

3次元多様体の同相写像の位相的エントロピーについて

阪大 理 山 林 毅 (Tsuyoshi Kobayashi)

§1. Introduction.

Thurston は [T1] で双曲的なコンパクト連結曲面上の任意の自己同相写像 f は、次のいずれかをみたす写像 φ に isotopic なことを示した ([F-L-P], [H-T], [M] も参照のこと)

(i) φ : periodic,

(ii) φ : pseudo-Anosov,

(iii) φ は reducible でその各 φ -component は (i) または (ii).

この φ を f の Thurston の標準型 と呼ぶことにする。

ここでは、geometric な 3-manifold 上の自己同相写像に対して上のような標準型を見出すことを考える (geometric な 3-mfd. については [Sc] 参照)。例えば hyperbolic 3-mfd. 上の任意の自己同相写像は periodic なものに homotopic である ([Mo])。また Sol. 3-mfd. のうち Anosov 型の torus bundle になつてゐるものも同様の性質をもつことが最近知られた ([Sa])。

いま M を $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL}_2 \mathbb{R}$ または Nil 3-mfd. とする。この

とき次が成立する。

定理 2. f を M 上の自己同相写像とする。 f は次のいずれかをもみたす同相写像 φ に *homotopic* である。

- (i) φ : *periodic* 型,
- (ii) φ : *pseudo-Anosov* 型,
- (iii) M 内の *essential torus* の *system* $\mathcal{T}$ が存在し φ は $\mathcal{T}$ により *reducible*。 また $\mathcal{T}$ の φ -invariant regular nbhd. $\eta(\mathcal{T})$ が存在して $M - \text{Int } \eta(\mathcal{T})$ の各 φ -component は (i) または (ii) をみたす。 $\mathcal{T}$ の各 component T_j に対し $\eta(T_j)$ を η 自身に写す最小の正整数 m_j が定まる。 このとき $\varphi^{m_j}|_{\eta(T_j)}$ は *twist homeo.* である。

さて、距離空間上の自己写像 φ に対しては 位相的エントロピー と呼ばれる不変量 $h(\varphi)$ (≥ 0) が定義される ([Bo.]).

$h(\varphi)$ は、力学系的には、写像 φ の “乱雑さ” を表していると考えられる。 ところで最初に述べた Thurston の標準型 φ は、

$h(\varphi) \leq h(f)$ をみたすこと、即ち φ はその *isotopy class* の中での最小エントロピーを実現しており、特に $h(\varphi) > 0$ となるためには、

φ が *pseudo-Anosov* の成分を含むことが必要十分であることが知られている。 以上のことから Thurston の標準型は力学系的

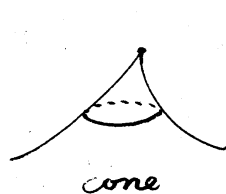
に重要な役割を果たしていることがわかる ([H], [K], [Smi]).

§4 では定理 2 によって得られた $\mathcal{O}$ が同様の性質をみたしていることを見る。

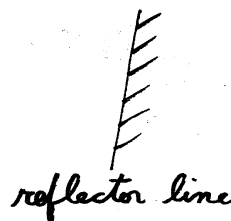
§2. Homeomorphisms of 2-dim. orbifolds.

ここでは 2-dim. orbifold 上の同相写像の標準型を与える (定理 1). orbifold の定義については [Sc], [T2] を参照のこと。

2-dim. orbifold 上の singular points は cone, reflector line, 又は corner reflector のいずれかであるが以下では cone type の singularity のみをもつ 2-dim. orbifold を考えることにする。



cone



reflector line



corner reflector

O (O' resp.) を cone singularity $x_1, \dots, x_m$ ($m \geq 0$) ($x'_1, \dots, x'_{m'}$ ($m' \geq 0$) resp.) をもつ 2-dim. orbifold とする。ここで x_i (x'_i resp.) 上の cone angle を $2\pi/p_i$ ($2\pi/p'_i$ resp.) とする。

定義 写像 $f: O \rightarrow O'$ が O -homeomorphism であるとは次の条件をみたすこととする。

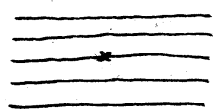
(i) f は位相的に同相写像,

(ii) f により O の singular points と O' の singular points は

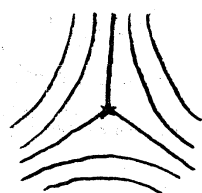
1 対 1 に 対応 する。 特 に $f(x_i) = x_j$ と する と $p_i = p_j$.

