

水面波に関連するあるモデル方程式における砕波現象について

岐阜大学 工学部 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)
Faculty of Engineering, Gifu University

1 水面重力波における 2 種類の「解の破綻」

重力を復元力とする水面波に対しては 2 種類の「解の破綻」が知られている。1 つ目の破綻は、定常進行波解に関するものである。微小振幅の極限で単一の正弦波で表現される周期的な定常進行波解は、波高の増大とともに高調波を含む非線形解 (Stokes 波と呼ばれる) に移行する。この非線形解においては波高の増大とともに波のクレストが急峻化する一方で波のトラフは平坦化していく。そしてある振幅に達すると波峰の頂点は滑らかさを失い、120 度の角を持つに至る (peaking)。

¹ この限界波高を超える波高を持つ定常進行波解は存在しない。[1][2]

もう一つの「解の破綻」は波の非定常伝播に関するものである。海の波は海岸に近づくにつれ、波長に対して水深が浅い、いわゆる浅水波または長波と呼ばれる状態になる。長波の伝播速度は水深の平方根に比例するため、波のより高い部分はより速く伝播する傾向があり、したがって伝播に伴い波形の前面が急峻化し、最終的には微分係数が発散する砕波 (breaking) に至る。防波堤など構造物に波が当たる場合、波が砕波しているかどうかで加わる衝撃圧の大きさが大きく異なることが知られており、波の砕波・非砕波は工学上も重要な問題である。

peaking と breaking, これらはどちらも非線形水面波を特徴付ける大変興味深い現象である。浅水水面波に対するモデル方程式としては Korteweg-de Vries 方程式 (KdV)

$$u_t + c_0 u_x + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

がよく知られているが、この KdV 方程式では残念ながら peaking, breaking, いずれの現象も再現することができない。KdV 方程式には「KdV ソリトン」として有名な非常に安定なパルス的な定常進行波解が知られているが、そのパラメタである振幅の取りうる値の範囲に制限はない。また非定常な波形変形についても、初期波形が十分滑らかである限り、微分係数の発散が発生しないことが示されている。([4] およびその引用文献を参照されたい) このような背景から、Whitham は peaking と breaking の両者を再現できるような簡単なモデル波動方程式の可能性を模索していた。

2 Whitham 方程式

Whitham[3] は、KdV と同じ長波型の非線形項と、線形の積分項 (分散項) を持つモデル方程式

$$u_t + \alpha u u_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (2)$$

を提案した。

¹ 波長 λ に比べて水深が十分に深い場合、この限界振幅 a_c は 0.142λ 程度である。

2.1 線形分散関係

非線形項を除いた (2) に $u(x, t) = ae^{i(kx - \omega t)}$ を代入すると,

$$-i\omega ae^{i(kx - \omega t)} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) a i k e^{i(k\xi - \omega t)} d\xi = 0,$$

$$c(k) := \frac{\omega}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-ikx} dx. \quad (3)$$

したがって $K(x)$ として, 位相速度 $c(k)$ のフーリエ変換を採用することで, (2) に任意の線形分散関係を持たせることができる. ただし, $c(k)$ も $K(x)$ も実の偶関数, $c(-k) = c(k)$, $K(-x) = K(x)$ とする. 例えば, $K(x) = c_0 \delta(x) + \beta \delta''(x)$ とすれば, $c(k) = c_0 - \beta k^2$ となり, (線形)KdV 方程式

$$u_t + c_0 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (4)$$

に対応する.

2.2 保存則

$|x| \rightarrow \infty$ で十分速く減衰する $u(x, t)$ に対して, 以下の諸量は (2) の保存量となることが知られている:

- $I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx,$
- $I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx,$
- $I_3 := \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u^3}{3} + u \tilde{K} u \right] dx, \quad \text{where } \tilde{K} u := \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) u(\xi) d\xi,$

また重心 $X(t)$ を $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x u(x, t) dx / \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ により導入すると, $\frac{dX(t)}{dt} = \text{const.}$ が成り立つことが知られている. (重心速度一定)

2.3 Whitham が特に着目した $K(x)$

Whitham は特に

$$K(x) = K_W(x) = B e^{-b|x|} \quad (5)$$

の場合に着目した. 今後は特に $K(x)$ としてこの $K_W(x)$ を選択した方程式を「Whitham 方程式」と呼び, この方程式のみを対象とする. Whitham 方程式の線形分散関係は

$$c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} K_W(x) e^{-ikx} dx = \frac{2Bb}{k^2 + b^2}, \quad \omega(k) = \frac{2Bbk}{k^2 + b^2} \quad (6)$$

で与えられる.

