周期写像 $\mathcal{P}: B \rightarrow \Omega$ に対して, $\mathcal{P}(0) = [\sigma]$ となる $\mathcal{X}_0$ 上の正則 2 次形式 $\sigma \in H^0(\mathcal{X}_0; \Omega^2)$ を固定しておく. 周期領域 Ω の定義から, $T_{[\sigma]}\Omega \cong \text{Hom}([\sigma], [\sigma]^\perp/[\sigma])$ であることに注意すると, 周期写像 $\mathcal{P}$ の 0 における微分は $D\mathcal{P}_0: T_0B \rightarrow T_{[\sigma]}\Omega \cong \text{Hom}([\sigma], [\sigma]^\perp/[\sigma])$ となる. 一方, $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$ に対して, 小平-Spencer 写像 $\text{KS}_0: T_0B \rightarrow H^1(\mathcal{X}_0; \mathcal{T})$ が定義されるが, Griffiths の公式を用いて, KS_0 と $D\mathcal{P}_0$ との関係式

$$\langle D\mathcal{P}_0(v), \sigma \rangle = \sigma \cup \text{KS}_0(v) \in H^1(\mathcal{X}_0; \Omega^2 \otimes \mathcal{T}) \rightarrow H^1(\mathcal{X}_0; \Omega^1) \cong [\sigma]^\perp/[\sigma], \quad (v \in T_0B)$$

が成り立つ. ただし, $H^1(\mathcal{X}_0; \Omega^2 \otimes \mathcal{T}) \rightarrow H^1(\mathcal{X}_0; \Omega^1)$ は Ω^2 と $\mathcal{T}$ の縮約で, $H^1(\mathcal{X}_0; \Omega^1) \cong [\sigma]^\perp/[\sigma]$ は Hodge 分解による同型である.

K3 曲面の例をいくつかあげる.

Example 15. $X \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな 4 次超曲面とすると, Lefschetz の公式と随伴公式を応用することで, X は射影的な K3 曲面となることが示される. 4 次超曲面からなる族 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$ を考えるとその次元は 19 である. 実際, 4 変数 4 次斉次多項式全体の次元は 35 であるので, $m(\mathcal{X}) = 35 - 1 - \dim \text{Aut}(\mathbb{P}^3) = 19$ となる.

Example 16. $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ を滑らかな 6 次曲線 $D \subset \mathbb{P}^2$ で分岐する 2 重被覆とすると, X は射影的な K3 曲面となる. このような X からなる族 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow B$ を考えるとその次元も 19 である. 実際, 6 次曲線 $D \subset \mathbb{P}^2$ 全体の次元は 27 であるので, $m(\mathcal{X}) = 27 - \dim \text{Aut}(\mathbb{P}^2) = 19$ となる.

上記例は全て射影的な K3 曲面であるが, 射影的とは限らない次の例も古典的に知られている.

Example 17. $A = \mathbb{C}^2/\Lambda$ を 2 次元複素トーラスとし, A への $\mathbb{Z}_2$ 作用を $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ で定義すると, $X_0 := A/\mathbb{Z}_2$ は 16 の特異点 (通常 2 重点) をもつ. X を X_0 の最小特異点解消とすると, X は K3 曲面となる. X を **Kummer 曲面** という. Kummer 曲面 X からなる族の次元は 4 である.

Proposition 14 より, $m(\mathcal{X}) = 20$ となる K3 曲面の族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ が存在するにもかかわらず, 上記のように知られている族の具体例は全て次元は 19 以下となる. そこで次の疑問が生じる.

Question 18. $m(\mathcal{X}) = 20$ となる K3 曲面の族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ の具体的な構成方法は存在しないか?

そもそも各 $\mathcal{X}_b$ が射影的である場合には, 必ず $m(\mathcal{X}) \leq 19$ となってしまうことが知られている. そこで, $m(\mathcal{X}) = 20$ となるためには, 超越的な K3 曲面を含む族 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ を構成する必要がある. 次節では, 超越的な K3 曲面を含む族を構成する.

§ 4. 管状近傍を用いた K3 曲面の構成

本節では, 管状近傍を用いた K3 曲面の構成方法について紹介する ([6] 参照). そのため, $R > 1$ を固定して, 次のデータを準備しておく.

