

Einstein 空間上のインスタントン

京大 数理研 村瀬元彦

$\mathbb{CP}^2$ や $K3$ 曲面などの Einstein 空間上には, その計量を
用いて $SO(3)$ -instanton が構成できることを示す.

§. 主束上の接続形式が調和方程式を満たすとき, それを
instanton と呼ぶ —

これまで知られているのは, S^4 上の主束に対するものに
限られていた.

記号. M : 向きづけられた 4 次元 Riemann 多様体

P : M 上の $SO(n)$ -主束

ρ_P : $SO(n)$ の adjoint-表現に同伴した $\mathfrak{so}(n)$ -ベクトル束, 但し $\mathfrak{so}(n)$ は反対称 $n \times n$ 行列全体の
為すリー環

ω : P 上の接続形式

$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$: 曲率形式

Λ^p : M 上の p -forms の為すベクトル束.

E の束自己同型をゲージ変換という. $\omega \in \mathcal{G}_E \otimes \Lambda^1$, $\Omega \in \mathcal{G}_E \otimes \Lambda^2$ と見なされる. それぞれ $\mathcal{G}_E$ -係数の M 上の微分形式である.

ゲージ不変な Ω のノルムを, Hodge star 作用素を用いて $\|\Omega\|^2 = - \int_M \text{trace } \Omega \wedge * \Omega$ により定義する.

変分問題 $\delta(\|\Omega\|^2) = 0$ から導かれる微分方程式を調和方程式, あるいは Yang-Mills 方程式という. そして, その解をよべる接続 ω のことを, 調和接続, あるいは instanton と呼ぶ.

$\frac{1}{4\pi^2} \int_M \text{trace } \Omega \wedge \Omega$ が主束 E の第 2 Chern 数で

あることに注意すれば,

Lemma. 1. $*\Omega = \pm \Omega$ なる接続 ω は調和である.

Λ^2 上では $*^2 = 1$ ゆえ, $*$ の固有値 ± 1 に属する Λ^2 の固有空間 Λ の分解を $\Lambda^2 \cong \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ とする. 2-form α に対し, $*\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Lambda_+^2$.

§. Einstein 空間上に $\mathcal{O}_E \otimes \Lambda^2_+$ の section をつくる —

M は oriented だから, 接束に同伴する主束は $SO(4)$ -束である. それを B と書く. Riemann 計量により, 接束と Λ^1 とを同一視する. Λ^p は計量をもった Λ -クトル束であり, B は Λ^p に直交変換として作用する.

Lemma. 2. $\Lambda^2 \cong \mathcal{O}_B$.

pf. B の Λ^2 の作用が adjoint 表現で得られることをみる.

Λ^1 の local orthonormal base を e_1, e_2, e_3, e_4 とする.

Λ^2 の local base は $\langle e_\mu \wedge e_\nu \rangle_{\mu < \nu}$ である. 同型

$$\varphi: \Lambda^2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_B \quad \text{を,}$$

$$e_1 \wedge e_2 \longmapsto \begin{bmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ \hline & & \end{bmatrix}$$

$$e_3 \wedge e_4 \longmapsto \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ \hline & & 1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

$$e_1 \wedge e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ -1 & & \\ \hline & & \end{bmatrix}$$

$$e_2 \wedge e_4 \longmapsto \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & -1 & \\ \hline & & \end{bmatrix}$$

$$e_1 \wedge e_4 \longmapsto \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & -1 & \\ \hline & & \end{bmatrix}$$

$$e_2 \wedge e_3 \longmapsto \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ & -1 & \\ \hline & & \end{bmatrix}$$

により, 定めれば, $g \in B$ に対し,

$$\begin{aligned} g(e_\mu \wedge e_\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} (ge_\mu) \wedge (ge_\nu) \\ &= g \cdot (\varphi(e_\mu \wedge e_\nu)) \cdot g^{-1} \end{aligned}$$

となる. $\blacksquare$

直和分解 $\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ は B -不変であり, また, $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ に対応して, 各 $\Lambda_\pm^2$ は $\mathfrak{so}(3)$ -束であり.

