

極大過剰決定系と概均値ベクトル空間の b -函数

名大理 相原正樹

序

極大過剰決定系の構造は、それを micro-local に、即ち cotangent bundle T^*X において考察する時、始めて、よく把握することができる。

例えば、極大過剰決定系は、その support Λ の generic point においては、order (or monodromy, or principal symbol) のみによって決定されてしまう。しかも、 Λ の codim 2 の集合を除いた部分の構造によって、global な構造が決定されてしまう (codim 2 の set は homotopy 論の立場からは negligible な事との類似)。

従って、その support が可約で、その既約成分たちが codim 1 で交わる時の構造を決定することは非常に重要である。

実際、以下に示す様に、 Λ_0, Λ_1 という 2 つの Lagrangian or codim 1 の subset で交る

時の構造と研究の事から、根平均値へ
外れ空間の χ^2 -function と是(真的)
に計算する式と導き出す事と得る。

以下のノートは、 χ^2 シンポジウムの話と、精
しく別の機会に 話した時に、木村達雄君
がまとめてくれたもので、同君への謝意ととも
に、 χ^2 講究録に載せる。

★ 方程式の principal symbol

 $T^*X \supset \Lambda$ Lagrangean $\mathcal{P} \supset \mathcal{I}$ coherent ideal s.t. $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}_\Lambda$ 但し $\mathcal{I}$ は $\mathcal{I}$ の symbol ideal $\mathcal{I}_\Lambda = \{ \Lambda \text{ 上で } 0 \text{ になる関数全体 } \} = (\Lambda \text{ の定義 ideal })$ すなわち $\pi = \mathcal{P}/\mathcal{I}$ は Λ に support をもつ

単一の極大過剰決定系 (simple な MOS) とする.

 u ; $\mathcal{P}/\mathcal{I}$ の generator ($= 1 \bmod \mathcal{I}$) とすると $\mathcal{I}u = 0$ である. u に対して, u の Λ における principal symbol $\sigma_\Lambda(u) \in \sqrt{\Omega_\Lambda^n}$ を定義しよう. それは

定数倍を除いて unique である.

 $\sigma_\Lambda(u)$ は 次の微分方程式の solution として

定数倍を除いて unique に定まる.

$$(1) \quad \boxed{\widetilde{L_P} \Lambda = 0 \quad (\forall P \in \mathcal{I})}$$

以下 この方程式 について説明する.

$P(x, D) = \sum_{j \leq m} P_j(x, D) \in \mathcal{P}$ とする. 但し

$P_j(x, \xi)$ は ξ について j 次齊次 とする.

この $P(x, D)$ に対し

$$L_P(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} H_{P_m(x, \xi)} + \left(P_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 P_m(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi_i} \right)$$

とおくと L_P は Λ 上の 1 階の differential operator と考えることができる.

$L_P = \psi + \varphi$, ψ は vector field, φ は scalar field と表わすとき, L_P は 次のようにして $\sqrt{\Omega_\Lambda^n}$ に作用する. (Ω_Λ^n は Λ 上の volume elements の空間)

$$\begin{aligned} \widetilde{L_P} = \widetilde{\psi + \varphi} : \sqrt{\Omega_\Lambda^n} &\longrightarrow \sqrt{\Omega_\Lambda^n} \\ \psi &\longmapsto \frac{1}{2\Delta} L_\psi(\Delta^2) + \varphi \Delta \end{aligned}$$

但し L_ψ は ψ 方向の Lie 微分, $\frac{1}{2\Delta} L_\psi(\Delta^2)$ は $\otimes \Delta$ で $\frac{1}{2} L_\psi(\Delta^2) \in \Omega_\Lambda^n$ になる $\sqrt{\Omega_\Lambda^n}$ の元 という意味.

Ω_Λ^n の section ω を 1 つ fix すると

$$\sqrt{\Omega_\Lambda^n} \ni \Delta \longmapsto \Delta^2 = \omega \in \Omega_\Lambda^n \quad \text{となる } \sqrt{\Omega_\Lambda^n} \text{ の}$$

section が 2 つあるが, どちらか一方を fix し $\sqrt{\omega}$ と記す.

そのとき $\sqrt{\Omega_\lambda^n}$ の section は $f\sqrt{\omega}$ (f は関数) の形にかける。

$\Delta = f\sqrt{\omega}$ に対し $\widetilde{u+\varphi}$ の作用がどうなるかを調べてみよう。

$\Delta = f\sqrt{\omega}$ に対し, $\frac{1}{2\Delta} L_u(\Delta^2) + \varphi\Delta$ を計算すればよい。

$$L_u(f^2\omega) = 2f u(f)\omega + f^2 L_u(\omega) \quad \text{ゆえ}$$

$$(2) \quad \boxed{f\sqrt{\omega} \xrightarrow{\widetilde{u+\varphi}} \left(u(f) + \frac{f}{2} \cdot \frac{L_u(\omega)}{\omega} + \varphi f \right) \sqrt{\omega}}$$

一般に p 次 covariant tensor field $t = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n t_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_p}$

の $X = \sum_{\ell=1}^n a_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell}$ 方向の Lie 微分 ($L_X t$) は

$$L_X t = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^n \left\{ a_\ell \frac{\partial t_{i_1 \dots i_p}}{\partial x_\ell} + \sum_{k=1}^p \frac{\partial a_\ell}{\partial x_{i_k}} t_{i_1 \dots \underset{i_k}{\ell} \dots i_p} \right\} \right) dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_p}$$

特に

$$\boxed{L_{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}} dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n}$$

$$\text{特に } L_{\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)} dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n = dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n$$

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n = 0$$

$$L_{a(x) \frac{\partial}{\partial x_i}} dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n = \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} \cdot dx_1 \otimes \dots \otimes dx_n$$

$$L_u(\varphi\Delta) = u(\varphi)\Delta + \varphi L_u(\Delta)$$

etc.

Theorem 1. $\widetilde{L_P} \Lambda = 0$ ($P \in \mathcal{F}$) の solution は local に
は存在して定数倍を除いて unique. (analytic solution)

Proof)

まず T^*X 上の関数 f が Λ 上で 0 ($f|_\Lambda = 0$) なる
は H_f は Λ 上の vector field とみなせることを示そう.

$f|_\Lambda = 0$ ゆえ df を $T^*\Lambda$ の元とみなすと 0, よって
 $df \in T_\Lambda^*(T^*X)$ と考えられる.

他方 $T^*(T^*X)$ と $T(T^*X)$ は $d\omega$ (ω は canonical
1-form) により, $df \longleftrightarrow H_f$ (Hamilton field) に
よって同一視される. よって $df \in T_\Lambda^*(T^*X)$ はこの
対応により $H_f \in (T\Lambda)^\perp$ と考えられるが Λ は
Lagrangian $\phi \in (T\Lambda)^\perp = T\Lambda$. よって $H_f \in T\Lambda$ と
考えられる. 図で示せば

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & T\Lambda & \longrightarrow & T(T^*X) & \longrightarrow & T_\Lambda(T^*X) \\
 & & & & \uparrow \scriptstyle d\omega & \begin{array}{c} \nearrow \scriptstyle H_f \\ \searrow \scriptstyle df \end{array} & \\
 0 & \longleftarrow & T^*\Lambda & \longleftarrow & T^*(T^*X) & \longleftarrow & T_\Lambda^*(T^*X) \\
 & & & & \downarrow \scriptstyle df & & \\
 & & & & T_\Lambda^*(T^*X) & \xleftarrow{\scriptstyle d\omega} & (T\Lambda)^\perp \\
 & & & & \downarrow \scriptstyle df & & \downarrow \scriptstyle H_f \\
 & & & & df & \longleftrightarrow & H_f
 \end{array}$$

さて 仮定より $\overline{f} = J\Lambda$ ゆえ

$P_1, \dots, P_n \in f$ s.t. $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_n)$ が $J\Lambda$ の base
(すなわち $P_1, \dots, P_n$ は f の involutory base)

なるものがとれる。

そのとき $\sigma(P_i)|_\Lambda = 0$ ゆえ $H_{\sigma(P_i)}$ は $T\Lambda$ の元
とみなせるが, $d\sigma(P_1), \dots, d\sigma(P_n)$ が $T\Lambda^*(T^*X)$ の base
ゆえ $H_{\sigma(P_1)}, \dots, H_{\sigma(P_n)}$ は $(T\Lambda)^\perp = T\Lambda$ の base である。

さて $\lambda = \pm\sqrt{\omega} \in \sqrt{\Omega_\Lambda^n}$ に対して

$$\widetilde{L}_{P_j} \lambda = (v_j(\mp) + \frac{\mp}{2} \cdot \frac{L_{v_j}(\omega)}{\omega} + \varphi_j \mp) \sqrt{\omega} = 0$$



$$(v_j + \frac{1}{2} \frac{L_{v_j}(\omega)}{\omega} + \varphi_j) \mp = 0 \quad (L_{P_j} = v_j + \varphi_j)$$

但し $P_j(x, D) = \sum_{k \leq m_j} P_j^{(k)}(x, D)$ とおくと

$$v_j = H_{\sigma(P_j)} = H_{P_j^{(m_j)}(x, \xi)}, \quad \varphi_j = P_j^{(m_j-1)}(x, \xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j^{(m_j)}(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi_i}$$

$$\begin{aligned} \text{今 } G_j &= H_{\sigma(P_j)} + \frac{1}{2} \frac{L_{H_{\sigma(P_j)}}(\omega)}{\omega} + P_j^{(m_j-1)}(x, \xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_j^{(m_j)}(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi_i} \\ &= v_j + \psi_j \quad \text{とおけば} \end{aligned}$$

(1) は $G_j \mp = 0 \quad (j=1, \dots, n)$ と同値になる。

次に $[G_{\bar{j}}, G_{\bar{k}}] = \sum a_{\bar{j}k\ell} G_{\bar{\ell}}$ を示そう. それには
 $[\widetilde{L}_{P_{\bar{j}}}, \widetilde{L}_{P_{\bar{k}}}] \# \sqrt{\omega} = ([G_{\bar{j}}, G_{\bar{k}}] \#) \sqrt{\omega}$ ゆえ
 $[\widetilde{L}_{P_{\bar{j}}}, \widetilde{L}_{P_{\bar{k}}}] = \sum a_{\bar{j}k\ell} \widetilde{L}_{P_{\bar{\ell}}}$ を示せばよい.

