

近似解法—Oseen 近似, 境界層近似等について

京大 工 玉 田 琰

非圧縮性粘性流体 (Newton 流体とする) の一様な流れの中に物体が置かれた場合の定常的な流れについて考える。流速を $\mathbf{q} = (u, v, w)$, 圧力を P とすれば流体の運動は連続の式 (質量保存則)

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \quad (1)$$

及び Navier-Stokes の運動方程式 (運動量保存則)

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -\operatorname{grad} P + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{q} \quad (2)$$

によって定められる。ただし $\mathbf{q}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, P はそれぞれ一様流速 U , 物体の代表長 a (球の半径など) 及び ρU^2 (ρ は流体の密度 (一定)) で無次元化するものとする。

また $R = Ua/\nu$ (ν は動粘性係数) は Reynolds 数である。境界条件は, 物体面上で $\mathbf{q} = 0$, 無限遠で $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{i}$ (一様流方向の単位ベクトル) である。

1) 低 Reynolds 数の流れ

$R \ll 1$ の流れにおいて (2) の左辺 (慣性項) を無視する近似を Stokes の近似という ($\Delta \varphi = 0$ とする近似は境界条件をみにも解がないので採用できない)。Stokes は球のまわりの流れをこの近似で取り扱い (1851) 有名な球の抵抗則 $D = 6\pi\eta a v$ を得た。この近似を高める一法として、無視した左辺に Stokes の解を代入し、結果の非同次方程式を解くことが考えられる。このとき各段階の境界条件は R によらないで、このような逐次近似の解は R 展開の形をとるであろう。Whitehead は球の場合にこの方法を適用した (1889) が、補正項は無限遠で一樣流を乱してしまうことを見出した (Whitehead の paradox)。特に、円柱などの 2 次元問題では、Stokes の解自身が無限遠で対数的に発散する速度場を与えることが知られている (Stokes の paradox)。

Oseen はこの問題を考察し次のような解決を与えた (1910)。すなわち、球のような 3 次元物体の場合において、物体の受ける抵抗が有限であるということは物体による流速の変動が遠方で r^{-2} (r は物体からの距離) の程度でなければならないことを意味する (物体を中心とする大きい球面に運動量則を適用すればわかる)。従って (2) の左辺は r^{-3} 、右辺第 2 項は $R^{-1}r^{-4}$ の程度となるから、 $Rr = O(1)$ の場所では両者同程度となり、 $Rr \gg 1$ ではかえって Stokes 近似

で無視した) 左辺の方が優越することになる。これが上記の paradox の原因であるので, これを解消するためには遠方で慣性項 (左辺) の影響をとり入れなければならない。然るに遠方では

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \sim \mathbf{i} \cdot \nabla \quad (3)$$

とすることができるので, このように簡単化された慣性項 (線型!) をとり入れるのが Oseen の近似方式である。物体の近くでは (3) は不適当となるが, そのあたりでは粘性項 (右辺第2項) と圧力項が優越する (すなわち Stokes 方程式に移行する) ので (3) は全領域を通じ用いてよろしい。

Oseen はこの方法により球も, 円柱もうまく取扱えることを示した。この近似の精度を高めるには, やはり無視した項に前段の解を代入して解き直す逐次近似が考えられる (方程式は Oseen 方程式に既知項が加わった非同次型)。今度は場全体で uniformly valid な解を補正に使うので近似は順調に進むものと期待される。この逐次近似は解を

$$\mathbf{q} = \mathbf{i} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \cdots, \quad (\mathbf{q}_1: \text{Oseen の解}) \quad (4)$$

のように一様流からの perturbation として解くことと同等である (Stokes 近似は静止からの perturbation)。第2次近似までの解析は今井 (円柱), 橋本 (球) によって行なわれたが, 何れも途中の計算はかなり複雑になるようである。