また $K_W(x)$ は微分演算 $\left(\frac{d^2}{dx^2} - b^2 \right)$ の Green 関数で

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - b^2 \right) K_W(x - \xi) = -2bB \delta(x - \xi) \quad (7)$$

を満たすので、両辺にこの微分演算を作用することにより、Whitham 方程式は偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b^2\right)(u_t + \alpha uu_x) - 2bBu_x = 0. \quad (8)$$

に帰着させることができる。

なおこの Whitham 方程式に対しては peaking が起こる、すなわち定常進行波（周期&孤立）には限界波高があり、そのとき波形は波頂にシャープな角を持つことが知られている。[2] 例えば $B = \pi/4$, $b = \pi/2$ のとき、最大孤立波解は

$$u(x, t) = \frac{8}{9}e^{-\frac{\pi}{4}|x - \frac{4}{3}t|}, \quad (9)$$

で与えられる。この波形の波頂角は 110° で、水面重力波の限界波高における波頂角 120° とかなり近い値を取るが、これは単に偶然に過ぎない。またこの Whitham 方程式に対しては breaking、すなわち波形の前傾化に伴う微分係数の発散が起こることが数学的にも [5]、また数値的にも示されている。[6]

3 砕波に関する数学的結果

ある時刻の波形 $u(x, t)$ における微分係数 $u_x(x, t)$ の最大値を $m_+(t)$ 、最小値を $m_-(t)$ とする。Seliger[5] は、初期波形が $m_+(0) + m_-(0) < -2K(0)/\alpha$ を満足するほどに前後非対称の場合、 $T < |\alpha m_-(0) + K(0)|^{-1}$ を満たすある有限時間 T までに $m_-(t)$ が負の無限大に発散することを証明した。これは初期波形の前後非対称性に依存した砕波の十分条件を与え、すでにある程度砕波に近づいた時にもう後戻りしないことを保証するのには役立つかも知れない。しかし通常頭に描く浅水変形に伴う砕波のイメージは、最初緩やかだった波形が長波型非線形項 αuu_x の効果で次第に前傾化し、その結果として砕波に到るというものであり、その意味では、できるならば前後対称な緩やかな初期波形と後の時刻の砕波現象を直接結び付けるような数学的理論がほしいところである。

その後 Naumkin & Shishmarev[4] は、 $K(x)$ に対するある条件、および初期波形 $u(x, 0)$ に対するある条件の下で、やはり有限時間 T 以内に必ず砕波（負微分の発散）が起こることを数学的に証明した。また砕波時刻 T に対して上下から抑えるような不等式も与えている。Naumkin らの証明は、初期波形 $u(x, 0)$ にある値を超える十分大きな負の勾配の存在は仮定しているものの、Seliger のような前後非対称性は要求していない。なお Constantin & Escher[7] はこの Naumkin らの証明を多少補強するような結果を報告している。

このように、非線形かつ非局所的な波動方程式 (nonlinear nonlocal wave equation) という枠組みの中で、Whitham 方程式の砕波（微分係数の発散）に関してさまざまな数学的研究が行われているが、これらの研究からは、実際に波形がどのように変化し、どのようなタイプの砕波が起こるのか、波形変化の様子を掴むことはできない。砕波に到る非定常な波形変化を実際に観察し、砕波形式を分類し、それらを砕波を引き起こすメカニズムの解明に結び付けるには、やはり数値計算による波形の時間発展の追跡が必須である。このような背景から、本研究では Whitham 方程式における砕波現象のついて数値的な検討を行った。