lemma 1. $P = v + \varphi, P' = v' + \varphi'$ (v, v' vector field,
 φ, φ' scalar field) $\Rightarrow \widetilde{[P, P']} = [\widetilde{P}, \widetilde{P}]$

lemma 2. $[L_P, L_Q] = L_{[P, Q]}$

lemma 3. $\widetilde{L}_{AP} = \sigma(A) \widetilde{L}_P$ $\sigma(A)$ は ΨDO . A の
 principal symbol

これらの lemma を認めれば

$$[\widetilde{L}_{P_{\bar{j}}}, \widetilde{L}_{P_{\bar{k}}}] = \widetilde{[L_{P_{\bar{j}}}, L_{P_{\bar{k}}}] = \widetilde{L}_{[P_{\bar{j}}, P_{\bar{k}}]}}$$

$P_1, \dots, P_n$ は $\mathcal{g}$ の base ゆえ (ゆえに $[P_{\bar{j}}, P_{\bar{k}}] \in \mathcal{g}$ だから)

$$[P_{\bar{j}}, P_{\bar{k}}] = \sum_{\ell} A_{\bar{j}k\ell} P_{\bar{\ell}} \text{ とおくと}$$

$$\widetilde{L}_{[P_{\bar{j}}, P_{\bar{k}}]} = \widetilde{L}_{\sum A_{\bar{j}k\ell} P_{\bar{\ell}}} = \sum \widetilde{L}_{A_{\bar{j}k\ell} P_{\bar{\ell}}} = \sum \sigma(A_{\bar{j}k\ell}) \widetilde{L}_{P_{\bar{\ell}}}$$

$$\therefore [G_{\bar{j}}, G_{\bar{k}}] = \sum a_{\bar{j}k\ell} G_{\bar{\ell}} \text{ が いた.$$

以上のことより 次の Pfaff の lemma が使えて
 solution が 1 次元であることが いた.

lemma (Pfaff) $G_{\bar{j}} = u_{\bar{j}} + \psi_{\bar{j}}$ ($\bar{j}=1, \dots, n$), $u_{\bar{j}}$ は vector field, $\psi_{\bar{j}}$ は関数, が n 次元 manifold の x_0 の近傍上で define された n 本の diff. op.

で

1) $u_{\bar{j}}(x_0) \in T_{x_0}X$ は tangent space の base

2) $[G_{\bar{j}}, G_{\bar{k}}] = \sum_l a_{\bar{j}\bar{k}l} G_{\bar{l}}$, 但し $a_{\bar{j}\bar{k}l}$ は x_0 の nbd. で def された関数

$\Rightarrow G_1 u = \dots = G_n u = 0$ の解は x_0 の nbd で 1 次元 vector space になる.

諸公式

$$\star H_f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) ; \text{Hamilton field}$$

$$P = \sum_{j \leq m} P_j(x, D)$$

$$L_P^{(m)} = H_{\sigma_m(P)} + \sigma_{m-1}(P) ; -\text{階の diff. op.}$$

$$\sigma_m(P) = P_m(x, \xi), \quad \sigma_{m-1}(P) = P_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 P_m(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi_i}$$

$$\star L_{PQ}^{(m+l)} = \sigma_m(P) L_Q^{(l)} + \sigma_l(Q) L_P^{(m)} + \frac{1}{2} \{ \sigma_m(P), \sigma_l(Q) \}$$

但し P, Q はそれぞれ高々 m, l 階. $\{ \}$ は Poisson bracket.

$$\star L_{[P, Q]}^{(m+l-1)} = [L_P^{(m)}, L_Q^{(l)}]$$

この証明には $R = PQ = \sum_{j \leq m+l} R_j(x, D)$ とおくと

$$R_j = \sum_{\substack{\nu + \mu = j \\ \nu + \mu = j}} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha P_\nu) (D_x^\alpha Q_\mu) \text{ を使う.}$$

$$\text{特に } R_{m+l} = P_m Q_l, \quad R_{m+l-1} = P_m Q_{l-1} + P_{m-1} Q_l + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial Q_l}{\partial x_i}$$

(P_i は $P_i(x, \xi)$ の i 成分.)

$$\star H_f g = f H_g + g H_f, \quad H_{\{f, g\}} = [H_f, H_g]$$

$$\star \widetilde{L}_{AP} = \sigma(A) \widetilde{L}_P, \quad \widetilde{L}_{PA} = \widetilde{L}_P \sigma(A)$$

Theorem 2. $\sigma_\lambda(Qu) = \sigma(Q) \sigma_\lambda(u) \pmod{\text{const.}}$ if $\sigma(Q)|_\lambda \neq 0$

Proof) $(PQ^{-1})(Qu) = 0$ for $P \in \mathcal{f}$

$R = PQ^{-1}$ ($P \in \mathcal{f}$) とおくと

$$\widetilde{L}_R(\sigma(Q)\sigma_\lambda(u)) = \widetilde{L}_P \sigma(Q)^{-1} \sigma(Q) \sigma_\lambda(u)$$

$$= \widetilde{L}_P \sigma_\lambda(u) = 0 \quad (\forall R \text{ s.t. } R(Qu) = 0)$$

$$\therefore \sigma_\lambda(Qu) = \sigma(Q) \sigma_\lambda(u) \pmod{\text{const.}} //$$

Theorem 3. $\sigma_\lambda(u)$ は ξ に関して homogeneous である.

Proof) $u = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \partial + L$

$$\widetilde{L}_P \Delta = 0 \quad (\forall P \in \mathcal{f}) \Rightarrow \widetilde{L}_P (u\Delta) = 0 \quad (\forall P \in \mathcal{f})$$

を示せば 解は定数倍を除いて unique かつ

Euler's identity より ξ について homogeneous であることがわかる.

これを示そう.

$$\widetilde{L}_P \widetilde{u} = \widetilde{u} \widetilde{L}_{P'} + [\widetilde{L}_P, \widetilde{u}] \quad \text{ゆゑ}$$

$$\widetilde{L}_P (\widetilde{u} \lambda) = [\widetilde{L}_P, \widetilde{u}] \lambda = [\widetilde{L}_P, u] \lambda \quad \text{であるから}$$

$$[L_P, u] = -(m-1)L_P \quad (P: m \text{ 階}) \quad \text{を示せば}$$

$$\widetilde{L}_P (\widetilde{u} \lambda) \text{ が } u \lambda \text{ である.}$$

lemma. $[u, L_P^{(m)}] = (m-1)L_P^{(m)}$

$$L_P^{(m)} = \sum_i \left(\frac{\partial P_m(x, \xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial P_m(x, \xi)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) + \sigma_{m-1}(P)$$

$$[u, \sigma_{m-1}(P)] = (u(\sigma_{m-1}(P)) + \sigma_{m-1}(P)u) - \sigma_{m-1}(P)u$$

$$= u(\sigma_{m-1}(P)) = (m-1)\sigma_{m-1}(P)$$

$$[u, \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i}] = u\left(\frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i} u \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u$$

$$= u\left(\frac{\partial P_m}{\partial \xi_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} = (m-1) \frac{\partial P_m}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$[u, \frac{\partial P_m}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}] = u\left(\frac{\partial P_m}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \frac{\partial P_m}{\partial x_i} u \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{\partial P_m}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} u$$

$$= m\left(\frac{\partial P_m}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \left(\frac{\partial P_m}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial \xi_i} = (m-1) \frac{\partial P_m}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

結局 $[u, L_P^{(m)}] = (m-1)L_P^{(m)}$ //

Def. $\text{ord}_\Lambda(u) = \sigma_\Lambda(u)$ の ξ に関する homog. degree

Theorem 4. $P \in \mathcal{I}$, $d\sigma_m(P) \equiv \varphi \omega \pmod{J_\Lambda}$
 $\Rightarrow (\text{ord}_\Lambda(u) + \frac{m-1}{2})\varphi \equiv (P_{m-1} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 P_m}{\partial x_i \partial \bar{x}_i}) \pmod{J_\Lambda}$
 但し ω は canonical 1-form.

Proof) $d\sigma_m(P) \equiv \varphi \omega \pmod{J_\Lambda}$

$\uparrow d\psi$

$H_{\sigma_m(P)} = -\varphi \psi$ on Λ である.

$$T^*(T^*X) \longleftrightarrow T(T^*X)$$

$$\downarrow \psi \quad \downarrow \psi$$

$$df \longleftrightarrow H_f$$

$$\omega \longleftrightarrow -\psi = -\sum \bar{x}_i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$$

$$\therefore \widetilde{L}_P = (\widetilde{-\varphi \psi}) + \sigma_{m-1}(P)$$

$$= -\varphi \widetilde{\psi} - \frac{1}{2} \psi(\varphi) + \sigma_{m-1}(P)$$

$$= -\varphi \widetilde{\psi} - \frac{m-1}{2} \varphi + \sigma_{m-1}(P)$$

($\because \varphi$ は $(m-1)$ 次 homog. 実際 $d\sigma_m(P)$ は m 次 homog. で

ω は 1 次 homog. かつ $d\sigma_m(P) \equiv \varphi \omega \pmod{J_\Lambda}$ より)

$$\widetilde{\psi} \sigma_\Lambda(u) = \text{ord}_\Lambda(u) \cdot \sigma_\Lambda(u) \quad (= \text{注意すれば})$$

$$(-\varphi \text{ord}_\Lambda(u) - \frac{m-1}{2} \varphi + \sigma_{m-1}(P)) \sigma_\Lambda(u) = 0$$

$$\therefore \left(\text{ord}_{\mathcal{L}}(u) + \frac{m-1}{2} \right) \varphi \sigma_{\mathcal{L}}(u) = \sigma_{m-1}(P) \sigma_{\mathcal{L}}(u)$$

$$\therefore \left(\text{ord}_{\mathcal{L}}(u) + \frac{m-1}{2} \right) \varphi = \sigma_{m-1}(P) \text{ on } \mathcal{L} //$$

Cor. $P \in \mathcal{f}$, P は -1 階 s.t. $d\sigma(P) \equiv \omega \pmod{J_{\mathcal{L}}}$

$$\Rightarrow \text{ord}_{\mathcal{L}}(u) = P_0(x, \xi) - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 \sigma(P)}{\partial x_i \partial \xi_i} \Big|_{\mathcal{L}} //$$

★ このような P の存在は次のようにしていえる.