- (1) $\tau \in \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\tau > 0\}$.
- (2) $t = (t_1, t_2) \in \{(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < |t_2| < R\}$.
- (3) $Z^+ = \{p_1^+, p_2^+, \dots, p_9^+\} \subset \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$, $Z^- = \{p_1^-, p_2^-, \dots, p_9^-\} \subset \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$: 9 点集合.

上記データに対して, 次の記号を導入する.

- (a) $C_0^+ = C_0^- := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau) \subset \mathbb{P}^2$: 楕円曲線.
- (b) $g : C_0^+ \ni z \mapsto z + t_1 \in C_0^-$: 同型写像.
- (c) $\pi^+ : S^+ := \text{Bl}_{Z^+}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $\pi^- : S^- := \text{Bl}_{Z^-}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$: Z^+ と Z^- のブローアップ.
- (d) $C^+ := (\pi^+)_*^{-1}C_0^+ \subset S^+$, $C^- := (\pi^-)_*^{-1}C_0^- \subset S^-$: C_0^+ と C_0^- の強変換.

このとき, $N_{C^\pm/S^\pm} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|_{C_0^\pm} \otimes \mathcal{O}_{C_0^\pm}(-p_1^\pm - p_2^\pm - \dots - p_9^\pm)$ で, $C^+ \cdot C^+ = C^- \cdot C^- = 0$ となる. さらに, 次の仮定を設ける.

Assumption 19. $N_{C^+/S^+} = g^*N_{C^-/S^-}^{-1}$ は Diophantine 条件をみたす.

Remark 20. 条件 $N_{C^+/S^+} = g^*N_{C^-/S^-}^{-1}$ から p_9^- が決定される. また, N_{C^+/S^+} が Diophantine 条件をみたすことから, p_9^+ が固定される. ここで, N_{C^+/S^+} が Diophantine 条件をみたす点 p_9^+ の集合は, C_0^+ の中で (Lebesgue 測度に関して) 全測度となることに注意する.

Remark 20 から, さらに次のデータを準備する.