4 数値計算の方法

4.1 規格化, 初期波形

初期波形は前後対称でなるべく単純なものを考えることにし, (1) 周期的な波形の代表例として $u_0(x) = A \sin kx$, (2) 非周期的でパルス的な波形の代表例として $u_0(x) = Ae^{-(kx)^2}$, の2種類を考える. 基礎方程式は積分核として $K_W(x) = Be^{-b|x|}$ を持つ Whitham 方程式

$$u_t + \alpha uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} Be^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi = 0 \quad (10)$$

とする. この問題に含まれるパラメタは, 方程式に含まれる (α, B, b) , 初期波形に含まれる (A, k) の計5つである. u, x, t の規格化 (すなわち単位量の設定の自由度) によって, 一般性を失うことなく $\alpha = A = k = 1$ とすることができる. したがって扱うべき問題は, 自由なパラメタとして B, b の2つだけを含む初期値問題

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} Be^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi = 0, \quad u_0(x) = \sin x \text{ or } e^{-x^2}, \quad (11)$$

となる.

4.2 数値手法

計算対象領域は, (1) の $u_0(x) = \sin x$ の場合には $[0, 2\pi]$, (2) の $u_0(x) = e^{-x^2}$ の場合には $[-6, 6]$ とする.² 数値計算においては実空間の波形 $u(x, t)$ そのものではなく, $u(x, t)$ の離散 Fourier 変換の係数 $\{\hat{u}_k\}$ の時間発展を追跡する. このとき (11) の積分項, すなわち線形分散項は $-i\omega_k \hat{u}_k$ という単純な代数計算となる. ここで ω_k は線形分散関係 (6) が与える第 k モードの振動数である.

また非線形項の計算には疑スペクトル法を用いる. すなわち uu_x の離散フーリエ変換の第 k モードの係数 $\mathcal{F}\{uu_x\}_k$ は, $\{\hat{u}_k\}$ から逆フーリエ変換により $\{u(x_j)\}$ および $\{u_x(x_j)\}$ を求め, x 空間で $\{uu_x(x_j)\}$ を求めた上でそれを離散フーリエ変換することにより算出している. この疑スペクトル法において発生する aliasing 誤差の影響は, 離散フーリエ変換の点数を対象とするモード数の $3/2$ 倍に取る, いわゆる「 $2/3$ 則」によって除去している. 実空間におけるメッシュ点数は $N = 512$ とする (このとき aliasing 誤差に影響されないモード番号は $-170 \sim 170$).

時間積分には時間キザミを固定した4次精度の Runge-Kutta 法を用いる. 線形分散関係 (6) によると, ω は $k = b$ に対して最大振動数 $\omega_{\max} = B$ を取る. 数値計算ではこの最大振動数成分の周期 $2\pi/\omega_{\max}$ の $1/100$ もしくは $1/200$ を時間キザミに用いている.

波形の急峻化に伴って数値的な「鋸歯不安定」(saw-tooth instability) が発生することがある. この数値的不安定を抑制するために, 適当な時間ステップ数ごとに実空間における波形 $\{u(x_j)\}$ に対して

$$\bar{u}_j = \frac{1}{16} (-u_{j-2} + 4u_{j-1} + 10u_j + 4u_{j+1} - u_{j+2}). \quad (12)$$

というフィルター操作を行っている. [8] また計算の継続時間は基本波モード ($k = 1$) の20周期までとし, 保存量 $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx$ の急変 (相対誤差1%以上) をもって, 「碎波の発生」と判定している.

² $|x| = 6$ で $e^{-x^2} < 10^{-15}$.