接触変換で $\mathcal{L} = \{x_1 = \dots = x_n = 0\}$ とできるが, その

とき $\sigma_1(P) = \sum x_i \xi_i$ をとればよい.

例 1) $(x_1, \dots, x_n)$ を局所座標 と して

$$x_1 u = \dots = x_r u = 0, \quad D_{r+1} u = \dots = D_n u = 0$$

なる方程式系 を 考える.

$$u = \delta(x_1, \dots, x_r), \quad \Lambda = \{(x, \xi) \mid x_1 = \dots = x_r = 0, \xi_{r+1} = \dots = \xi_n = 0\}$$

$$\begin{cases} L_{x_j} = H_{x_j} = -\frac{\partial}{\partial \xi_j} \\ L_{D_j} = H_{\xi_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \end{cases}$$

$$\sigma_\Lambda(u) = \varphi \sqrt{d\xi_1 \cdots d\xi_r dx_{r+1} \cdots dx_n} \quad \text{と おく}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \sigma_\Lambda(u) = 0 \quad (1 \leq j \leq r), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_\Lambda(u) = 0 \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

$$L_{\frac{\partial}{\partial \xi_j}} (d\xi_1 \cdots dx_n) = L_{\frac{\partial}{\partial x_j}} (d\xi_1 \cdots dx_n) = 0 \quad \text{ゆえ}$$

$$\text{これは } \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq r), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0 \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

を意味する. $\therefore \varphi = \text{const.}$

$$\therefore \sigma_\Lambda(\delta(x_1, \dots, x_r)) = \sqrt{d\xi_1 \cdots d\xi_r dx_{r+1} \cdots dx_n}$$

★ $\sigma_\Lambda(u)$ は modulo constant での定義されていないことに注意.

$$\therefore \text{ord}_\Lambda(\delta(x_1, \dots, x_r)) = \frac{r}{2} \quad //$$

例 2) $(x_1 D_1 - \alpha)u = (x_2 D_2 - \beta)u = D_3 u = \dots = D_n u = 0$

$$\Lambda_1 = \{x_1 = x_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n = 0\}$$

$$\Lambda_2 = \{x_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n = 0\}$$

とあるとき $\sigma_{\Lambda_1}(u)$, $\sigma_{\Lambda_2}(u)$ を求めよう.

• $P_1(x, D) = x_1 D_1 - \alpha \in \mathcal{I}$

$$L_{P_1(x, D)} = H_{x_1 \xi_1} - \alpha - \frac{1}{2} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \alpha - \frac{1}{2}$$

$$\therefore L_{P_1} = -(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \alpha + \frac{1}{2}) \text{ on } \Lambda_1, \Lambda_2 \quad (x_1=0 \text{ に注意})$$

• $P_2(x, D) = x_2 D_2 - \beta \in \mathcal{I}$

$$L_{P_2(x, D)} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \beta - \frac{1}{2}$$

$$\therefore L_{P_2} = -(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \beta + \frac{1}{2}) \text{ on } \Lambda_1$$

$$= (x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \beta - \frac{1}{2}) \text{ on } \Lambda_2$$

• $P_j(x, D) = D_j \quad (3 \leq j \leq n)$

$$L_{P_j} = H_{\xi_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

さて $\omega_1 = d\xi_1 d\xi_2 dx_3 \dots dx_n$, $\omega_2 = d\xi_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$

とおき $\sigma_{\Lambda_1}(u) = f_1 \sqrt{\omega_1}$, $\sigma_{\Lambda_2}(u) = f_2 \sqrt{\omega_2}$ とおいて

f_1, f_2 を求めよう.

まず $L_{P_1} = -(\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \alpha + \frac{1}{2})$

$$L_{\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}} \omega_1 = \omega_1, \quad L_{\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}} \omega_2 = \omega_2 \quad \text{中 } \mathbb{Z}$$

← Lie 微分 →

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_{P_1} f_1 \sqrt{\omega_1} &= -\left(\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + \frac{f_1}{2} \cdot \frac{L_{\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}} \omega_1}{\omega_1} + (\alpha + \frac{1}{2}) f_1 \right) \sqrt{\omega_1} \\ &= -\left(\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + (\alpha + 1) f_1 \right) \sqrt{\omega_2} = 0 \end{aligned}$$

同様に $\widetilde{L}_{P_1} f_2 \sqrt{\omega_2} = -(\xi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} + (\alpha + 1) f_2) \sqrt{\omega_2} = 0$

次に $L_{P_2} = -(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \beta + \frac{1}{2})$ on Λ_1 中 $\mathbb{Z}$

今と全く同様に $\widetilde{L}_{P_2} f_1 \sqrt{\omega_1} = -(\xi_2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} + (\beta + 1) f_1) \sqrt{\omega_1} = 0$

他方 $L_{P_2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \beta - \frac{1}{2}$ on Λ_2 中 $\mathbb{Z}$

($L_{x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}} \omega_2 = \omega_2$ 中 $\mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_{P_2} f_2 \sqrt{\omega_2} &= \left(x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{f_2}{2} \cdot \frac{L_{x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}} \omega_2}{\omega_2} - (\beta + \frac{1}{2}) f_2 \right) \sqrt{\omega_2} \\ &= (x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \beta f_2) \sqrt{\omega_2} = 0 \end{aligned}$$

最後に $L_{P_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($3 \leq j \leq n$) 中 $\mathbb{Z}$

$$\widetilde{L}_{P_j} f_i \sqrt{\omega_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \sqrt{\omega_i} = 0 \quad (i=1, 2)$$

従って $\xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} = -(\alpha + 1) f_1, \quad \xi_2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} = -(\beta + 1) f_1$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = 0 \quad (3 \leq j \leq n)$$

$$f_1 = f_1(\xi_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n) \text{ 中 } \bar{z}$$

$$f_1 = \xi_1^{-\alpha-1} \xi_2^{-\beta-1}$$

$$\therefore \sigma_{\Lambda_1}(u) = \xi_1^{-\alpha-1} \xi_2^{-\beta-1} \sqrt{d\xi_1 d\xi_2 dx_3 \dots dx_n}$$

$$\text{ord}_{\Lambda_1}(u) = -\alpha - \beta - 1$$

他方 $\xi_1 \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} = -(\alpha+1)f_2, \quad x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \beta f_2$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_j} = 0 \quad (3 \leq j \leq n)$$

$$\therefore f_2 = \xi_1^{-\alpha-1} x_2^\beta$$

$$\therefore \sigma_{\Lambda_2}(u) = \xi_1^{-\alpha-1} x_2^\beta \sqrt{d\xi_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n}$$

$$\text{ord}_{\Lambda_2}(u) = -\alpha - \frac{1}{2}$$

特に $\text{ord}_{\Lambda_1}(u) - \text{ord}_{\Lambda_2}(u) - \frac{1}{2} = -\beta - 1$ は

重要な役割を演ずる。(P. 参照)

例3) (G, V) prehomog. $S = \{f=0\} \cup S'$ $f \leftrightarrow \delta X$

Λ good Lagrangean

そのとき $\sigma_\Lambda(f^s) = f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$ である.

f_Λ は Λ 上の δX に対応する rel inv.

ω_Λ は Λ 上の tr_V に対応する rel. inv. volume elt.

Proof) Λ が good Lagrangean かつ

$\langle Ax, D_x \rangle - s \delta X(A)$ ($A \in \mathfrak{g}$) が $\mathfrak{g}$ の
involutory base になっている.

$P(x, D) = \langle Ax, D_x \rangle - s \delta X(A)$ とおく.

$H_{\langle Ax, y \rangle} = \langle Ax, D_x \rangle - \langle {}^t Ay, D_y \rangle$

$\sum_i \frac{\partial^2 \langle Ax, y \rangle}{\partial x_i \partial y_i} = tr_V A$ かつ

$L_P = \langle Ax, D_x \rangle - \langle {}^t Ay, D_y \rangle - s \delta X(A) - \frac{1}{2} tr_V A$

さて $H_{\langle Ax, y \rangle}$ は $(x, y) \mapsto (gx, {}^t g^{-1} y)$ の微分表現

かつ $L_{H_{\langle Ax, y \rangle}} \omega_\Lambda = (tr_V A) \omega_\Lambda$

$H_{\langle Ax, y \rangle} f_\Lambda = \delta X(A) f_\Lambda$

$\therefore \widetilde{L_{H_{\langle Ax, y \rangle}}} f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda} = \left(H_{\langle Ax, y \rangle} f_\Lambda^s + \frac{1}{2} \frac{L_{\langle Ax, y \rangle} \omega_\Lambda}{\omega_\Lambda} \right) \sqrt{\omega_\Lambda}$

$= (s \delta X(A) + \frac{1}{2} tr_V A) f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$