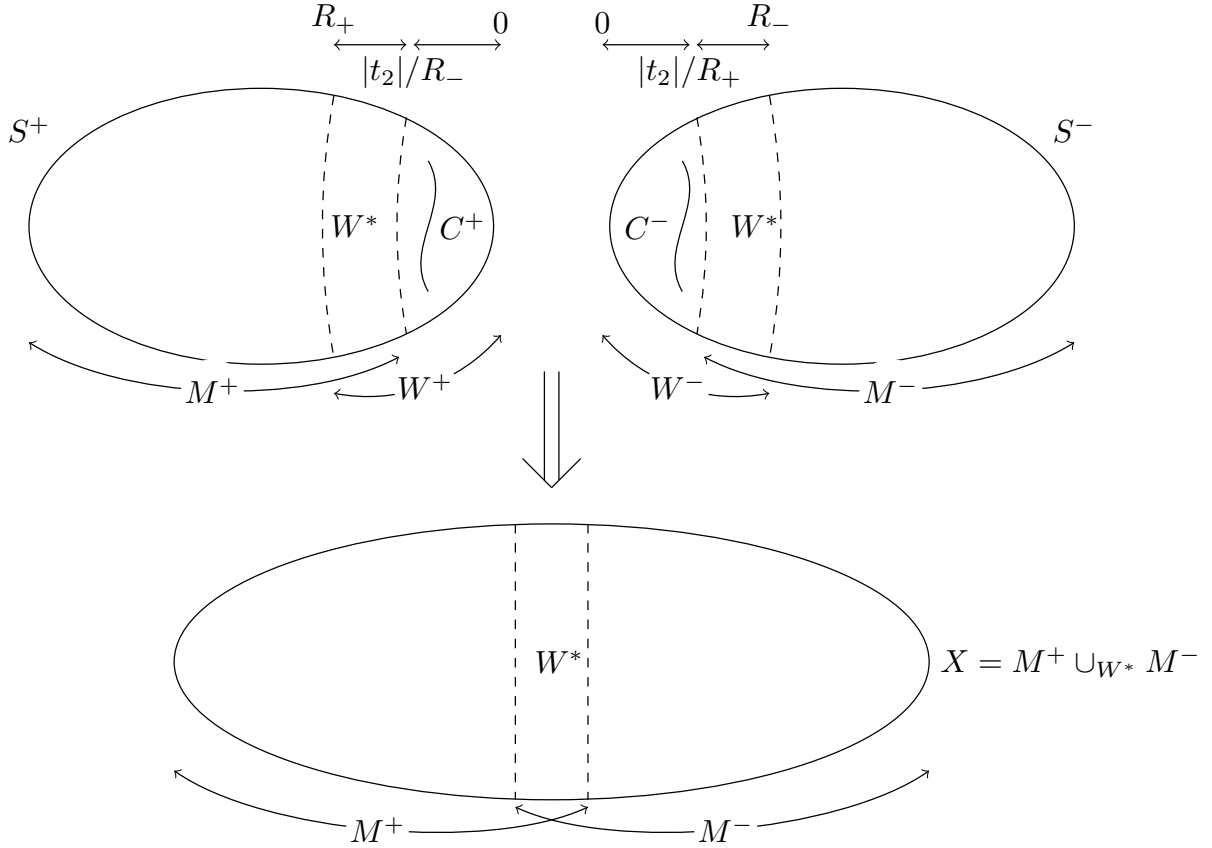


Figure 1. K3 曲面の構成

(3)' $p = (p_1^+, p_2^+, \dots, p_8^+, p_1^-, p_2^-, \dots, p_8^-)$.

Diophantine 条件を仮定すると, N_{C^-/S^-} も Diophantine 条件をみたし, Arnol'd の定理により, C^+ の正則な管状近傍 $W^+ \subset S^+$ 及び C^- の正則な管状近傍 $W^- \subset S^-$ が存在する. すると, $W^\pm$ を適当に縮めることで, 次の性質をみたす $W^\pm$ の局所座標系 $(W_j^\pm, (z_j^\pm, w_j^\pm))$ が存在する (Remark 2 参照):

- (i) $z_j^\pm|_{C^\pm}$ は $W_j^\pm \cap C^\pm$ の局所座標で, $z_j^+|_{W_j^+ \cap C^+} = z_j^- \circ g|_{W_j^+ \cap C^+}$.
- (ii) $W_j^\pm \cap C^\pm = \{w_j^\pm = 0\}$.
- (iii) $\exists A_{jk} \in \mathbb{C}, \exists t_{jk} \in U(1)$ s.t.

$$\begin{cases} z_j^+ = z_k^+ + A_{jk} \\ w_j^+ = t_{jk} \cdot w_k^+ \end{cases} \text{ on } W_j^+ \cap W_k^+, \quad \begin{cases} z_j^- = z_k^- + A_{jk} \\ w_j^- = t_{jk}^{-1} \cdot w_k^- \end{cases} \text{ on } W_j^- \cap W_k^-.$$

この局所座標系を用いて, $\Phi_\pm : W^\pm \ni (z_j^\pm, w_j^\pm) \mapsto |w_j^\pm| \in \mathbb{R}$ は矛盾なく定義される関数となる. さらに適当なスケール変換と $W^\pm$ を縮めることで, $R = R_+ \cdot R_- > 1$ となる

$R_{\pm} > 1$ を用いて, $W^{\pm} = \Phi_{\pm}^{-1}([0, R_{\pm}))$ を仮定しておく. $M^{\pm} := S^{\pm} \setminus \Phi_{\pm}^{-1}([0, |t_2|/R_{\mp}]) \subset S^{\pm}$ とおき, $W^{\pm} \cap M^{\pm} = \Phi_{\pm}^{-1}(|t_2|/R_{\mp}, R_{\pm})$ を $\Phi_{+}^{-1}(|t_2|/R_{-}, R_{+}) \ni (z_j^{+}, w_j^{+}) \mapsto (g(z_j^{+}), t_2/w_j^{+}) \in \Phi_{-}^{-1}(|t_2|/R_{+}, R_{-})$ で同一視し, $W^{*} := W^{+} \cap M^{+} = W^{-} \cap M^{-}$ とおく. 最後に, $X = X_{\tau, t, p}$ を $X := M^{+} \cup_{W^{*}} M^{-}$ で定義する (図 1 参照).