定義 $f, f': O \rightarrow O'$ を O -homeomorphisms と する。 f と f' が O -isotopic と ある と は、 f と f' の 間 の 位 相 的 な homotopy F_t ($0 \leq t \leq 1$) で、 各 F_t が O -homeomorphism に な っ て い る よ う な も の が 存 在 する こと と する。

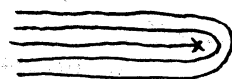
O 上 の measured foliation $(\mathcal{F}, \mu)$ と は、 O 上 の singular foliation $\mathcal{F}$ と、 $\mathcal{F}$ の leaf に 横 断 的 な measure μ の 組 と する。 $\mathcal{F}$ は 有 限 個 の singularity $a_1, \dots, a_k$ を 持 つ こと が でき る が、 a_i が O の regular point な る ば a_i 下 の singularity は 3 以 上 の prong を も つ saddle, a_i が O の singular point な る ば、 a_i は 1-pronged saddle も 許 す と する ($(\mathcal{F}, [\Gamma])$).



regular point



3-pronged saddle



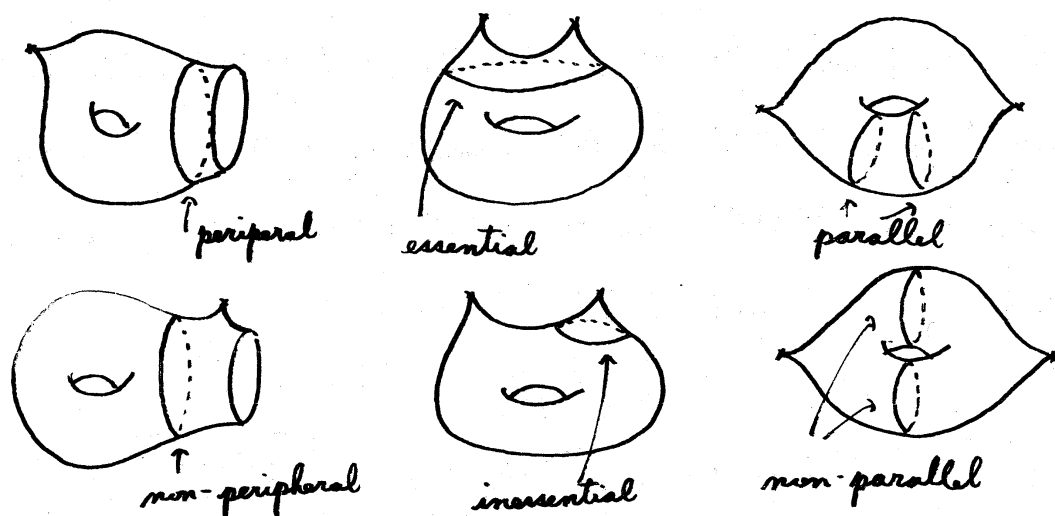
1-pronged saddle

定義 O 上 の self- O -homeo. f が pseudo-Anosov と ある と は O 上 の 互 い に 横 断 的 な measured foliation の 組 $(\mathcal{F}^s, \mu^s), (\mathcal{F}^u, \mu^u)$ と 実 数 $\lambda > 1$ が 存 在 し て、 次 を み た す こと と する;

- (i) f は、 foliations $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ を 保 存 する、

$$(iii) \quad f^*(\mu^A) = \frac{1}{2} \cdot \mu^A, \quad f^*(\mu^U) = \lambda \cdot \mu^U.$$

$a_1, a_2 (\subset O)$ を O 上の simple loops で singular points を含まないものとする。 a_1 が peripheral とは O のある成分 h で $a_1 \cup h$ が singular point を含まない annulus を bound するようなものが存在することとする。 a_1 が essential とは a_1 は non-peripheral で、高々 1 個の singular point を含む disk を bound しないこととする。 a_1 と a_2 が parallel とは $a_1 \cup a_2$ が singular point を含まない annulus を bound することとする。