$\therefore \widetilde{L}_P f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda} = 0 \quad \text{for } \forall P \in \mathcal{P} \quad \text{解は unique 中}$

$$\therefore \sigma_\Lambda(f^s) = f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda} \quad (\text{mod const.})$$

$$\star \quad \text{ord}_\Lambda f^s = s \, \delta\chi(A_0) - \text{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \frac{1}{2} \dim V_{x_0}^*$$

$$\text{但し } A_0 x_0 = 0, \quad -{}^t A_0 y_0 = y_0$$

$$(x_0, y_0) \in \Lambda \text{ gen pt.}$$

$$\text{ord}_\Lambda f^s = \deg_y \sigma_\Lambda(f^s) = \deg_y f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$$

$$= s \deg_y f_\Lambda + \frac{1}{2} \deg_y \omega_\Lambda$$

$$(\langle Ax, D_x \rangle - \langle {}^t Ay, D_y \rangle) f_\Lambda = \delta\chi(A) f_\Lambda(x, y)$$

$$\langle y, D_y \rangle f_\Lambda(x, y) = (\deg_y f_\Lambda) f_\Lambda(x, y)$$

$$\text{ゆえに } A_0 x_0 = 0, \quad -{}^t A_0 y_0 = y_0 \quad f_\Lambda(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{なる } A_0$$

$$\text{をとれば } \deg_y f_\Lambda = \delta\chi(A_0)$$

$\Lambda (\subset T^*V = V \times V^*)$ の V への projection を Υ

とし V の局所座標 $(t_1, \dots, t_n)$ を $\Upsilon = \{t_1 = \dots = t_r = 0\}$

$$\Lambda = \{t_1 = \dots = t_r = 0, \tau_{r+1} = \dots = \tau_n = 0\} \quad \text{と なるように とる}$$

$$\omega_\Lambda = c \, dt_1 \cdots dt_r \, d\tau_{r+1} \cdots d\tau_n \quad \text{と 表わせるが}$$

$dt_1 \cdots dt_r$ は $V_{x_0}^*$ の, $d\tau_{r+1} \cdots d\tau_n$ は $\mathcal{O}_{x_0}$ の volume elt 中

$$dt_1 \cdots dt_r dt_{r+1} \cdots dt_n \text{ は } \operatorname{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \operatorname{tr}_{\mathcal{O}_{X_0}} A_0$$

$$= 2 \operatorname{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \operatorname{tr}_V A_0 \text{ の変化をうける } (A_0 \in \mathcal{O}_{X_0} \text{ の作用で})$$

$$\text{よって } (L \langle A_0, x, D_x \rangle - L \langle A_0, y, D_y \rangle) \omega_1 = \operatorname{tr}_{V_{x_0}^*} \omega_1$$

$$\text{ゆえ } \varphi \text{ は } -2 \operatorname{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 \text{ の変化をうけるが } A_0 \text{ の}$$

$$\text{とり方より } \varphi \text{ は } -2 \operatorname{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 \text{ 次 homog.}$$

$$\therefore \omega_1 \text{ は } (\gamma - 2 \operatorname{tr}_{V_{x_0}^*} A_0) \text{ 次 homog.}$$

$$\therefore \operatorname{ord}_1 f^s = s \chi(A_0) - \operatorname{tr}_{V_{x_0}^*} A_0 + \frac{\dim V_{x_0}^*}{2} //$$

★ local な ℓ -関数

(G, V, f) prehomog. v.s.

$T^*V \supset \Lambda$ good Lagrangian

Def. $\ell_\Lambda(s)$ が Λ における ℓ -関数

$\Leftrightarrow \exists P$; Λ の gen. pt. の近傍で def された elliptic operator (i.e. $\sigma(P)|_\Lambda \neq 0$) A.t. $P f^{s+1} = \ell_\Lambda(s) f^s$

i.e. $P f u_s = \ell_\Lambda(s) u_s$

u_s は $\mathcal{P} / \mathcal{P}(\sum_{A \in \eta} \langle Ax, D_x \rangle - s \delta X(A))$ の generator

lemma 1. $f u_s \neq 0$ (for generic s), かつ $f u_s$ は

$(\langle Ax, D_x \rangle - (s+1) \delta X(A))(f u_s) = 0$ をみたす.

$\therefore$

$\exists Q(x, D_x) f u_s = \tilde{\ell}(s) u_s$, $\therefore \tilde{\ell}(s) \neq 0$ なる $f u_s = 0$

$\rightarrow u_s = 0$ 矛盾. //

lemma 2. $P f u_s = \ell_\Lambda(s) u_s$, P elliptic op.

$\Rightarrow P$ は order m_Λ で $\sigma_{m_\Lambda}(P)|_\Lambda = \text{const. } f_\Lambda^{-1}$

但し $f_\Lambda = f / s^{m_\Lambda}$

$\therefore \sigma(u_s) = f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$, $\sigma(f u_s) = f_\Lambda^{s+1} \sqrt{\omega_\Lambda}$

$\sigma(P(f u_s)) = \sigma(P) \sigma(f u_s) = \sigma(P) f_\Lambda^{s+1} \sqrt{\omega_\Lambda} = \sigma(\ell_\Lambda(s) u_s)$

$$= f_{\Lambda}^s \sqrt{\omega_{\Lambda}} \mod \text{const.}$$

$$\therefore \sigma_{m_{\Lambda}}(P) = \text{const. } f_{\Lambda}^{-1} \quad //$$

Theorem 1. (-一意性) $\ell_{\Lambda}(s)$ は定数倍を除いて unique.

Proof)

$$P_1 f u_s = \ell_1(s) u_s$$

$$P_2 f u_s = \ell_2(s) u_s$$

P_1, P_2 elliptic

$$f u_s = \ell_1(s) P_1^{-1} u_s \quad \& \quad \ell_2(s) u_s = \ell_1(s) P_2 P_1^{-1} u_s.$$

$$\therefore (\ell_2(s) - \ell_1(s) P_2 P_1^{-1}) u_s = 0$$

$$\sigma_0(\ell_2(s) - \ell_1(s) P_2 P_1^{-1}) = \ell_2(s) - \text{const. } \ell_1(s) \neq 0 \text{ と}$$

すると $(\ell_2(s) - \ell_1(s) P_2 P_1^{-1})$ elliptic となり $u_s = 0$ となり

矛盾.

$$\therefore \ell_2(s) = \text{const. } \ell_1(s). \quad //$$

* lemma 2 より $P_2 P_1^{-1}$ の Λ 上の symbol は const. であることに注意.

Theorem 2. (存在定理)

$$\exists (-m_{\Lambda}) \text{ 階の operator } P_{\Lambda} \text{ s.t. } \sigma_{-m_{\Lambda}}(P_{\Lambda})|_{\Lambda} = f_{\Lambda}$$

$$\exists \ell_{\Lambda}(s) = s^{m_{\Lambda}} + (m_{\Lambda}-1 \text{ 次以下の } s \text{ の多項式})$$

$$\text{s.t. } f u_s = \ell_{\Lambda}(s) P_{\Lambda} u_s, \quad u_s = f^s$$

Proof)

次の記号を導入する.

 $T(s)$ が s について 多項式 の PDO. とするとき

$$\text{ord } T(s) = \{s \text{ を 1 階と考えたときの order} \}$$

$$\text{すなわち } T(s) = \sum_{j \geq 0} s^j T_j \text{ としたとき } \max_j (j + \text{ord } T_j).$$

さて P を $(-m_\Lambda)$ 階で その principal symbol が W 上で

$$\sigma_{-m_\Lambda}(P)|_W = f_\Lambda = f/s^{m_\Lambda} \text{ なるものとする.}$$

そのとき $f = \sigma_{-m_\Lambda}(P) \langle A_0 x, y \rangle^{m_\Lambda}$ on W である.

$$\left(\text{但し } \langle A_0 x, y \rangle u_s = s u_s, \delta \chi(A_0) = 1 \right).$$

$$\therefore f - P \langle A_0 x, D_x \rangle^{m_\Lambda} = \sum_{A_j \in \mathcal{G}_0} T_j(x, D_x) \langle A_j x, D_x \rangle + K$$

($\text{ord } K \leq -1$)

と表わせる.

(W 上 0 になる関数は $\langle A_j x, y \rangle$ ($A_j \in \mathcal{G}_0$) で張られる.)

$$\begin{aligned} \therefore f u_s &= s^{m_\Lambda} P u_s + K u_s, \quad \text{ord } K \leq -1. \\ &= (s^{m_\Lambda} P + K) u_s \end{aligned}$$

ここで $K u_s = 0$ なる $0, K$. $K u_s \neq 0$ の場合を考える.

lemma 3. $G(s) u_s \neq 0 \Rightarrow G(s) u_s \stackrel{\exists}{=} T(s) u_s$ s.t. $T(s)$ elliptic
 かつ $\text{ord } T(s) \leq \text{ord } G(s)$

sublemma 1. $G(s)$ が elliptic でなければ

$$\exists T(s) \text{ s.t. } T(s)u_s = G(s)u_s, \quad \underline{\text{ord}} T(s) \leq \underline{\text{ord}} G(s) \\ \text{ord} T(s) \leq \text{ord} G(s) - 1$$

$$\therefore) \quad G = \sum_{j \geq 0} s^j G_j, \quad \text{ord} G_j \leq \underline{\text{ord}} G(s) - j, \quad \text{ord} G(s)$$

と表わしたとき, 各 G_j に対して

$$G_j u_s = \exists T_j(s) u_s, \quad \underline{\text{ord}} T_j(s) \leq \text{ord} G_j \\ \text{ord} T_j(s) \leq \text{ord} G_j - 1$$

か いえぬは $T(s) = \sum_{j \geq 0} s^j T_j(s)$ とおけば $T(s)$ が
求めるものである.

従って $G(s)$ は s を含まぬとしてよい. 以下 G とおく.

$$m = \underline{\text{ord}} G(s) (= \text{ord} G) \text{ とおくと}$$

$$\sigma_m(G)|_{\Lambda} = 0 \quad \text{で } \Lambda \text{ は good Lagrangean 中}$$

$$\sigma_m(G) = \sum_{A_j \in \mathcal{V}_0} a_j \langle A_j x, y \rangle + a_0 \langle A_0 x, y \rangle, \quad \delta X(A_0) = 1$$

と表わせる. ここで a_j, a_0 は $(m-1)$ 次 homog. (involutive line 中)
とされる.

$$\therefore G = \sum A_j(x, D_x) \langle A_j x, D_x \rangle + A_0(x, D_x) \langle A_0 x, D_x \rangle \\ + (m-1 \text{ 階以下})$$

$$\therefore G u_s = \left(\underbrace{s A_0(x, D_x)}_{(m-1) \text{ 階}} + \underbrace{K}_{(m-1) \text{ 階}} \right) u_s = T(s) u_s \text{ とおく}$$

$$\text{と } \text{ord} T(s) \leq m-1 = \text{ord} G - 1,$$

$$\underline{\text{ord}} T(s) \leq m = \text{ord} G \quad // \text{sublem 1.}$$

sublemma 2. $G(s)u_s \neq 0 \Rightarrow \exists r$ s.t. $G(s)u_s = T(s)u_s$ となる任意の $T(s)$ に対して $\text{ord } T(s) \geq r$.