Proposition 21. $X = X_{\tau, t, p}$ は K3 曲面である.

Remark 22. W^{*} への制限が次で表される X 上の至る所消えない正則 2 次形式 σ が存在する.

$$\sigma|_{W^{*} \cap W_j^{+}} = \frac{dz_j^{+} \wedge dw_j^{+}}{w_j^{+}}.$$

$(X_{\tau, t, p})$ には 19 次元のパラメータを含んでいるが, 次の定理が成り立つ.

Theorem 23. K3 曲面の族 $(X_{\tau, t, p})$ の次元は 19 である. さらに, 一般のパラメータ (τ, t, p) に対して, $\rho(X_{\tau, t, p}) = 0$ となり, 特に $X_{\tau, t, p}$ が超越的な K3 曲面となる.

本構成による K3 曲面 $X = X_{\tau, t, p}$ に対して, コホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z}) \cong H_2(X; \mathbb{Z})$ は,

$$H^2(X; \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}A_{\alpha, \beta} \oplus \mathbb{Z}B_{\gamma}) \oplus (\mathbb{Z}A_{\beta, \gamma} \oplus \mathbb{Z}B_{\alpha}) \oplus (\mathbb{Z}A_{\gamma, \alpha} \oplus \mathbb{Z}B_{\beta}) \oplus (\oplus_{\nu=1}^8 \mathbb{Z}C_{\nu}^{+}) \oplus (\oplus_{\nu=1}^8 \mathbb{Z}C_{\nu}^{-})$$

で与えられる. 生成元 (サイクル) の定義については [6] を参照せよ. ここで,

$$\begin{cases} (\mathbb{Z}A_{\alpha, \beta} \oplus \mathbb{Z}B_{\gamma}) \cong (\mathbb{Z}A_{\beta, \gamma} \oplus \mathbb{Z}B_{\alpha}) \cong (\mathbb{Z}A_{\gamma, \alpha} \oplus \mathbb{Z}B_{\beta}) \cong U \\ (\oplus_{\nu=1}^8 \mathbb{Z}C_{\nu}^{+}) \cong (\oplus_{\nu=1}^8 \mathbb{Z}C_{\nu}^{-}) \cong E_8(-1) \end{cases}$$

と対応している. 上記サイクルと Remark 22 における正則 2 次形式 σ の表示を用いると, 周期写像, もしくは, その微分である小平-Spencer 写像が計算され, 小平-Spencer 写像に含まれる有効なパラメータ数を求めることで Theorem 23 が示される. 詳しくは, [6] を参照せよ.

本構成方法では, Diophantine 条件を仮定して K3 曲面を構成した. Remark 20 より, Diophantine 条件から p_9^{+} が決定されるが, Diophantine 条件をみたす点 p_9^{+} の集合は, C_0^{+} の中で全測度となる. さらに, Diophantine 条件を仮定せずに K3 曲面が構成されれば, 20 次元の K3 曲面族の具体例が存在することになる.

Question 24. $N_{C/S}$ が Diophantine 条件をみたさないときにも, K3 曲面族は構成可能か?

References

- [1] V. I. Arnol'd, *Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves*, Funkcional Anal. i Prilozen. **10** (1976) no. 4, 1–12 (English translation : Functional Anal. Appl. **10** (1977) no. 4, 249–257).
- [2] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 2004.
- [3] D. Husemöller, *Elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics 111, Springer, 1987.
- [4] D. Huybrechts, *Lectures on K3 surfaces*, Cambridge University Press, 2016.
- [5] K. Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1985.
- [6] T. Koike and T. Uehara, *A gluing construction of K3 surfaces*, arXiv:1903.01444.
- [7] H. McKean and V. Moll, *Elliptic curves*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [8] D. Mumford, *Tata lectures on theta. I,II,III*, Progress in Mathematics 28, 43, 97, Birkhäuser, 1983, 1984, 1991.
- [9] T. Ueda, *On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle*, J. Math. Kyoto Univ. **22** (1983), 583–607.
- [10] T. E. Venkata Balaji, *An introduction to families, deformations and moduli*, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2010.