5 数値計算の結果

5.1 $u_0(x) = \sin x$ の場合

砕波が発生するケースの代表例として $(B, b) = (3, 3)$ の場合について、波形 $u(x, t)$ 、および各時刻における微分係数 $u_x(x, t)$ の最大値及び最小値の時間発展の様子を図 1 に示す。時間経過とともに

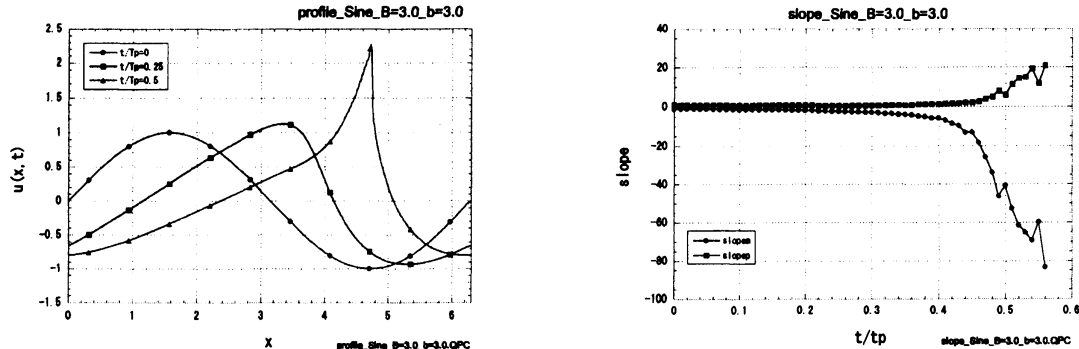


図 1: $u_0(x) = \sin x$ で砕波が起こる場合 $(B = 3, b = 3)$. (左) 波形, (右) 波形勾配の最大値・最小値の時間変化

に波形前面が急峻化し、基本モードの周期の $1/2$ 程の短時間のうちに砕波に至る様子が見られる。

次に、砕波しない場合の典型的な例として $(B, b) = (3, 1)$ のときの波形および波形の微分係数の最大値最小値の時間変化の様子を図 2 に示す。波形は一旦非線形項の影響で前面がやや急峻化

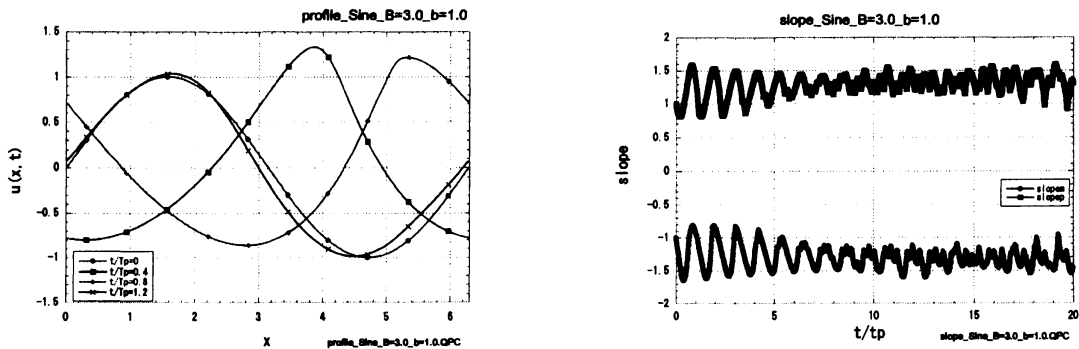


図 2: $u_0(x) = \sin x$ で砕波が起こる場合 $(B = 3, b = 1)$. (左) 波形, (右) 波形勾配の最大値・最小値の時間変化

するものの砕波には至らず、その後やり戻しの結果今度は波形の後面が急峻化し、ほぼ 1 周期後には初期波形と似たほぼ前後対象の波形に戻る。以降永年的な変化はあるものの、長時間にわたり砕波することなく、振動的な波形変化を繰り返す。

パラメタ空間である B - b 平面上で、砕波に至るケースと 20 周期の間砕波に至らなかったケースに分類すると、その境界線として図 3 に示すような臨界曲線が得られる。 B は分散項の大きさをコントロールするパラメタであり、したがって b を固定した場合、 B のある臨界値を越えると砕波が止まるという振舞いは自然である。一方、分散関係 (6) によると b は最大振動数を与える波数と言う意味で、特徴的な波数をコントロールするパラメタである。 B を固定してその b の値を変化させると、上からも下からも押さえられた b のある中間的な範囲においてのみ砕波が抑制される結果となっている。これらの臨界曲線の振舞いについては、後の節で再度考察する。