$\therefore$ Λ が good Lagrangean 中では 方程式は module として simple. $\therefore P G(s)u_s = P u_s \quad \therefore \exists K(s)$ elliptic s.t.

$\rightarrow$ $G(s)u_s = K(s)u_s$. そのとき $G(s)u_s = T(s)u_s$ なる $T(s)$ に対し $\text{ord } T(s) \geq \text{ord } K(s)$. 実際 $\text{ord } K(s) > \text{ord } T(s)$ とすれば

$(K(s) - T(s))u_s = 0$, $\sigma(K(s) - T(s)) = \sigma(K(s)) \neq 0$ 中 $u_s = 0$ となり矛盾. // sublem 2.

lemma 3 の Proof) sublem 1 をくりかえして $T(s)$ が elliptic にとればよい. とれないと order を限りなく上げていけるから sublem 2 より $G(s)u_s = 0$ となり仮定に反する. // lem 3.

さてこの lem 3 により $Ku_s \stackrel{=}{{\exists}} G(s)u_s$, $G(s)$ elliptic

ord $G(s) \leq -1$ とでき

$f u^s = (s^{m_\Lambda} P + G(s))u_s$ を得る.

lemma 4. $\text{ord } G(s) \leq -m_\Lambda$

$\therefore$ $\text{ord } G(s) > -m_\Lambda$ とすると $\text{ord}(s^{m_\Lambda} P + G(s))u_s$

$= \text{ord } G(s) + \text{ord } u_s = \text{ord } f u^s = \text{ord } u_s - m_\Lambda$

$(\text{ord } u_s = -m_\Lambda s - \frac{m_\Lambda}{2}) \quad \therefore \text{ord } G(s) = -m_\Lambda$ 矛盾 //

$\text{ord } G(s) \leq -1$, $\text{ord } G(s) \leq -m_\Lambda$ ゆえ $G(s)$ は s について $(m_\Lambda - 1)$ 次以下の多項式である.

今 $P(s) = s^{m_\Lambda} P + G(s)$ とおけば

$f u_s = P(s) u_s$, $\text{ord } P(s) \leq 0$, $\text{ord } P(s) \leq -m_\Lambda$

$$\sigma_{-m_\Lambda}(P(s))|_\Lambda = s^{m_\Lambda} f_\Lambda + (s \text{ について } m_\Lambda \text{ 次未満})$$

となる。

$$\text{さて } f u_s = P(s) u_s \text{ より } \sigma(f u_s) = f_\Lambda^{s+1} \sqrt{\omega_\Lambda} \parallel \text{ mod const.}$$

$$\therefore \sigma_{-m_\Lambda}(P(s))|_\Lambda = \text{const. } f_\Lambda \quad \sigma(P(s) u_s) = \sigma_{-m_\Lambda}(P(s)) f_\Lambda^s \sqrt{\omega_\Lambda}$$

今 $\sigma_{-m_\Lambda}(P(s))|_\Lambda = \ell_\Lambda(s) f_\Lambda$ とおけば

$$\ell_\Lambda(s) = s^{m_\Lambda} + (s \text{ の } m_\Lambda - 1 \text{ 次の polyn.})$$

と表わせることがめかした。

Lemma 5. $P(s) u_s$ が $u_{s+\alpha}$ の微分方程式をみたして

$$\sigma_{-m_\Lambda}(P(\alpha))|_\Lambda = 0 \text{ ならば } P(s) u_s = (s - \alpha) P_1(s) u_s$$

$\text{ord } P_1(s) \leq -m_\Lambda$, $\text{ord } P_1(s) \leq \text{ord } P(s) - 1$, と表わせる。

Proof) まずいくつかの sublemma を証明する。

sublemma 1. $P(\alpha) u_\alpha = 0$

$$\therefore \sigma(P(\alpha))|_\Lambda = 0 \text{ ゆえ } \sigma(P(\alpha)) = \sum \varphi_j \langle A_j x, y \rangle \text{ と}$$

表わせる. $\therefore P(\alpha) = \sum \Phi_j(x, D_x) (\langle A_j x, D_x \rangle - \alpha \delta \chi(A)) + K$
 $\uparrow$ U_α に作用させた 30. $\uparrow$ $\text{ord } K \leq \text{ord } P(\alpha) - 1$

$$\therefore \text{ord } P(\alpha) U_\alpha \leq \text{ord } U_\alpha - m_\lambda - 1$$

他方 $P(\alpha) U_\alpha = f U_\alpha \neq 0$ とすれば

$$\text{ord } P(\alpha) U_\alpha = \text{ord } (f U_\alpha) = \text{ord } U_\alpha - m_\lambda \quad \text{矛盾.} //$$

sublemma 2. 一般に $T(\alpha) U_\alpha = 0$ なる $\exists R(s)$ s.t.

$$T(s) U_s = (s - \alpha) R(s) U_s, \quad \underline{\text{ord}} R(s) \leq \underline{\text{ord}} T(s) - 1$$

$$\text{ord } R(s) \leq \text{ord } T(s)$$

$\therefore$ Λ が good Lagrangian $\phi \geq$

$$\delta \chi(\Lambda) = 1$$

$$T(\alpha) = \sum_{A_j \in \eta_0} \Phi_j(x, D_x) \langle A_j x, D_x \rangle + M (\langle A_0 x, D_x \rangle - \alpha)$$

$$\text{ord } M \leq \text{ord } T(\alpha) - 1$$

と表わせる. 一般に $T(s) = T(\alpha) + R_1(s)(s - \alpha)$ とかけ

る (多項式の剰余の定理). そのとき $\text{ord } R_1(s) \leq \text{ord } T(s)$

$\underline{\text{ord}} R_1(s) \leq \underline{\text{ord}} T(s) - 1$ が成り立つ. これを U_s に作用

$$\text{させると } T(s) U_s = (s - \alpha) R_1(s) U_s + M(s - \alpha) U_s$$

$$= (s - \alpha) (R_1(s) + M) U_s \quad \text{を得るから}$$

$$R(s) = R_1(s) + M \quad \text{とあけばよい.} //$$

この二つの sublemma より lemma 5 が直ちに

得られる. //

lemma 6. $P(s)u_s$ が u_{sH} の微分方程式をみたして

$\sigma_{-m_\Lambda}(P(s))$ が $C(s)$ でわかれるなら

$$P(s)u_s = C(s)P_1(s)u_s, \quad \text{ord } P_1(s) = -m_\Lambda$$

$$\underline{\text{ord}} P_1(s) \leq \underline{\text{ord}} P(s) - \deg C(s)$$

Proof) 帰納法で示す.

$P(s)u_s = (s-\alpha_1)\cdots(s-\alpha_k)P_k(s)u_s$ が示されれば
($k=1$ のときは lemma 5), $P_k(s)u_s$ は u_{sH} の微分方程式
をみたし, $\sigma(P_k(\alpha_{k+1}))|_\Lambda = 0$ なる lemma 5 より
 $P_k(s)u_s = (s-\alpha_{k+1})P_{k+1}(s)u_s$ が成り立つ. // lemma 6.

さて $\sigma_{-m_\Lambda}(P(s))|_\Lambda = \varphi_\Lambda(s)f_\Lambda$ ゆえ lemma 6 から

$f_\Lambda u_s = P(s)u_s = \varphi_\Lambda(s)P_1(s)u_s$ を得る.

ここで $P_1(s)$ は $-m_\Lambda$ 階で $\sigma_{-m_\Lambda}(P_1(s)) = f_\Lambda$

$$\underline{\text{ord}} P_1(s) \leq \underline{\text{ord}} P(s) - m_\Lambda = -m_\Lambda.$$

$$\text{よって } P_1(s) = \sum_{j \geq 0} s^j Q_j, \quad \text{ord } Q_j \leq -m_\Lambda - j$$

と表わせる.

$$\therefore P_1(s)u_s = \sum_{j \geq 0} Q_j(x, D) \langle A_0 x, D_x \rangle^j u_s.$$

$$\text{今 } P_\Lambda(x, D) = \sum_{j \geq 0} Q_j(x, D) \langle A_0 x, D_x \rangle^j \text{ と}$$

おける $\text{ord } P_\Lambda \leq -m_\Lambda$ で

$$\sigma_{-m_\Lambda}(P_\Lambda)|_\Lambda = \sigma_{-m_\Lambda}(Q_0) = \sigma_{-m_\Lambda}(P_1(s)) = f_\Lambda$$

$\uparrow$
 Λ 上で $\langle A_0 x, y \rangle = s = 0$
 かつ

$$\therefore f u_s = \psi_\Lambda(s) P_\Lambda u_s, \text{ ord } P_\Lambda \leq -m_\Lambda, \sigma_{-m_\Lambda}(P_\Lambda)|_\Lambda$$

$\parallel$
 f_Λ

TR 2.

(G, V, f) reductive regular P.V.

$$f^*(D_x) f^{s+1} = \psi(s) f^s \quad \text{が } (G, V) \text{ の } \psi\text{-関数}$$

であった。

- ① 原点の conormal bundle $\Lambda = 0 \times V^*$ における $\psi_\Lambda(s)$ を考えると $f^*(y)$ は Λ の gen. pt で $\neq 0$ かつ $f^*(D_x)$ は elliptic operator. $\therefore$ 一意性より $\psi(s) = \psi_\Lambda(s)$.

- ② gen. pt の conormal bundle $\Lambda = V \times \{0\}$ における $\psi_\Lambda(s) = 1$ である。実際 $\frac{1}{f}$ は Λ の gen. pt で elliptic operator である。

★ Lagrangeans の codim 1 の交わり

Th. $T^*X \supset \Lambda_1, \Lambda_2$ Lagrangeans

$S = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ が $(n-1)$ 次元 : かつ

$$T_p S = T_p \Lambda_1 \cap T_p \Lambda_2 \quad \text{for } \forall p \in S$$

そして $\int u = 0$, $\overline{g} = J_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$ を仮定する.