定義 O 上の self- O -homeo. f が Γ によって reducible とは Γ は互いに交わりなく、 O 上の mutually non-parallel, essential, non-peripheral な simple loop の system で、 $f(\Gamma) = \Gamma$ となることとする。

このとき

定理1. f を O 上の self- O -homeo. とする。このとき f は次のいずれかをみたす φ に O -isotopic:

(i) φ : periodic,

(ii) φ : pseudo-Amosov,

(iii) φ は Γ によつて reducible. また Γ の φ -invariant regular nbhd. $\eta(\Gamma)$ が存在して $M\text{-Int } \eta(\Gamma)$ の各 φ -component は (i) また (ii) をみたす。 Γ の各 component Γ_j に対して $\eta(\Gamma_j)$ を φ の自身に写す φ の iteration の最小回数 m_j が定まる。このとき $\varphi^{m_j}|_{\eta(\Gamma_j)}$ は twist homeo. である。

証明. O が singular points を含まないとする。いま $\chi(O) < 0$ とすると定理1は Thurston の定理 ([T1]) と一致する。 $\chi(O) = 0$ とする。 O が Annulus または Möbius band とすると f は periodic homeo. に isotopic。 O が Klein bottle のとき, [L1] より f は periodic homeo. に isotopic。 O が torus のとき $f_*: \pi_1(O) \rightarrow \pi_1(O)$ を表す行列 $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ を一つとりその固有値を λ_1, λ_2 とする。このとき $\lambda_1 = \pm 1 = \lambda_2$, λ_1, λ_2 : 虚数, また λ_1, λ_2 : 相異なる実無理数, に従つて f は reducible, periodic, または (pseudo) Amosov homeo. に isotopic になる ([F-L-P] Exposé 1). $\chi(O) > 0$ とする。このとき [Sma] より

f は *periodic homeo.* に isotopic.

O は singular points $x_1, \dots, x_m$ ($m \geq 1$) を含むとする。 $S \in O - \cup x_i$ の各 non-compact end に circle をつけ加えて得る M の surface とする。 f を適当に $\text{rel}(\cup x_i)$ homotopy で動かすことにより $f|_{O - \cup x_i}$ は $\bar{f}: S \rightarrow S$ に拡張するとしてよい。 $\chi(S) \geq 0$ とするとより $\bar{f}$ は *periodic map* $\bar{P}$ に isotopic。 $P: O \rightarrow O$ を $\bar{P}$ の projection とすると P は f に O -isotopic τ *periodic*。 $\chi(S) < 0$ とすると $[T_1]$ より $\bar{f}$ の Thurston の標準型 $\bar{P}$ が定まる。 $P: O \rightarrow O$ を $\bar{P}$ の projection とすると $\bar{P}$; *periodic, pseudo-Anosov, or reducible* に応じて P は定理 1 の結論 (i), (ii), or (iii) をみたすことがわかる。

33. Homeomorphisms of $M \in \mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}, \widetilde{SL_2 \mathbb{R}},$ or Nil .

M を $\mathbb{H}^3 \times \mathbb{R}, \widetilde{SL_2 \mathbb{R}},$ or Nil 3-mfd. とし f を M 上の self-homeo. とする。 [Sc] より M は good 2-dim. orbifold O 上の Seifert fibration $p: M \rightarrow O$ を許容する。 また f を homotopy τ 動かすことにより fiber preserving にできる。 従って f から次をみたす O -homeo. $\psi: O \rightarrow O$ が定まる:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \uparrow \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \uparrow \\ O & \xrightarrow{\psi} & O \end{array}$$

ψ が *pseudo-Anosov* のとき f を *pseudo-Anosov 型* と呼ぶ。
(*periodic* resp.) (*periodic 型* resp.)

f が $\mathcal{F}$ によって reducible とは $\mathcal{F}$ が M 内の mutually non-parallel, non-peripheral な, regular fiber の和となっているような incompressible torus の system で, $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ をみたすこととする。

このとき定理 2 は定理 1 より直ちに従う。

以下では periodic 型の homeo., pseudo-Anosov 型の homeo. の性質を見てゆく。

$f: M \rightarrow M$ を periodic 型の homeo. とし, G を $f_*: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)$ から生成される $\text{Out}(\pi_1(M))$ の部分群とする。また $\psi: \text{Out}(\pi_1(M)) \rightarrow \text{Out}(\pi_1^{\text{orb}}(0))$ を canonical homo. とする。このとき次の完全系列が得られる; $1 \longrightarrow \text{Ker } \psi \longrightarrow G \longrightarrow \psi(G) \longrightarrow 1$.