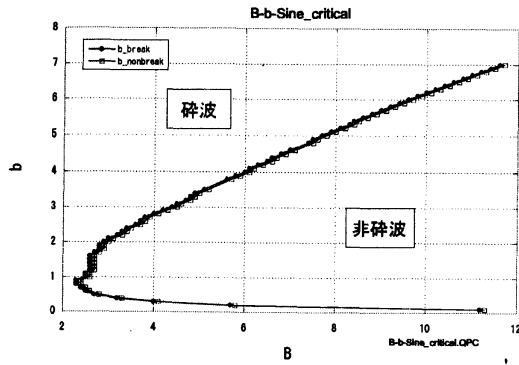


図 3: $u_0(x) = \sin x$ の場合の臨界曲線

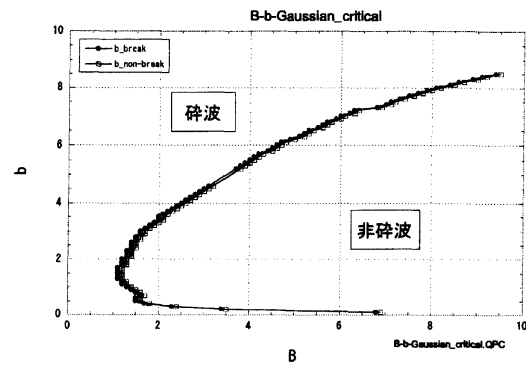


図 4: $u_0(x) = e^{-x^2}$ の場合の臨界曲線

5.2 $u_0(x) = e^{-x^2}$ の場合

図 4 に初期波形が Gauss 型 $u_0(x) = e^{-x^2}$ の場合の B - b 平面上の臨界曲線を示す。臨界曲線 (図 4) は, $u_0(x) = \sin x$ の場合の図 3 と同様, B を固定すると十分大きな b および十分小さな b に対して碎波が発生し, 中間的な b に対しては碎波が抑制されることを示している。ここでは $B = 2$ と固定し, 図 5 に b が十分大きくて碎波が発生するケース ($B = 2, b = 4$), 図 6 に b が中間的な大きさに 20 周期の間に碎波が発生しないケース ($B, b = (2, 2)$), 図 7 に b が十分小さくて碎波が発生するケース ($B = 2, b = 0.2$) のそれぞれについて, 波形変化の様子, および波形の微分係数の最大値及び最小値の時間発展の様子を示す。図 5 の ($B = 2.0, b = 4.0$) のケースでは, 単調にパ

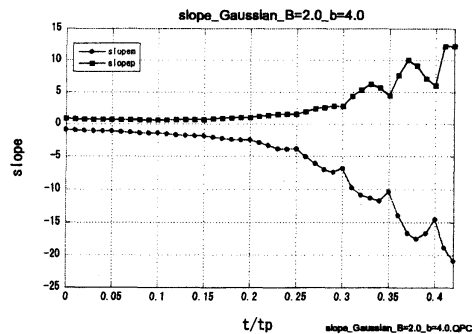
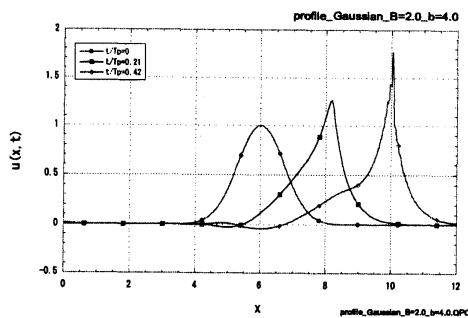


図 5: $u_0(x) = e^{-x^2}$ で碎波が起こる場合 ($B = 2, b = 4$). (左) 波形, (右) 波形勾配の最大値・最小値の時間変化