Proudman と Pearson (1957) は同じ問題をいわゆる singular perturbation の方法によって取り扱った。すなわち、流れの領域を物体の比較的近傍と遠方の2つに分け、前者に対しては Stokes 型の展開

$$\psi = \sum_n f_n(R) \psi_n(r, \theta)$$

後者に対しては Oseen 型の展開

$$\psi = \sum_n F_n(R) F_n(RY, \theta)$$

を仮定する。ただし r, θ は極座標 (球や円柱を対象として), ψ は流れの関数, また $R \rightarrow 0$ に対し $f_{n+1}/f_n \rightarrow 0$, $F_{n+1}/F_n \rightarrow 0$ とする ($f_n(R), F_n(R)$ はおよそ R^n に相当).

Oseen 型の展開では、座標の縮小が行なわれ、遠方が有限の場所にひき寄せられている (このとき物体 $\rightarrow$ 点) ことが要点である (singular perturbation). これらの展開形がそれぞれ (2) を満たすことを要求し、また前者には物体表面の条件、後者には無限遠の条件を課する。何れもなお未定部分が残るが、両者を r 大, Rr 小において接続 (Matching) することによって解は確定する。このようにして Proudman-Pearson は球の抵抗 D につき

$$D = 6\pi\mu a U \left(1 + \frac{3}{8}R + \frac{9}{40}R^2 \log R + O(R^2) \right) \quad (5)$$

のような結果を得た。ここに第一項は Stokes の結果、第二項は Oseen の補正、第三項が $P-P$ の新しい結果で

ある。同様の方法は Lagerstrom と Cole, Kaplan 等 によっても論ぜられ、また問題を円柱などの2次元流れのオー
近似に限ると、次のように解法を要約することができ(玉
田 1957)。すなわち、遠方で妥当な Oseen 方程式の、物体
による攪乱をあらわす漸近解は

$$u - iv \sim 1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{-i\theta} + e^{i\cos\theta} \left\{ \bar{\alpha} K_0(\beta) + \alpha K_1(\beta) e^{-i\theta} \right\} \quad (6)$$

$\beta = Rr/2$, (r, θ) は極座標, K_n は変形 Bessel 関数,

α は未定数

のように与えられるが、これを $Rr \ll 1$ として展開すると

$$u - iv \sim -\bar{\alpha} \log r + \frac{\alpha}{2} e^{-2i\theta} + \frac{\alpha}{2} + 1 + \bar{\alpha} \left(\log \frac{2}{R} - \gamma \right) \quad (7)$$

($\gamma = 0.577 \dots$ は Euler の定数)。これはらうと Stokes 方程式の解になっているので、 $r \gg 1$ で(一様流に漸近することを要求する代りに)この形に接続するように Stokes 方程式を解けばよいわけである(未定数 α は接続で定まる)。柱の断面形の影響は Stokes 領域の中で丸められるから、昇角写像等の手段を併用すれば、任意柱のまわりの2次元流れを、Stokes 方程式だけで取扱えることになる。

Navier-Stokes 方程式は非線型で数学的困難が大きいので、Oseen 方程式を($R \ll 1$ のみならず)すべての R につ

いての $N-S$ 方程式の一つの模型（その粘性項は厳密であり，慣性項は遠方領域では正しい。又境界条件はすべて厳密に考慮される。）として採用し， R について高次の補正項を求め，或は $R \gg 1$ に対する流れの漸近的性質を考察しようという行きかにもある。前者については例えば球に関する Goldstein の研究（1929），円柱に関する 友近，青井の研究（1950）などがよく知られている。

なお，低 Reynolds 数の流れに於ては，物体相互間の干渉が大きく，同時に存在する数個の物体の受ける抵抗の総和は，単独物体の抵抗とあまり変わらない等の興味ある結果が知られている。同じ理由で容器壁の影響を調べることも重要であるが，ここではこれらの問題には立ち入らない。