そのとき ある量子化された接触変換により

$$(x_1 D_1 - \alpha) u = (x_2 D_2 - \beta) u = D_3 u = \dots = D_n u = 0$$

$$\Lambda_1 = \{ x_1 = x_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n = 0 \}$$

$$\Lambda_2 = \{ x_1 = \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n = 0 \}$$

$$u(x) = x_1^\alpha x_2^\beta \quad \text{となる.}$$

(証略)

そのとき

$$\sigma_{\Lambda_1}(u) = \xi_1^{-\alpha-1} \xi_2^{-\beta-1} \sqrt{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n}$$

$$\sigma_{\Lambda_2}(u) = \xi_1^{-\alpha-1} x_2^\beta \sqrt{d\xi_1 dx_2 \dots dx_n}$$

$$e_1 = \text{ord}_{\Lambda_1}(u) = -\alpha - \beta - 1$$

$$e_2 = \text{ord}_{\Lambda_2}(u) = -\alpha - \frac{1}{2}$$

であった. (P. 16 参照)

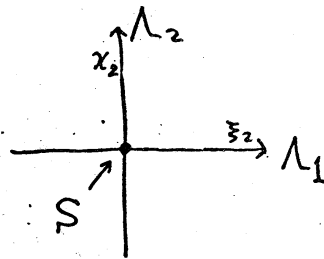
Theorem 1. $e_1 - e_2 - \frac{1}{2} (= -\beta - 1) \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

なるは $\mathcal{W} = \mathcal{P}u$ は Λ_1 上の support を持つ quotient $\mathcal{W}_1$

をもち: $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}_1 \longrightarrow 0$, $\text{supp } \mathcal{W}_1 = \Lambda_1$

Proof) $e_1 - e_2 - \frac{1}{2} = -\beta - 1 = \ell \in \mathbb{Z}_+$ とおくと

$$\mathcal{W} \begin{cases} (x_1 D_1 - \alpha) u = 0 \\ (x_2 D_2 + \ell + 1) u = 0 \\ D_3 u = 0 \\ \vdots \\ D_n u = 0 \end{cases}$$



さて $\mathcal{W}_1$ として

$$\mathcal{W}_1 \begin{cases} (x_1 D_1 - \alpha) v = 0 \\ x_2 v = 0 \\ D_3 v = 0 \\ \vdots \\ D_n v = 0 \end{cases}$$

をとると $x_2 \neq 0$ なる $v = 0$ となるから $\text{supp } \mathcal{W}_1 = \Lambda_1$ である.

$u' = D_2^\ell v$ は $(x_2 D_2 + \ell + 1) D_2^\ell v = D_2^{\ell+1} x_2 v = 0$ ゆえ

$\mathcal{W}$ の方程式をみたすから $\mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}_1$ なる map が
ある.
$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & D_2^\ell v \\ \downarrow & & \downarrow \\ u & \longrightarrow & D_2^\ell v \end{array}$$

Λ_1 の gen. pt で D_2 は elliptic ゆえ onto map である. //

Cor. $e_1 - e_2 - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_+$ ならば $\pi\mathcal{L} = \mathcal{P}u$ は Λ_2 にのみ support をもつ submodule ($\neq 0$) をもつ.

$\therefore \pi\mathcal{L} \rightarrow \pi\mathcal{L}_1 \rightarrow 0$ の kernel を $\pi\mathcal{L}_2$ とおくと

$(0 \rightarrow \pi\mathcal{L}_2 \rightarrow \pi\mathcal{L} \rightarrow \pi\mathcal{L}_1 \rightarrow 0)$ $\pi\mathcal{L}_2$ は Λ_2 にのみ support をもつ submodule である. //

$$\text{Th 1 において } \begin{array}{ccccccc} & & \pi\mathcal{L}_2 & \xleftarrow{\quad} \mathcal{M} & \xleftarrow{\quad} \pi\mathcal{L}_1 & & \\ 0 \rightarrow & \mathcal{P}(x_2^{\ell+1}u) & \longrightarrow & \mathcal{P}u & \longrightarrow & \mathcal{P}u & \rightarrow 0 \end{array}$$

$$x_2^{\ell+1}u \longmapsto x_2^{\ell+1}u \longmapsto x_2^{\ell+1}D_2^\ell u = \cancel{\neq} x_2 u = 0$$

Λ_2 では x_2 は elliptic ゆえ $\pi\mathcal{L}_2 = \pi\mathcal{L}$

一方 $D_2(x_2^{\ell+1}u) = x_2^\ell(x_2 D_2 + \ell + 1)u = 0$ である

Λ_1 では D_2 は可逆 (elliptic) ゆえ $(x_2^{\ell+1}u) = 0$

i.e. Λ_1 では $\pi\mathcal{L}_2 = 0$.

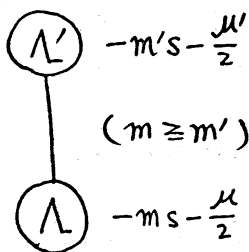
Theorem 2. $\mathcal{M} = \mathcal{P}u$ が Λ_1 に support をもつ non-trivial quotient をもてば $e_1 - e_2 - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_+$

(Th 1 の逆)

$\sigma_{\Lambda_1}(u)$ は $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ で $(e_1 - e_2 - \frac{1}{2})$ 次の order

(証明は P. 参照)

Theorem 3.

 Λ, Λ' good Lagrangian

$$T_P(\Lambda \cap \Lambda') = T_P \Lambda \cap T_P \Lambda'$$

for $\forall P \in \Lambda \cap \Lambda'$

$$\Rightarrow \ell_\Lambda(s) = \left[(m-m')s + \frac{\mu-\mu'+1}{2} \right]^{m-m'} \cdot \ell_{\Lambda'}(s)$$

Proof) $m \geq m'$ のとき まず $\ell_{\Lambda'}(s) \mid \ell_\Lambda(s)$ を示そう.
 そのためには $(s-\alpha)^k \mid \ell_{\Lambda'}(s) \rightarrow (s-\alpha)^k \mid \ell_\Lambda(s)$ を示せば

よい。 まず $k=1$ のとき

$$\text{lemma 1. } \ell_{\Lambda'}(\alpha) = 0 \rightarrow \ell_\Lambda(\alpha) = 0$$

$$\because P_{\Lambda'} \nmid u_s = \ell_{\Lambda'}(s) u_s \text{ かつ } \nmid u_\alpha = 0 \text{ on } \Lambda'$$

$$\text{もし } \ell_\Lambda(\alpha) \neq 0 \text{ なら } P_\Lambda \nmid u_\alpha = \ell_\Lambda(\alpha) u_\alpha \neq 0 \text{ かつ}$$

$$\nmid u_\alpha \neq 0 \text{ on } \Lambda. \quad \therefore \text{supp } \mathcal{P}(\nmid u_\alpha) = \Lambda$$

$$\bullet \mathcal{P} u_\alpha \supset \mathcal{P} \nmid u_\alpha \text{ は } \Lambda \text{ に support をとる } \mathcal{P}\text{-module}$$

$$\Leftrightarrow (m-m')\alpha + \frac{\mu-\mu'-1}{2} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\bullet \mathcal{P} u_{\alpha+1} \rightarrow \mathcal{P} \nmid u_\alpha \rightarrow 0 \text{ は } \Lambda \text{ に support をとる quotient}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$u_{\alpha+1} \mapsto \nmid u_\alpha$$

$$\Leftrightarrow -(m-m')(\alpha+1) - \frac{\mu-\mu'+1}{2} \in \mathbb{Z}_+$$

$$\therefore -(m-m')-1 \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{矛盾} \quad //$$

lemma 2. $(s-\alpha)^k \mid \ell_{\Lambda}(s)$, $(s-\alpha)^k \mid \ell_{\Lambda'}(s)$

$$\Rightarrow \exists G \text{ s.t. } \dagger u_s = (s-\alpha)^k G u_s$$

sublemma. $G u_{\alpha} = 0 \Rightarrow \exists T \text{ s.t. } G u_s = (s-\alpha) T u_s$

$$\therefore G u_{\alpha} = 0 \iff G = \sum T_j (\langle A_j x, D_x \rangle - \alpha \delta \chi(A_j))$$

$$\therefore G u_s = \sum (s-\alpha) \delta \chi(A_j) T_j u_s \quad //$$

lem 2 の証明) 帰納法. $\dagger u_s = (s-\alpha)^{k-1} G u_s = \ell_{\Lambda}(s) P_{\Lambda} u_s \text{ on } \Lambda$
 $= \ell_{\Lambda'}(s) P_{\Lambda'} u_s \text{ on } \Lambda'$

$$\therefore G u_s = \frac{\ell_{\Lambda}(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_{\Lambda} u_s \quad \text{on } \Lambda$$

$$= \frac{\ell_{\Lambda'}(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_{\Lambda'} u_s \quad \text{on } \Lambda'$$

$$\therefore G u_{\alpha} = 0 \quad \therefore \text{sublemma より } G u_s = (s-\alpha) G' u_s$$

$$\therefore \dagger u_s = (s-\alpha)^{k-1} \cdot (s-\alpha) G' u_s \quad //$$

lemma 3. $(s-\alpha)^k \mid \ell_{\Lambda'}(s)$, $(s-\alpha)^{k-1} \mid \ell_{\Lambda}(s)$

$$\Rightarrow (s-\alpha)^k \mid \ell_{\Lambda}(s) \quad (\text{i.e. } \ell_{\Lambda'}(s) \mid \ell_{\Lambda}(s))$$

$$\therefore \text{まず lem 2 より } \exists G \text{ s.t. } \dagger u_s = (s-\alpha)^{k-1} G u_s$$

$$\text{よって } G u_s = \frac{\ell_{\Lambda'}(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_{\Lambda'} u_s \quad \text{on } \Lambda'. \quad \therefore G u_{\alpha}|_{\Lambda'} = 0$$

さて $(s-\alpha)^k \nmid \ell_{\Lambda}(s)$ とすれば

$$G u_s = \frac{\ell_{\Lambda}(s)}{(s-\alpha)^{k-1}} P_{\Lambda} u_s \text{ on } \Lambda \quad \nexists G u_{\alpha}|_{\Lambda} \neq 0$$