ルス波形の成長と前傾化が起こり, 基本モードの $1/2$ 周期弱という短時間で碎波に至る。同じく碎波が起こるケースでも図 7 の ($B = 2.0, b = 0.2$) の場合には, 顕著な「谷」の発生が起こり, パルス波形の波高はむしろ減少しつつ前面の急峻化が起こり碎波に至る。このように一言で「碎波が起こる」と言っても, ($B = 2.0, b = 4.0$) と ($B = 2.0, b = 0.2$) では, 碎波に至るまでの波形変化はかなり異なったものであり, したがって臨界曲線の上の分枝と下の分枝の特徴付けや理解には, 碎波形態のこの定性的な相違を踏まえて臨む必要がある。図 6 には, 中間的な b の代表例である ($B = 2.0, b = 2.0$) の場合について, 5 周期目, 10 周期目の波形を示したが, 比較的ゆったりとした波形を保ったまま不規則な波形変化を示しながら, 少なくとも 20 周期までは碎波の兆しは見えなかった。

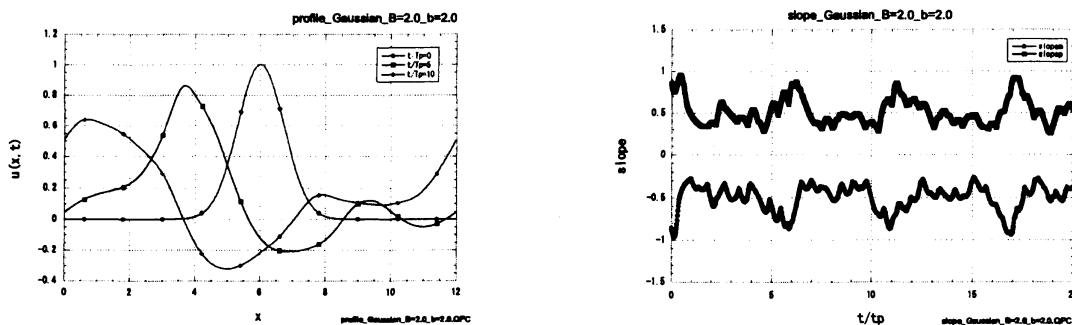


図 6: $u_0(x) = e^{-x^2}$ で碎波が起こらない場合 ($B = 2, b = 2$). (左) 波形, (右) 波形勾配の最大値・最小値の時間変化

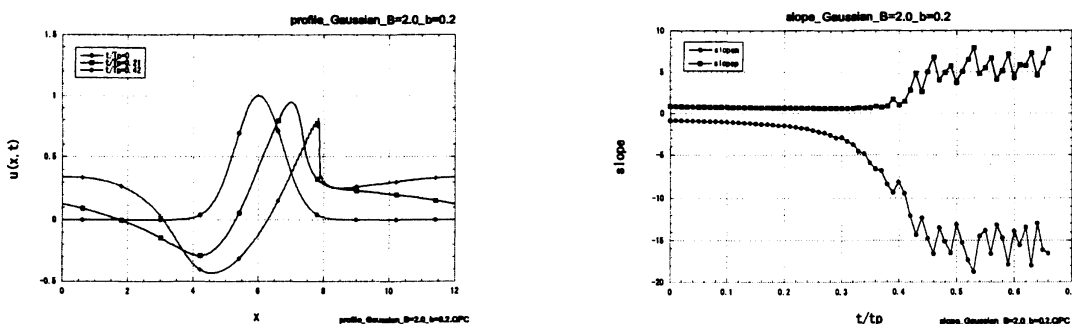


図 7: $u_0(x) = e^{-x^2}$ で碎波が起こる場合 ($B = 2, b = 0.2$). (左) 波形, (右) 波形勾配の最大値・最小値の時間変化

5.3 臨界曲線の定性的理解

碎波非碎波の現象は、非線形項による突っ立ち効果と分散性によるその抑止効果のバランスで理解するというのが常套手段である。Whitham 方程式の分散関係は (6) で与えられ、それに対応する位相速度 $c(k) = \omega(k)/k$ を図 8 に図示する。横軸の波数 k は b で、縦軸の $c(k)$ は $2B/b$ でそ