2) 中程度の Reynolds 数の流れ

Reynolds 数が大きくも小さくもない中間的な場合には， R 数による極限単純化ができないので $N-S$ 方程式の解析的取扱は困難になる。そこで一般には $N-S$ 方程式を対応する差分方程式で置かえ，多変数方程式を数值的に解く（方程式が楕円型であるため，然るべき近似解から出発し，くり返し修正によって次第に本当の解に近づく）方法が用いられる。Thom は円柱の場合に $R=20$ に対する解を求め（1933），その後川口，高見によってさらに大きく R に対する解が与

えられた。又、最近 From は流れに垂直に置かれた平板の場合を取扱い、Kármán 渦列を含む興味ある解を得ている。

電子計算機の発達に伴ない、この種の計算（数値実験）は今後益々成果を挙げるものと期待されるが、ここでは詳細にはふれない。

3) 高 Reynolds 数の流れ

Reynolds 数 R が大きい場合、 $N-S$ 方程式 (2) の右辺第二項（粘性項）を単純に無視すると、完全流体に対する Euler の方程式が得られる（このとき方程式の階数が低下する）。

Kelvin の定理により、上流で一様流であるような非圧縮性完全流体の流れはいたるところ渦なしであるが、このような流れは、無限遠の条件と物体面で法線速度 = 0 の条件だけで定まってしまう、物体面での接線速度は一般に 0 でない有限値に確定する。つまり流体は物体面をすべり流れる。これは粘性流体としては不都合な結果であるが、今は $R \rightarrow \infty$ の極限を考えているのであるから、不連続の発生が予想され、流速は物体面で上記の有限値から 0 に飛躍するものと解釈すればよい。 R が大きいながら有限であるような場合には、この不連続は急峻な連続的变化をする薄い層（境界層）となることが期待される（圧縮性流体中の衝撃波と同様、小さい粘性係数に大きい勾配が掛って粘性力有限）。この層の外部では

速度勾配は小さいから粘性項は無視され、流れは完全流にのみみなされる（主流）。一方、境界層内の流れに対しては、物体面（簡単のため柱状物体のまわりの2次元流を考える）にそうて x , 垂直に y をとり、 $N-S$ 方程式の粘性項と慣性項とが同程度となるように $y = \sqrt{R} \eta$ によって η 座標を拡大し（境界層の厚さは $1/\sqrt{R}$ の程度であることが示される）、また y 方向の速度成分も $\tilde{v} = \sqrt{R} v$ のように拡大して考える（ v の拡大率は連続の式から定まる）。その結果、微小項を落すと $N-S$ 方程式は次の境界層方程式で近似され

よ:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{x方向運動方程式}) \\ p(x) \cong \text{主流の表面値} \quad (y \text{ " " }) \quad (8) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{連続の式}) \end{array} \right.$$

境界条件は $y=0$ で $u=\tilde{u}=0$, $y \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow$ 主流
表面速度である. すなわち主流の解と境界層解とを境界層外
縁 (主流からみれば物体表面, 境界層からみれば $y \rightarrow \infty$)
で接続する. これが Prandtl (1904) によって創案された境
界層理論であるが, 数学的には特異摂動法の典型である. 方
程式 (8) 及び境界条件は R を含まないから解は R に無関
係に定まる (もとの変数系では $y = \sqrt{R} \eta$, $\tilde{u} = \sqrt{R} v$ により
 R が入る). 特に後述の別離点の位置は R によらず一定して

いる。またもとの $N-S$ 方程式は楕円型であるが、境界層方程式は放物型となり、解は下流に向って定まって行く（下流の影響が上流に及ばない）。

境界層内の流れをもう少し具体的に知るために、流速 U の一様流に平行に置かれた平板の場合（Blasius, 1908）を取上げてみよう。この場合明らかに主流（非粘性）は一様流のままである。また上記の性質により平板の長さは半無限であると考えて差し支えない。