よって $\mathcal{P}G\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{P}\mathcal{U}_\alpha$ は Λ に support をもつ submodule 中へ
 $(m-m')\alpha + \frac{\mu-\mu'+1}{2} \in \mathbb{Z}_+$

他方 $\mathcal{P}\mathcal{U}_{\alpha+1} \rightarrow \mathcal{P}G\mathcal{U}_\alpha$ は Λ に support をもつ quotient 中へ
 $\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{\alpha+1} & \xrightarrow{\psi} & G\mathcal{U}_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}_{\alpha+1} & \xrightarrow{\psi} & G\mathcal{U}_\alpha \end{array}$

$$-(m-m')(\alpha+1) - \frac{\mu-\mu'+1}{2} \in \mathbb{Z}_+ \quad \therefore -(m-m')-1 \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{矛盾} //$$

以上により $\ell_{\Lambda'}(s) | \ell_{\Lambda}(s)$ が示された。

さて lemma 2 より たゞちに

$$\begin{aligned} \text{lemma 2'} \quad & c(s) | \ell_{\Lambda}(s), \quad c(s) | \ell_{\Lambda'}(s) \\ \Rightarrow & \exists G \text{ s.t. } f\mathcal{U}_s = c(s) G\mathcal{U}_s \end{aligned}$$

を得るが, $\ell_{\Lambda'}(s) | \ell_{\Lambda}(s)$ 中へ

$$\exists G \text{ s.t. } f\mathcal{U}_s = \ell_{\Lambda'}(s) G\mathcal{U}_s$$

$$\text{そこで} \quad -(m-m')\alpha - \frac{\mu-\mu'+1}{2} = \ell \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{を仮定すると}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}\mathcal{U}_\alpha & \xrightarrow{\exists} & \mathcal{U} \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}_\alpha & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{U} \end{array} \quad (\text{supp } \mathcal{U} = \Lambda)$$

$$\text{次に } -(m-m')(\alpha+1) - \frac{\mu-\mu'+1}{2} = \ell - (m-m') < 0 \quad \text{を}$$

仮定すると $\mathcal{W}\mathcal{U}_{\alpha+1}$ は Λ に apt をもつ quotient が無いから

$$\mathcal{P}G\mathcal{U} = 0 \quad \therefore G\mathcal{U} = 0$$

$$\therefore G\mathcal{U}_\alpha|_{\Lambda} = 0 \quad (\mathcal{W}\mathcal{U}_\alpha \text{ と } \mathcal{U} \text{ は } \Lambda \text{ の}$$

gen. pt の近傍で同型中へ)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}\mathcal{U}_\alpha & \rightarrow & \mathcal{U} \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}_{\alpha+1} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{P}G\mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{P}G\mathcal{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}_{\alpha+1} & \xrightarrow{\psi} & G\mathcal{U}_\alpha \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{さて } f u_s &= \ell_\lambda(s) P_\lambda u_s \\ &\parallel \\ &\ell_{\lambda'}(s) G u_s \end{aligned}$$

$$\therefore G u_s = \frac{\ell_\lambda(s)}{\ell_{\lambda'}(s)} P_\lambda u_s$$

$$\text{よして } G u_\alpha|_\Lambda = 0 \text{ より } (s-\alpha) \mid \frac{\ell_\lambda(s)}{\ell_{\lambda'}(s)}$$

$$\begin{aligned} \text{結局 } &-(m-m')\alpha - \frac{\mu-\mu'+1}{2} = \ell \\ &\ell = 0, 1, \dots, m-m'-1 \end{aligned} \Rightarrow (s-\alpha) \mid \frac{\ell_\lambda(s)}{\ell_{\lambda'}(s)}$$

が証明された。 すなわち

$$\prod_{\ell=0}^{m-m'-1} \left(s + \frac{1}{m-m'} \left(\frac{\mu+\mu'+1}{2} + \ell \right) \right) \ell_{\lambda'}(s) \mid \ell_\lambda(s)$$

よって $\ell_\lambda(s)$ は m 次, $\ell_{\lambda'}(s)$ は m' 次 かつ

次数を比べて一致することがわかる。

$[\alpha]^m = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+m-1)$ という記号を使えば

$$\ell_\lambda(s) = \ell_{\lambda'}(s) \left[(m-m')s + \frac{\mu-\mu'+1}{2} \right]^{m-m'} \pmod{\text{const.}}$$

// Th 3.

Th. $\pi\mathcal{L} = \mathcal{P}u$ m.o.s. $\Rightarrow$ symbol ideal π^*
reduced, $\text{support} = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$

1) (交りの近傍で) Λ_0 は non-singular

2) $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$ $(n-1)$ 次元

3) $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \subset W^{n+1}$ non-singular

$\Rightarrow$ quantized contact transformation で 次の形
に変換される。

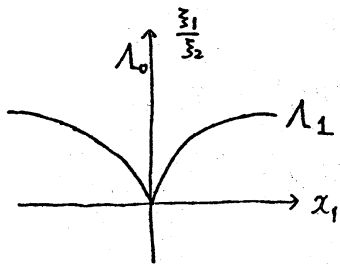
$$\left(\frac{1}{n+m} x_1 D_1 + \frac{1}{m} x_2 D_2 - \lambda \right) u = 0$$

$$[x_1 (D_1^m - x_1^n D_2^m) + \mu D_1^{n-1}] u = 0$$

$$D_3 u = \dots = 0$$

$$\Lambda_0 = \{ x_1 = x_2 = \xi_3 = \xi_4 = \dots = 0 \}$$

$$\Lambda_1 = \left\{ x_2 + \frac{m}{n+m} x_1 \frac{\xi_1}{\xi_2} = 0, \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^m = x_1^n, \xi_3 = \dots = 0 \right\}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} m=1 \rightarrow \text{どんな } n \text{ でも同型ゆえ } n=1 \text{ と解釈} \\ m \geq 2 \\ n \geq 1 \end{array} \right. \quad (m, n) = 1$$

n, m の求め方 を考えよう。

symbol ideal を $\mathcal{J}$ とすると

$$J = \left(\frac{1}{n+m} x_1 \xi_1 + \frac{1}{m} x_2 \xi_2, x_1 (\xi_1^m - x_1^n \xi_2^m), \xi_3, \xi_4, \dots \right)$$

$$J \ni f = \varphi_1 \left(\frac{1}{n+m} x_1 \xi_1 + \frac{1}{m} x_2 \xi_2 \right) + \varphi_2 x_1 (\xi_1^m - x_1^n \xi_2^m) \\ + \varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4 + \dots$$

$f|_{\Lambda_0} = 0$ ゆえ H_f を Λ_0 上の vector field と考える
ことができる.

$$H_f = \left(-\frac{\varphi_1}{m+n} \xi_1 + \varphi_2 \xi_1^m \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\varphi_1}{m} \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \dots$$

on Λ_0

さて一般に X mfd, $u = \sum a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ を $P \in X$ で
0 になる P の近傍で def された vector field とすると

$$\begin{array}{ccc} A_u: T_P X & \longrightarrow & T_P X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\partial}{\partial x_j} & \longmapsto & \sum \frac{\partial a_k}{\partial x_j}(P) \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ w & \longmapsto & [w, u](P) \end{array}$$

と作用する.

さて $S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ とし $P \in S$ gen. pt とすると

$T_P \Lambda_0 \supset T_P S$ であるが

$$S = \{x_1 = x_2 = \xi_1 = \xi_2 = \dots = 0\} \quad \text{ゆえ}$$

$$(H_f)_p \equiv -\frac{\varphi_1(p)}{m} \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \equiv -\frac{\varphi_1(p)}{m} \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \pmod{T_p S}$$

$$\therefore (H_f - a \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j})_p \in T_p S \quad (a = -\frac{\varphi_1(p)}{m})$$

ここで $(H_f - a \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j})_p = 0$ (i.e. $\varphi_2(p) = \dots = 0$) を仮定すると

$$A_{H_f - a \sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}} : T_p \Lambda_0 / T_p S \hookrightarrow$$

↑ 1次元 vector space!

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \mapsto \left(-\varphi_1(p) \left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m} \right) + m \sum_{i=1}^{m-1} \varphi_2(p) \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1}$$

よって $A_{H_f - a \sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}} : T_p \Lambda_0 / T_p S \hookrightarrow$ の固有値を α とおくとき

$$1) \ m=1 \Rightarrow \alpha \text{ は不定}$$

$$2) \ m>1 \Rightarrow \alpha = m a \left(\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m} \right)$$

$$\text{i.e. } \frac{\alpha + a}{a} = \frac{m}{m+n}$$

a と α は計算可能な量ゆえ m と n が $(m, n) = 1$ という条件より定まる.

$$\text{特に } \Lambda_0 = T_{G^* x_0} V = \overline{G(x_0, y_0)} ;$$

$$\Lambda_1 = T_{G^* x_1} V = \overline{G(x_1, y_1)},$$

$$S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1 = \overline{G(x_0, y_1)}$$

$\{ \langle Ax, y \rangle \mid A \in \mathcal{O}_f \}$ の生成する ideal $= J_{\Lambda_0 \cup \Lambda_1}$ のとき

考えよう.

$$f = \langle Ax, y \rangle \quad A \in \mathcal{M} \quad \text{に対し}$$

$$H_f = \langle Ax, D_x \rangle - \langle {}^tAy, D_y \rangle$$

$$A_1 x_0 = 0, \quad -{}^tA_1 y_1 = y_1 \quad \text{なる } A_1 \text{ なる}$$

$$f \text{ を } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ と } (H_f)_P = \langle y, D_y \rangle_P$$

$$\therefore a = 1.$$

$$A_{H_f - \langle y, D_y \rangle} = A_{\langle Ax, D_x \rangle - \langle ({}^tA+1)y, D_y \rangle}$$

$$= \begin{pmatrix} A \\ -({}^tA+1) \end{pmatrix} \quad V \times V^* \rightarrow V \times V^*, \quad \text{を } T_P \Lambda_0 \text{ に}$$

制限したものを考える.

$$T_P \Lambda_0 / T_P S = V_{x_0}^* / \mathcal{O}_{x_0} y_1 \hookrightarrow -({}^tA_1 + 1)$$

