

IMT 積分公式が有効な関数族について

筑波大電子情報 杉原正顕 (Masaki Sugihara)

§1. はじめに

1970年伊理, 森口, 高沢によって, 変数変換を用いた数値積分公式の1つ, 現在IMT積分公式と呼ばれている数値積分公式が提案された。その後, 種々の変数変換を用いた数値積分公式が提案された ([2], [3]を参照)。しかし, 提案された積分公式がどのような関数族(関数空間)にまで適用可能であるのか—より正確に言うと, 公式の提案されている論文に述べられている誤差評価式がどのような関数族(関数空間)に対してまじり成立するのか—は明確には, ということは言い難い。本論文においては, IMT積分公式に関して, 論文[1]のIMT積分公式の誤差解析に基づいて, 公式が有効な関数族(関数空間)を設定する。そして, その関数空間における積分作用素の近似の問題を考察する。

まず, §2. において, 論文[1]に述べられているIMT積分公式の

誤差解析法を復習し, §3. で, その誤差解析法がそのまま適用できるような自然な関数空間を設定する. 次に, §4. において, §3. で導入された関数空間の性質, 殊に, 積分作用素の近似に関する性質 (誤差ノルムの最小値の評価, また, それを達成する数値積分公式, DE 公式の誤差ノルムの評価) を詳しく調べる.

§2. IMT 積分公式の誤差解析 (復習)

論文 [1] では, IMT 積分公式:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(\varphi_{\text{IMT}}(\frac{k}{N})) \cdot \varphi_{\text{IMT}}'(\frac{k}{N}),$$

$$\text{ここで, } \varphi_{\text{IMT}}(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}} ds / \int_0^1 e^{-\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}} ds,$$

と, 積分区間の端点に代数的特異性をもつ関数の積分:

$$\int_0^1 \xi(x) x^\alpha (1-x)^\alpha dx, \quad (\alpha > -1)$$

ここで, $\xi(x)$ は $[0, 1]$ を含む領域で正則な関数,

に適用した時の数値積分誤差が次のように評価されること

$$|\int_0^1 \xi(x) x^\alpha (1-x)^\alpha dx - \text{IMT 公式}(N \text{ 点})| \leq C \cdot \frac{1}{N^{\frac{1}{4} + \alpha}} \cdot \exp(-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N}) \quad (2.1)$$

を示し, IMT 積分公式の有効性を主張している.

以下, 論文 [1] に従って, 誤差評価 (2.1) を得る過程を再生する.

IMT積分公式は、IMT変換を用いて変数変換した関数
 に對して矩形則を適用する公式である。従つて、IMT積分
 公式の誤差評価は、変数変換後の関数に對する矩形則の誤差
 評価によつて得られる。一方、矩形則の誤差評価は、次の補
 題 2.1 にあるように、被積分関数の Fourier 係数の漸近評価
 を行なうことによつて容易に得られる。

補題 2.1 (矩形則の誤差評価の基本補題)

$f(x)$ は $[0, 1]$ 上で絶対収束する Fourier 級数:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n x}, \quad c_n = \int_0^1 f(x) e^{2\pi i n x} dx,$$

に展開可能な関数とする。この時、積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を矩形則
 で近似する時の誤差:

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

は、

$$= - \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{\infty} c_p N = -c_N - c_{-N} - c_{2N} - c_{-2N} \dots$$

で表えられる。

結局、IMT積分公式の誤差評価は、積分:

$$c_N = \int_0^1 \xi(\varphi_{\text{IMT}}(y)) (\varphi_{\text{IMT}}(y))^{\alpha} (1 - \varphi_{\text{IMT}}(y))^{\alpha} \varphi'_{\text{IMT}}(y) e^{2\pi i N y} dy \quad (2.2)$$

の $N \rightarrow \infty$ における漸近評価に帰着される。

(2.2) の積分の評価は、鞍点法を用いることによつて行なう

ことが出来る。実際、被積分関数の正則性に注意して、積分路を図1にあるような被積分関数の鞍点を通る積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ に変形することによつて、以下のように C_N に対する一連の評価を得ることが出来る。

$$|C_N| = \left| \int_0^1 \xi(\varphi_{\text{INT}}(y)) (\varphi_{\text{INT}}(y))^{\alpha} (1 - \varphi_{\text{INT}}(y))^{\alpha} \varphi'_{\text{INT}}(y) e^{2\pi i N y} dy \right| \quad (2.2)$$

$$= \left| \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \xi(\varphi_{\text{INT}}(y)) (\varphi_{\text{INT}}(y))^{\alpha} (1 - \varphi_{\text{INT}}(y))^{\alpha} \varphi'_{\text{INT}}(y) e^{2\pi i N y} dy \right| \quad (2.3)$$

$$\leq \sup_{y \in \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} |\xi(\varphi_{\text{INT}}(y))| \cdot \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} |(\varphi_{\text{INT}}(y))^{\alpha} (1 - \varphi_{\text{INT}}(y))^{\alpha} \varphi'_{\text{INT}}(y) e^{2\pi i N y} dy| \quad (2.4)$$

$$\leq C_1 \cdot C_2 \frac{1}{N^{\frac{3}{2} + \alpha}} \exp(-\sqrt{4\pi(1+\alpha)N}) \quad (2.5)$$

(ここで $C_1 = \sup_{y \in \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} |\xi(\varphi_{\text{INT}}(y))|$ とおいた)