そうすると物体の代表長はないから、板の先端からの実距離を x とすると、 U , ν と共に作られる長さ $\sqrt{\nu x / U}$ が、位置 x における基準長となるであろう。そして流速 u/U の y 方向分布（ y は壁からの実距離）は $\eta = y / \sqrt{\nu x / U}$ の関数となるであろう（相似解）。よって、

$$u = U f'(\eta) \quad (\text{dash は } \eta \text{ についての微分}) \quad (9a)$$

と仮定すれば連続の式より

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - \eta^2) \quad (9b)$$

これらと $dp/dx = 0$ （主流は一様流）と共に境界層方程式に入れると f に関する非線型常微分方程式

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (9c)$$

が得られる。また境界条件は $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = 1$ と

なる。

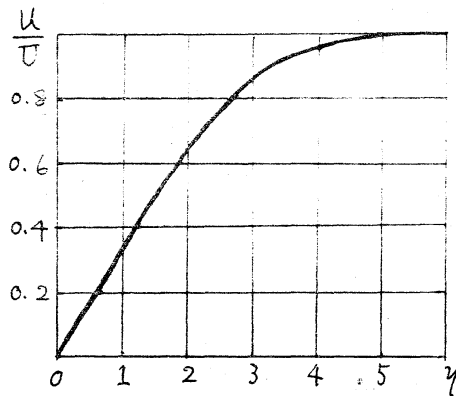


図1 平板境界層の速度分布

これらの条件のもとに方程式(9c)を数値的に解いた結果を図1に示す。流速は境界層内ですみやかに立ち上り、指数関数的に主流値に漸近することがわかる。

なお、(9b)によれば $v = O(\sqrt{\nu}) \ll u$ であるが、板の先端 $x=0$ ($\eta \rightarrow \infty$) ではこの関係は破れ、これにもとづいている境界層近似は妥当でなくなる。(境界層の相似解は一般に同様の特異性をもつ。) 先端附近の正しい流れは $N-S$ 方程式に立ち返って考察しなければならないが、先端のごく近傍では流速が非常に小さいので、再び慣性項を省略し、Stokes 近似を適用することができる。そして得られた Stokes 解に含まれる任意定数を前記の境界層解に接続するように定めると、一応の先端補正が得られる。このような計算は Carrier と Lin (1948) によって行なわれた。

$\eta \rightarrow \infty$ における条件からわかるように境界層解の u (接線速度) は主流と合わせられるが、 v (法線速度、主流では零) は境界層外縁で (ν につき高次ながら) 一方的に定ま、

てしまう。これは境界層内の接線速度の欠損のはね返りであ
って、次の近似の段階ではこれに見合うように主流を修正し
なければならぬことを意味する（境界層の排除効果）。

境界層の ψ -近似の計算は一般に複雑困難であるが、流れに
平行な平板の場合、Kuo (1953) は $P-L-K$ 法によって
主流及び先端補正にもとづく境界層の ψ -近似解を求めるこ
とに成功している。

既述の Oseen の近似は、 $u \simeq U$, $v \simeq 0$ とするのであ
るから平板に平行な、Reynolds 数の大きい流れに特に適し
ているように思われる。Piercy と Winny (1933) は Oseen
方程式の基本解 (6) に対応する流れの関数、但し x 軸につ
き対称な場合)

$$\begin{cases} \psi_d = \int_0^y \left[Re^{Rx} \left\{ K_0(Ry) + \frac{x}{y} K_1(Ry) \right\} - \frac{x}{y^2} \right] dy \\ \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R = U(l/2)/\nu \end{cases} \quad (10)$$

(l は板の長さ) を板の上に分布させて変動場に対する解

$$\psi = \int_0^1 \psi_d(x-\xi, y) f(\xi) d\xi \quad (11)$$

を作り、板の上の境界条件 $U + \partial\psi/\partial y|_{y=0} = 0$ ($0 < x < 1$)