$\psi(G) (< \text{Out}(\pi_1^{\text{orb}}(0)))$ は finite cyclic group. また $[K_0]$ より 0 が non-orientable のとき $\text{Ker } \psi$ は有限群。従って 0 が non-orientable のとき G は有限群。これと [5] より次が得られる。

Proposition 3.1. 0 が non-orientable で $f: M \rightarrow M$ は periodic 型 homeo. とすると f は periodic homeo. に homotopic である。

Remark: 0 が orientable のときは Prop. 3.1 の命題は成立しない。

periodic 型 homeo. の定義より次は直ちに従う。

Proposition 3.2 $f: M \rightarrow M$ を periodic 型 homeo. に homotopic な homeo. とする。このとき或る正整数 m が存在して、 M 内の任意の incompressible torus T に対して $f^m(T)$ は T に isotopic になる。

pseudo-Anosov 型の homeo. に対しては Prop. 3.2 とは対照的に次が成立する。

Proposition 3.3 $f: M \rightarrow M$ を pseudo-Anosov 型 homeo. に homotopic な homeo. とし T を M 内の incompressible torus とする。このとき任意の整数 $m (\neq 0)$ に対して $f^m(T)$ は T に homotopic でない。

証明. M 内の或る incompressible torus T と或る正整数 m が存在して $f^m(T)$ は T に homotopic とする。 f は fiber preserving, また T は regular fiber の和になつてゐるとしてよい ([JJ])。一般の位置の議論により $T, f(T), \dots, f^{m-1}(T)$ は互いに横断的と仮定できる。 $T \cap f(T) \cap \dots \cap f^{m-1}(T)$ の component のうち isotopy はずせるものは全て除いてしまふ。そうして $T \cup f(T) \cup \dots \cup f^{m-1}(T)$ から得られる 2-complex を P とし N を P の regular nbhd. とする。 M は irreducible だから ∂N の component のうち compressible なもの

は, *solid torus* を *bound* することがわかる。 ∂N の各 *compressible component* に この *solid torus* を付け加えて得られる M の *submfld.* を N' とすると N' は次の性質をもつ; $\partial N'$ は *incompressible tori*。 $f(N')$ は N' に *properly homotopic*。いまこのような性質をもつ M の *submfld.* のうち包含関係に関して極大なものを $\bar{N}$ とする。このとき $i: \bar{N} \rightarrow M$ が *homotopy eq.* とすると f は *periodic type homeo.* に *homotopic*, *homotopy eq.* 下な) とすると f は *reducible homeo.* に *homotopic* となり矛盾。

§4. Topological entropy.

ここでは定理2で得られた φ が その *homotopy class* の中で 最小エントロピーを実現していることを見る。

次の2つの定理は Bowen [B.] による。

定理A X を *metric space*, f を X 上の一様連続写像とする。
このとき任意の正整数 m に対して $h(f^m) = m \cdot h(f)$

定理B X, Y を *compact metric spaces*, $p: X \rightarrow Y, f: X \rightarrow X, g: Y \rightarrow Y$ を次をみたす連続写像とする。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ p \downarrow & \curvearrowright & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

このとき $h(g) \leq h(f) \leq h(g) +$

$$\sup \{ h(f|_{p^{-1}(\gamma)}) : \gamma \in Y \}$$

Lemma 4.1. N を surface F 上の circle bundle, $g: N \rightarrow N$ を fiber preserving homeo. $\psi: F \rightarrow F$ を g による induce される homeo. とすると $h(g) = h(\psi)$.

証明は C を N の fiber とすると $h(g|_C) = 0$ となる事実と定理 B より直ちに従う。

以下 M を $H^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{SL}_2 \mathbb{R}$, $\sim Nil$ 3-mf. とする。

Proposition 4.2. $f: M \rightarrow M$ を periodic 型の homeo. とすると $h(f) = 0$.