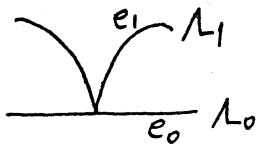
$-{}^tA_1$ の $V_{x_0}^* / \mathcal{O}_{x_0} y_1$ での固有値を β とすると

$$\alpha = \beta - 1, \quad \frac{\alpha + a}{a} = \frac{m}{m+n} \quad \text{ゆえ}$$

$$\boxed{\beta = \frac{m}{m+n}}, \quad (m, n) = 1 \quad \text{を得る.}$$

β が不定 $\Leftrightarrow m=1 \Leftrightarrow \text{transversal に交わる.}$

さて $m \geq 2$ のとき, e -関数を決定しよう。



$$\text{ord}_{\Lambda_0} u = e_0, \quad \text{ord}_{\Lambda_1} u = e_1$$

次のことが知られている。

Theorem. 1) $\sigma_{\Lambda_0}(u)$ は $S = \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ で $(\frac{(n+m)(e_0 - e_1)}{n+1} - \frac{m}{2})$ 位の zero

2) Λ_0 に support をもつ submodule がある

$$\Leftrightarrow \frac{(n+m)(e_1 - e_0)}{n+1} - \frac{m}{2} = \ell \in \mathbb{Z}_+$$

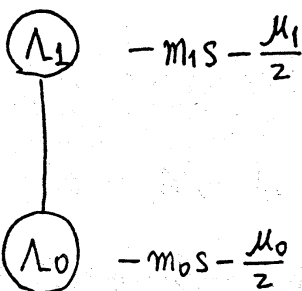
$$\text{かつ } \ell \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$$

3) Λ_0 に support をもつ quotient がある

$$\Leftrightarrow \frac{(n+m)(e_0 - e_1)}{n+1} - \frac{m}{2} = \ell \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{かつ } \ell \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$$

(証明略)



$$\sigma(u) = f_{\Lambda}^s \sqrt{\omega_{\Lambda}}$$

$$\begin{cases} -s\lambda = a_1 s\rho_1 + \dots \\ \text{tr}_{V_{\lambda_0}^*} = c_1 s\rho_1 + \dots \end{cases}$$

$$\Lambda_0 = \overline{G(x_0, y_0)}, \quad \Lambda_1 = \overline{G(x_1, y_1)}$$

$$S = \overline{G(x_0, y_1)}$$

$$g_1 : V_{x_0}^* \text{ の既約 rel min s.t. } g_1(y_1) = 0$$

$$\text{そのとき } f_\Lambda = g_1^{-a_1} \dots \quad \omega_\Lambda = g_1^{-2c_1} \dots$$

よって $\sigma_{\Lambda_0}(u)$ の S における zero の order

$$= -a_1 S - c_1 = \frac{n+m}{n+1} \left((m_1 - m_0) S + \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} \right) - \frac{m}{2}$$

$$\star \begin{cases} \frac{n+m}{n+1} = \frac{a_1}{m_0 - m_1} \\ m = 2c_1 - \frac{a_1(\mu_0 - \mu_1)}{(m_0 - m_1)} \end{cases} \quad \text{なる関係がある。}$$

以下 $m_1 < m_0$ を仮定しよう。

まず $\ell_{\Lambda_1}(S) \mid \ell_{\Lambda_0}(S)$ を証明する。

必要な条件を列挙しよう。

- ① $\pi \zeta_S = \mathcal{P} f^S$ が Λ_0 に support をもつ quotient がある
 $\Leftrightarrow -a_1 S - c_1 = \ell \in \mathbb{Z}_+, \ell \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$
- ② $\pi \zeta_S = \mathcal{P} f^S$ が Λ_0 に support をもつ submodule がある
 $\Leftrightarrow a_1 S + c_1 - m = \ell \in \mathbb{Z}_+, \ell \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$

$\ell_{\Lambda_1}(s) \mid \ell_{\Lambda_0}(s)$ を示すには

$$\star \quad C(s) \mid \ell_{\Lambda_j}(s) \quad (j=0,1), \quad C(s)(s-\alpha) \mid \ell_{\Lambda_1}(s)$$

$$\Rightarrow C(s)(s-\alpha) \mid \ell_{\Lambda_0}(s) \quad \text{をいえばよい.}$$

そうではないとすれば, 前と同様にし

$$\neq u_s = C(s) \equiv G u_s, \quad \neq u_s = \ell_{\Lambda_1}(s) P_{\Lambda_1} u_s$$

$$G u_s = \frac{\ell_{\Lambda_1}(s)}{C(s)} P_{\Lambda_1} u_s, \quad G u_s = \frac{\ell_{\Lambda_0}(s)}{C(s)} P_{\Lambda_0} u_s$$

$$\Rightarrow G u_s|_{\Lambda_1} = 0, \quad G u_s|_{\Lambda_0} \neq 0$$

$$P u_s > P G u_s, \quad \text{supp } P G u_s = \Lambda_0 \quad \therefore a_1 d + c_1 - m \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{他方 } P u_{s+1} \rightarrow P G u_s, \quad \text{quotient が存在. } \therefore -a_1(d+1) - c_1 \in \mathbb{Z}_+$$

Λ_0 に opt とも

$$\therefore -a_1 - m \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{矛盾.} \quad //$$

↑ 前頁 $\star$ と仮定 $m_1 < m_0$ より $a_1 > 0$ に注意!

$$\text{さて } -a_1 d - c_1 = l \in \mathbb{Z}_+, \quad l \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$$

$$\text{とすると } \pi \tau_d \rightarrow \tau \rightarrow 0$$

$$\neq u_s = \ell_{\Lambda_1}(s) G u_s, \quad \begin{array}{ccc} \tau_d & \longrightarrow & \tau \\ \downarrow & & \downarrow \\ u_d & \longrightarrow & v \end{array} \quad \text{support } \tau = \Lambda_0$$

$$\text{よって } \pi \tau_{d+1} \longrightarrow \pi \tau_d \longrightarrow P G v \quad \text{を考えると}$$

$$\begin{array}{ccccc} \tau_{d+1} & \longrightarrow & \tau_d & \longrightarrow & P G v \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ u_{d+1} & \longrightarrow & G u_d & \longrightarrow & G v \end{array}$$

$P_G u$ は $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ の Λ_0 に support をもつ quotient である。

ここで, 更に $-a_1(\alpha+1)-c_1 = l-a_1$, $l-a_1 \notin \mathbb{Z}_+$
 or $l-a_1 \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$
 を仮定すれば,

$\mathcal{M}_{\alpha+1}$ は Λ_0 に support をもつ quotient は存在しないから

$G u = 0 \quad \therefore G u|_{\Lambda_0} = 0 \quad (\because \Lambda_0$ においては
 $\mathcal{M}_{\alpha}$ と $\mathcal{M}$ は同型)

$$f u_s = \ell_{\Lambda_1} G u_s = \ell_{\Lambda_0}(s) P_{\Lambda_0} u_s$$

$$\therefore G u_s = \frac{\ell_{\Lambda_0}(s)}{\ell_{\Lambda_1}(s)} P_{\Lambda_0} u_s \quad \text{on } \Lambda_0$$

$$\therefore (s-\alpha) \mid \ell_{\Lambda_0}(s) / \ell_{\Lambda_1}(s)$$

結局

Proposition 1) $-a_1\alpha - c_1 = l \in \mathbb{Z}_+$, $l \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$

かつ 2) $l-a_1 \notin \mathbb{Z}_+$ or $l-a_1 \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$

$$\Rightarrow (s-\alpha) \mid \ell_{\Lambda_0}(s) / \ell_{\Lambda_1}(s)$$

が 証明された。

この条件 1), 2) を 詳しく 調べて みよう。

lemma. $a_1 \equiv 0 \pmod{n+m}$

$\therefore$ $a_1 \equiv c' \pmod{n+m}$, $0 < c' < n+m$ と仮定すると

$c' = l_1 + l_2$, $0 \leq l_1 \leq n$, $1 \leq l_2 \leq m-1$ と表わせるが

$$l_1 \equiv 0, 1, \dots, n, \quad l_1 - a_1 \equiv -l_2 \not\equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}$$

ゆえ $l = l_1 + k(n+m)$, $k \geq 0$ なる勝手な l (k もうごかす) が解になり l -関数の因子が無限々になり矛盾 //

このことより 1), 2) の条件は

$$l \equiv 0, 1, \dots, n \pmod{n+m}, \quad l - a_1 \notin \mathbb{Z}_+, \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

となる.

$$\therefore l \equiv 0, 1, \dots, n, \quad 0 \leq l < a_1 = c(n+m)$$

$\uparrow \equiv c$ (by lemma)

$$\therefore l = 0, \dots, n$$

$$m+n, \dots, m+2n$$

$$2(m+n), \dots, 2(m+n)+n$$

$$(c-1)(m+n), \dots, (c-1)(n+m)+n$$

$$\therefore -c(n+m)\alpha - c_1 = k + \nu(m+n)$$

$$k = 0, \dots, n, \quad \nu = 0, \dots, c-1$$

$$\therefore -\alpha = \frac{k + \nu(n+m) + c_1}{c(n+m)}$$

$$\therefore b_{\lambda_1}(s) \prod_{k=0}^n \prod_{\nu=0}^{c-1} \left(s + \frac{k + \nu(n+m) + c_1}{c(n+m)} \right) \mid b_{\lambda_0}(s)$$

$$\text{但し } a_1 = c(n+m)$$

$$\therefore b_{\lambda_1}(s) \prod_{k=0}^n \left[cs + \frac{c_1 + k}{n+m} \right]^c \mid b_{\lambda_0}(s)$$

$$m_1 + c(n+1) = m_1 + m_0 - m_1 = m_0$$

$$\therefore \text{p41の} \star \text{より } c = \frac{m_0 - m_1}{n+1}$$

よって両辺の次数が一致するから

$$b_{\lambda_1}(s) \prod_{k=0}^n \left[cs + \frac{c_1 + k}{n+m} \right]^c = b_{\lambda_0}(s) \quad //$$