から $f(\xi)$ に対する積分方程式を導びき、 $R \ll 1$ 及び

$R \gg 1$ のそれぞれの場合について近似解を求めた。特に、

$R \gg 1$ に対する解は $R^{-1/2}$ 展開の ϵ 二項 (境界層 ϵ = 近似相当) まで求めている。なお彼等の ϵ 二近似解は板の後縁付近では正しくないこと及びその補正が最近報告されている (Seebass, 宮城, 玉田, 1966)。

円柱や球のような Blunt Body のまわりの R 数の大きい層流を正しく計算することは次に述べる境界層の別離の現象のために非常にむづかしい。例えば、円柱の場合完全流体の渦なし連続流を主流として、前方よどみ点から境界層を計算して行く (色々の計算法があるが本質的相違はなく、精度と手数の問題である) と円柱の頂上を越えにあたり (よどみ点から 110° 附近) で代数的特異点に到達し先へ進めなくなる。物理的にはここで境界層は物体面から別離し、流れの内部へ進入して行く。すなわち主流の中に不連続線が介在するわけで、最初に仮定した主流の連続性と矛盾する。つまり Blunt Body では主流そのものが始めからわからず、主流と境界層 (特に主流内の位置) とを同時にきめなければならないことになる。もっとも、翼断面などの流線型物体では別離点は物体の後端附近にあり、主流を渦なし連続流とみなしても境界層計算 (表面摩擦力の分布, 排除厚, 別離点の位置など) に大きい誤りは生じない。また実測による主流圧力分布にもとづく計算もよく行なわれる。Blunt Body に対する正しい主

流の型はまだわかってないが、物体の背後に死水領域を伴なう Helmholtz-Kirchhoff 型の不連続流 (図2) であろうと推測されている (別離点の位置は境界層理論に合わせる)。こ

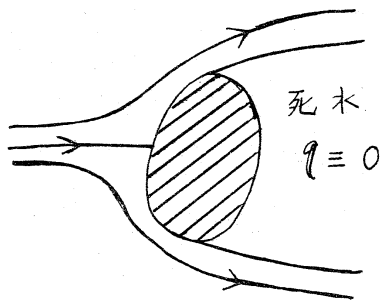


図 2

れが正しい主流であれば、大きいお返しなしにその不連続線と境界層理論でばかすことができるはずである。これに関連して別離点附近の流れを表わす解を見出すことは重要な問題であ

るが、まだ完全に解決されてはいない。別離点附近では境界層近似 ($v \ll u$) はなりたになくなるものと予想されるが、

Landau は別離点 ($x=x_0, y=0$) 附近の境界層解のふる

まいを

$$\begin{cases} u \simeq u_0(y) + A u'_0(y) \sqrt{x_0 - x} \\ v \simeq \frac{A}{2} \frac{u_0(y)}{\sqrt{x_0 - x}}, \quad u_0(0) = u'_0(0) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

のように推定している。これは連続の式をみだし、境界層方程式の左辺2項の無限大が打消すように (右辺はおとなしいと予想して) きめられている。この結果別離流線は壁に垂直となる。実天度で壁に対し斜めにあるためには境界層の世界では壁に垂直でなければならないというわけである。Goldstein

(1948) はよりくわしく解の展開形を追求している。このように境界層解は別離点で代数的特異性を示すが、物理的に考えてこれに対応する $N-S$ 方程式の解は別離点附近で正則であることが期待される。これについては Dean (1949) の研究がある。特に別離点の極めて近傍では流れは殆んどよどんでいるから Stokes 近似をとると、次のような簡単な解 (

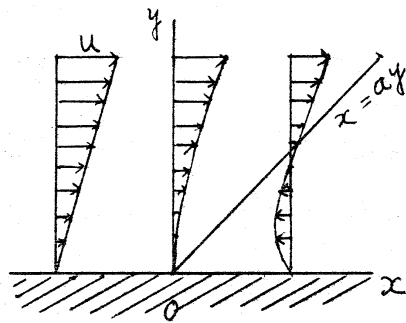


図 3

図 3) の存在が示される:

$$\psi = -y^2(x - ay) \quad a > 0 \quad (13)$$

$\partial \psi / \partial x = u \Delta \partial \psi / \partial y = 6\mu a > 0$ で、
流れの方向に圧力は上昇する。