証明 $[S_1], [T_2]$ より M の finite cover $p: \bar{M} \rightarrow M$ 上 M の Seifert bundle structure が $\bar{M}$ の circle bundle structure に lift するものが存在する。このとき、或る $m > 0$ が存在して f^m は $g: \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ に lift するようにできる。 S を $\bar{M}$ の base space (surface) とし $\bar{\psi}: S \rightarrow S$ を g による誘導される homeo. とする。 $\bar{\psi}$ は periodic になることに注意すると:

$$\begin{aligned} h(f) &= \frac{1}{m} h(f^m) \quad (\text{定理 A}) \\ &= \frac{1}{m} h(g) \quad ([F-L-P] \text{ Exposé 10}) \\ &= \frac{1}{m} h(\bar{\psi}) \quad (\text{Lemma 4.1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Proposition 4.3. $f: M \rightarrow M$ を pseudo-Anosov 型の homeo. とする
と $h(f) > 0$. 特に f はその homotopy class の 中での最小エント
ロピーを実現している。

証明. $\bar{M}, \varsigma, \eta, \bar{\psi}$ を Proposition 4.2 の証明と同様にとる。
 0 を M の base orbifold, $\psi: 0 \rightarrow 0$ を f による定まる pseudo-Anosov
homeo. とする。また $\lambda (> 1)$ を ψ による定まる定数とする。

Proposition 4.2 の証明より $h(f) = \frac{1}{m} h(\bar{\psi})$ 。また [F-L-P]
Exposé 10 より $h(\bar{\psi}) = m \cdot \log \lambda > 0$ 。従って $h(f) = \log \lambda > 0$ 。

いま [F-L-P] Exposé 10 下の議論より M 内の essential loop
 ℓ で $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log L(f^n(\ell)) = \lambda$ をみたすものが存在することが
わかる, ここで $L(\ell)$ は ℓ に homotopic な loop の長さの infimum を
表す。これより f' を f に homotopic な homeo. とすると $h(f') \geq$
 $\log \lambda$ ([F-L-P] Exposé 10), 即ち f はその homotopy class の 中で最小
エントロピーを実現している。

Proposition 4.2, 4.3 および $T^2 \times [0, 1]$ 上の twist homeo. の
entropy が 0 になるという事実から定理 2 で得られた φ がその
homotopy class の中で最小エントロピーを実現していることが
わかる。

References

- [B-F] Blanchard, P., Franks, J.: The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces: Invent. Math. 62, 333-339 (1980)
- [Bo] Bowen, R.: Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 153, 337-342 (1976)
- [F-L-P] Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V.: Travaux de Thurston sur les surfaces, Astérisque 66-67 (1979)
- [H] Handel, M.: The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces, Topology 21, 291-296 (1982)
- [H-T] Handel, M., Thurston, W.: New proofs of some results of Nielsen, preprint
- [J] Jaco, W.: Lectures on three manifold topology, CBMS Regional conference series in Math. No. 43 (1980)
- [K] Kobayashi, T.: Links of homeomorphisms of a disk and topological entropy, preprint
- [Ko] Kojima, S.: Bounding finite group actions on 3-manifolds, preliminary report
- [Li] Lickorish, W.B.R.: Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, Proc. Camb. Philos. Soc. 59, 307-317 (1963)
- [M] Miller, R.: Geodesic laminations from Nielsen's viewpoint, Advances in Math. 45, 189-212 (1982)
- [Mo] Mostow, G.: Strong rigidity of locally symmetric spaces, Ann. Math. Studies 78, Princeton Univ. Press, 1973

[Sa] Sakuma, M.: private communication

[Sc] Scott, P.: The geometries of 3-manifolds, Bull.
London Math. Soc. 15, 401-487 (1983)

[Sma] Smale, S.: Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc.
A.M.S. 10, 621-626 (1959)

[Smi] Smillie, J.: Periodic points of surface
homeomorphisms with zero entropy, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 3,
315-334 (1983)

[T₁] Thurston, W.: On the geometry and dynamics of
diffeomorphisms of surfaces I, preprint

[T₂] Thurston, W.: The geometry and topology of
3-manifolds, Lecture note, Princeton University 1978

[Zi] Zimmermann, B.: Periodische Homöomorphismen
Seifertscher Faserräume, Math. Z. 166, 289-297 (1979)