3次元ハクトル束 Λ_+^2 に同伴する $SO(3)$ -主束を P で表わす. $SO(3)$ の 3次元表現 $SO(3) \hookrightarrow GL(3)$ は *adjoint* 表現と同値だから,

Lemma. 3. $\Lambda_+^2 \cong \mathcal{O}_P.$

さて,

$\alpha: \Lambda^2 \xrightarrow{\sim} \Lambda^{2*}$ を内積によ, て定まる同型,

$\beta: \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^2$ を外積によ, て定まる自然な写像

とす. Riemann 曲率形式 $R = \{ R_{ijkl} \}$ は,

$(\Lambda^1 \otimes \Lambda^1) \otimes \Lambda^2$ の section である. 即ち, $\Lambda^1 \otimes \Lambda^1$ 係数の M 上の 2-form.

$$(\Lambda^1 \otimes \Lambda^1) \otimes \Lambda^2 \xrightarrow{\beta \otimes \text{id}} \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \xrightarrow{\alpha \otimes \text{id}} \Lambda^{2*} \otimes \Lambda^2 \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\Lambda^2, \Lambda^2)$$

による R の image を $\mathcal{R}$ と書く. Λ^1 の orthonormal base

には, $\mathcal{R}$ を表わせば,

$$\mathcal{R}(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k, l} R_{ijkl} e_k \wedge e_l.$$

直和分解 $\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ に対応して

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} A &\in \text{Hom}(\Lambda_+^2, \Lambda_+^2) \\ B &\in \text{Hom}(\Lambda_+^2, \Lambda_-^2) \\ C &\in \text{Hom}(\Lambda_-^2, \Lambda_-^2) \end{aligned}$$

とブロック別けで表す。B を具体的に計算することになり,

Lemma 4. $M: \text{Einstein} \Leftrightarrow B = 0$.

したが, $\mathcal{R}$, M が Einstein であるとき

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \oplus \mathcal{R}_-$$

$$\mathcal{R}_+ \in \text{Hom}(\Lambda_+^2, \Lambda_+^2)$$

$$\mathcal{R}_- \in \text{Hom}(\Lambda_-^2, \Lambda_-^2)$$

と分解される。計量によ, $\Lambda_+^2 \cong \Lambda_+^{2*}$ と見れば,

$$\mathcal{R}_+ \in \mathcal{Q}_P \otimes \Lambda_+^2.$$

$P \in \mathcal{Q}_B \otimes \Lambda^1$ を Riemann 接続とす。Riemann 曲率は $\mathcal{Q}_B \otimes \Lambda^2$ の元と見なせるが, それは $\mathcal{R}$ に他ならない。この
とを,

$$\mathcal{R} = dP + \frac{1}{2} [\Gamma, \Gamma]$$

直和分解 $\mathcal{G}_B \cong \Lambda^2 \cong \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$ に対応して

$$\Gamma = \Gamma_+ \oplus \Gamma_- \quad , \quad \Gamma_{\pm} \in \Lambda_{\pm}^2 \otimes \Lambda^1$$

とすれば,

$$\mathcal{R}_{\pm} = dP_{\pm} + \frac{1}{2} [\Gamma_{\pm}, \Gamma_{\pm}]$$

である. したがって, Γ_+ は,

$$\begin{cases} \Gamma_+ \in \mathcal{G}_B \otimes \Lambda^1 \\ dP_+ + \frac{1}{2} [\Gamma_+, \Gamma_+] = \mathcal{R}_+ \in \mathcal{G}_B \otimes \Lambda_+^2 \\ (\text{即ち } * \mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_+) \end{cases}$$

を満たすので, $SO(3)$ -instanton である.

Γ_- によっても, 同様に $SO(3)$ -instanton が構成出来る.

文献

Atiyah - Hitchin - Singer : Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry.

Proc. R. Soc. Lond. A. 362 . 425-461 (1978).