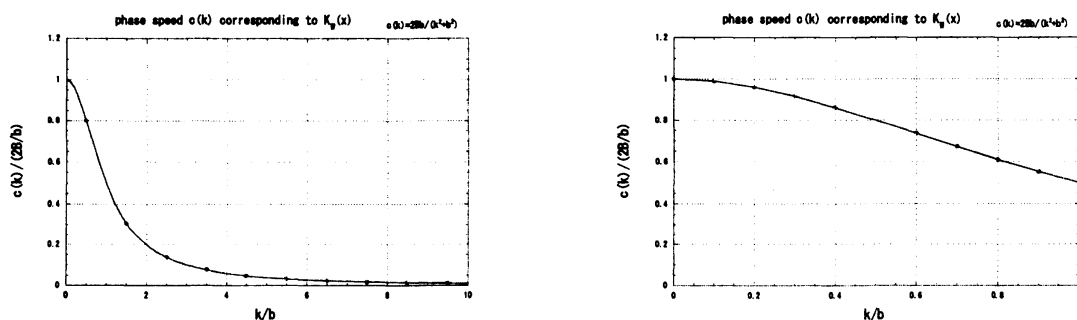


図 8: Whitham 方程式の位相速度

れぞれ規格化している。左図は $k/b = 10$ までのグラフ、右図は同じグラフの $k/b \leq 1$ までの部分を拡大したものである。

臨界曲線 (図 3 および図 4) において、 b を固定して B を次第に増加させていくとき、 B のある臨界値を超えると碎波現象が失われる。これは B が分散項の係数であり、 B が大きくなると分散性が増大し、非線形項による波形の急峻化によって生み出されるさまざまな波数 (主に高波数) の

成分が各々異なる位相速度で伝播するために、急峻化された波形を維持することができず、砕波には至らないと理解することができる。

また臨界曲線によると、 B を固定して b を変化させた場合、 b が十分大きい、もしくは十分小さい領域においては砕波が起こり、中間領域において砕波が抑制されるという結果になっている。初期波形が $u_0(x) = \sin x$ の場合、初期には基本モード($k=1$)のみにエネルギーが存在し、非線形項による波形の急峻化にともなって、その高調波 $k=2, k=3, \dots$ にも次第にエネルギーが輸送されていく。 b が小さい場合には、図8の横軸 k/b の値が大きいところのみ初期エネルギーが与えられた状態になっており、その高調波も含め $c(k)$ そのものが小さく、異なる波数に対応する各々の波数モードの伝播速度に大きな差が生じない。このことから、 b が小さい場合には分散効果が小さく、非線形項による急峻化が十分に抑制されず、その結果砕波が発生するものと考えられる。一方 b が十分大きい場合は、 k/b が小さいところのみ初期エネルギーが存在する状態になっているが、図8の右図によると、 k/b が小さい領域においては、波数間の位相速度の相対的な差が小さく、やはり非線形性に拮抗するだけの分散効果が現れにくいと考えられる。

以上の定性的な考えをもう少し進めて、臨界曲線の関数形について考察してみよう。非線形性によって生じる波速の波数モード間の差 Δc_{nl} はWhitham方程式(11)の uu_x によって生み出され、われわれの規格化では $O(1)$ である。一方分散性によって生じる波数モード間の波速の差 Δc_l は $\Delta c_l = \frac{dc}{dk} \Delta k \sim \frac{Bbk}{(k^2 + b^2)^2}$ で与えられる。ここで k は $O(1)$ と考えてよいであろう。よって、 $b \ll 1$ のとき、分散効果と非線形効果のバランス $\Delta c_{nl} \sim \Delta c_l$ は、 $b \propto 1/B$ を要求する。一方 $b \gg 1$ のとき、両者がバランスするためには、 $b \propto B^{1/3}$ でなければならない。このことを念頭に、臨界曲線を両対数グラフで再度示したものが図9である。参考までに、 $b \propto 1/B$ および $b \propto B^{1/3}$ に対応する線も示してある。臨界曲線の下側の分枝については、 $b \ll 1$ を想定した上で非線形と分散のバランスから要求される関係 $b \propto 1/B$ がかなりよく成立していることが確認できる。一方上側の分枝については、上のナイーブな議論から $b \gg 1$ の場合に予想される $b \propto B^{1/3}$ に比べ、 b の増大は明らかに速いように見える。