Helmholtz-Kirchhoff 型の流れを粘性化する問題ではさらに、死水の上下の境界層が拡散して融合するあたりの解を求めることも必要である。はるか下流の単一後流域では再び境界層的解があることはよく知られている。

Oseen の近似で Blunt Body のまわりの高 Reynolds 数の流れを調べることは近似の性質上適当でないようにも思われるが、 $N-S$ 方程式の充分な研究が困難である以上、その一つの模型として $R \rightarrow \infty$ に対する Oseen 流を調べることは有用であると思われる。これは Oseen の漸近理論と呼ばれるものでその要点は次のようである: 2次元流の場合、

渦度 $\omega = \text{rot } \mathbf{q}$ について Oseen の方程式は (一様流方向を x とする)

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta \omega \quad (14)$$

この式で $R \rightarrow \infty$ とすれば $\partial \omega / \partial x = 0$, 従って $\omega = \omega(y)$.

物体面の境界条件は物体前面で法線速度 $q_n = 0$ (境界層が表面に収斂), 背面で $q_x = q_y = 0$ が適当であると考えられる. そこでまず前面で $q_n = 0$, 背面で $q_y = 0$ をみに有渦なしの速度場を求め, その背面上の $q_x(y)$ を打消すように

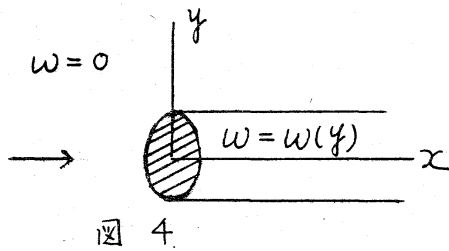


図 4

$-q_x(y)$ ($\omega = \omega(y)$ に対応する shear flow) を物体の後流域につけ加えれば所要の解が得られるわけである (図 4).

$\infty > R \gg 1$ に対してこの解を粘性化することは興味のある問題である (特に剥離点附近). 流れに垂直に置かれた平板の場合についてそのような計算が行なわれている (宮城, 玉田, 1962)

最後に, 実際の流れは Reynolds 数が大きくなると層流ではなく, 不規則に振動する非定常流となる. ところが, これを長時間平均すると興味ある平均流が得られ, 適当な仮想的粘性をもった粘性流体の定常流に対応させることができる. このような考えで実測とよく一致する抵抗則なども求められている (今井, 1957).

Refference

- I. Proudman & J.R.A. Pearson; J. Fluid Mech. 2(1957)
- K. Tamada; Proc. 9th. Int. Congr. Appl. Mech (1957)
- S. Goldstein; Proc. Roy. Soc. A 123(1929), 225
- Q. J. Mech. Appl. Math. 1(1948), 43
- S. Tomotika & T. Aoi; Q. J. Mech. Appl. Math. 3(1950), 140
- Thom; Proc. Roy. Soc. A 141(1933), 658
- H. Blasius; Z. Math. u. Phys. 56(1908)
- G. F. Carrier & C. C. Lin; Q. Appl. Math 6(1948)
- Y. H. Kuo; J. Math. Phys. 32(1953)
- N. A. V. Piercy & H. F. Winny; Proc. Roy. Soc. A 140(1933), 543
- R. Seebass, K. Tamada & T. Miyagi; Phys. Fluids 9(1966), 1697
- K. Tamada & T. Miyagi; J. Phys. Soc. Japan 17(1962), 373
- W. R. Dean; Proc. Camb. Phil. Soc. 46(1950), 293
- I. Imai; Tech. Note BN104-AD128412, Univ. Maryland (1957)