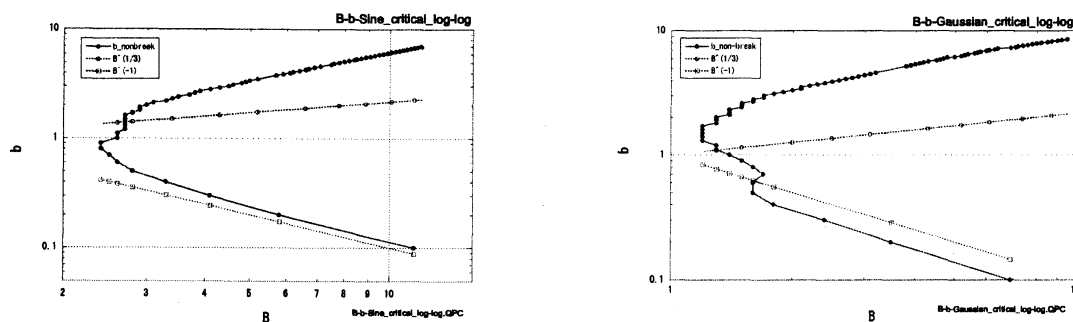


図9: 臨界曲線の両対数プロット。(左) $u_0(x) = \sin x$, (右) $u_0(x) = e^{-x^2}$.

6 まとめと今後の課題

Whitham方程式(11)の砕波現象(微分係数の発散)について、数値的に調べた。初期波形は $u_0(x) = \sin x$ と $u_0(x) = e^{-x^2}$ の2種類を扱った。砕波の発生と方程式に含まれるパラメタ B , b との関係を調べ、 B - b 平面上で砕波領域と非砕波領域を分かつ臨界曲線を数値的に求めた。またこの臨界曲線の関数形について、分散効果と非線形効果の競合という観点から初歩的な考察を行った。その結果、臨界曲線の下側の分枝については、素朴なオーダー評価に基づいて導出した

関係 $b \propto 1/B$ がかなりよく成立していることを確認した。一方上側の分枝については、素朴な予想 $b \propto B^{1/3}$ ではまったく説明が付かないことも分かった。今後この臨界曲線の上側の分枝については、砕波に至る波形変形をより詳細に観察し、その背後にある砕波に至るメカニズムに対する考察を深めることによって、正しい特徴づけをする必要がある。

また今回は数値的側面に集中するあまり、Naumkin らの仕事をはじめ、過去の数学的な研究成果との突合せを十分に行うことができなかった。この点についても今後さらに進めていく必要があると考えている。

謝辞

文献 [7] の存在を教えて頂き、また有益な議論をして頂いた岐阜大学工学部の澤田宙広氏に感謝します。また有益な助言を頂いた大阪大学の名和範人氏と慶應義塾大学の井口達雄氏にも感謝します。

参考文献

- [1] Stokes, G.G., On the theory of oscillatory waves. Camb. Trans. 8, 441–473.
- [2] Whitham, G.B., *Linear and nonlinear waves*, (John Wiley & Sons., 1974)
- [3] Whitham, G.B., Variational methods and applications to water waves. Proc. Roy. Soc. A. **299** (1967), 6–25.
- [4] Naumkin, P.I. and I.A. Shishmarev, *Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves.*, American Mathematical Society, 1994.
- [5] Seliger, R.L., A note on the breaking of waves. Proc. Roy. Soc. A. **303** (1968), 493–496.
- [6] Fornberg, B. and G.B. Whitham, A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. Phil. Trans. R. Soc. Lond. (1978), 373–404.
- [7] Constantin, A. and J. Escher, Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations, Acta Math., **181**(1998), 229–243.
- [8] Longuet-Higgins M.S. and E.D. Cokelet, The deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation, Proc. R. Soc. Lond. A. **350** (1976), 1–26.