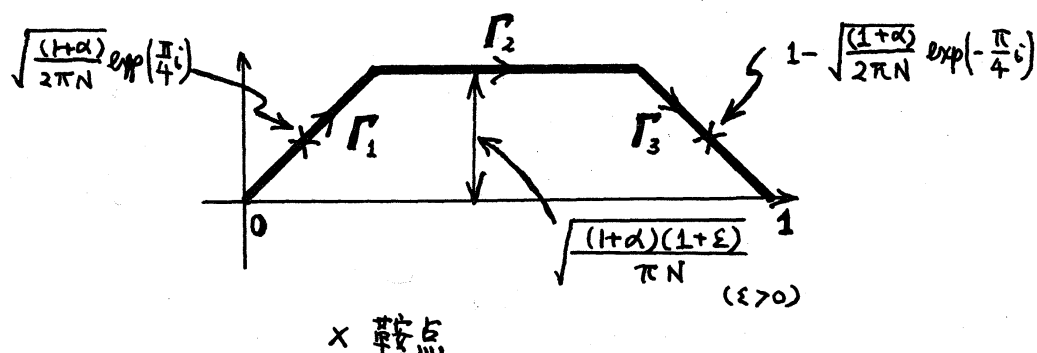


図1. 鞍点法で用ゐる積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

注意2.1 積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ は論文[1]に記されたものとは、少々異なる。このような積分路を考へたのは、このような積分路上で積分を評価する方が数学的に厳密化し易い議論がしやうい故である。評価の結果は、論文[1]に得られているものと本質的に変りはない。ただし、紙数の都合で、その評価に関する部分(計算)は省略する。

この C_N の漸近評価と, 補題 2.1 とあわせて, IMT 積分公式の誤差評価 (2.1) を得る.

§3. IMT 積分公式が有効な関数族 (関数空間) H_1

ここでは, 基本的に, IMT 積分公式が有効な関数族 = §2 で述べた 誤差評価 が成立するような関数族を設定することを目指す. しかし, §2 で述べた誤差評価が成立するような関数族を完全に特徴づけることは非常に困難である. そこで, より容易な問題 “§2 で述べた 誤差評価法 をそのまま踏襲できるような自然な関数族 (関数空間) を設定すること” の解決を目指す.

そこで, まず, §2 で述べた評価 ((2.2) ~ (2.5)) を, $g(x) \equiv \xi(x) \cdot x^\alpha (1-x)^\alpha$ とおいて, $g(x)$ を用いて書きかえてみる;

$$|C_N| = \left| \int_0^1 g(\varphi_{\text{IMT}}(y)) \varphi'_{\text{IMT}}(y) e^{2\pi i N y} dy \right| \quad (2.2')$$

$$= \left| \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} g(\varphi_{\text{IMT}}(y)) \varphi'_{\text{IMT}}(y) e^{2\pi i N y} dy \right| \quad (2.3')$$

$$\leq \sup_{y \in \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} |g(\varphi_{\text{IMT}}(y)) (\varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d} (1 - \varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d}| \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} |(\varphi_{\text{IMT}}(y))^d (1 - \varphi_{\text{IMT}}(y))^d \varphi'_{\text{IMT}}(y) e^{2\pi i N y}| dy \quad (2.4')$$

$$\leq C_1 \cdot C_2 \frac{1}{N^{\frac{d}{2} + d}} \exp(-\sqrt{4\pi(1+d)}N) \quad (2.5')$$

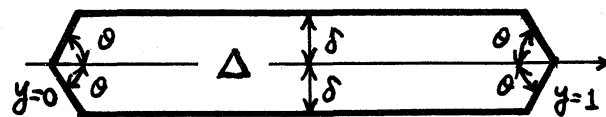
$$(\text{ここで } C_1 = \sup_{y \in \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} |g(\varphi_{\text{IMT}}(y)) (\varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d} (1 - \varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d}| \text{ とある})$$

ここで、容易にわかるように、この評価(変形(2.2')~(2.5'))が正当化されるためには、次の2つの要求が満足されねばよい。

要求(1): (2.2')から(2.3')への変形において、積分路の変形が可能であること。

要求(2): $C_1 = \sup_{y \in \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} |g(\varphi_{\text{IMT}}(y))(\varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d}(1-\varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d}| < +\infty$.

従って、§2で述べたような誤差評価が成立するためには、被積分関数 g が、十分大となるすべての N に対して、要求(1), (2)を満足せねばよい。この要求は、十分大となるすべての N に対して積分路 $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ が含まれる図2に示したような領域 Δ 上で、 $g(\varphi_{\text{IMT}}(y))$ が正則で、 $g(\varphi_{\text{IMT}}(y))(\varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d}(1-\varphi_{\text{IMT}}(y))^{-d}$ が有界であれば、満足される。



$$\tan \theta = 1 + \rho \quad (\rho > 0), \quad \delta > 0$$

図2. 領域 Δ (十分大となるすべての N に対して $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ が含まれる)

以上の議論から、§2で述べた誤差評価が成立する関数空間 (IMT積分公式が有効な関数空間)として、自ずと次のような関数空間 H_1 が考えられる(図3参照)。

$$H_1 = \{ g(z) \mid \begin{array}{l} (1) \ g(z) \text{ は, Riemann 面 } D = \varphi_{\text{IMT}}(\Delta) \text{ 上で正則,} \\ (2) \ \sup_{z \in \varphi_{\text{IMT}}(\Delta)} |g(z) z^{-d}(1-z)^{-d}| < +\infty \end{array} \}$$

これより、 $\|g\|_1$ は $\sup_{z \in \varphi_{\text{IMT}}(\Delta)} |g(z) z^{-d}(1-z)^{-d}| < +\infty$ と入れらる。

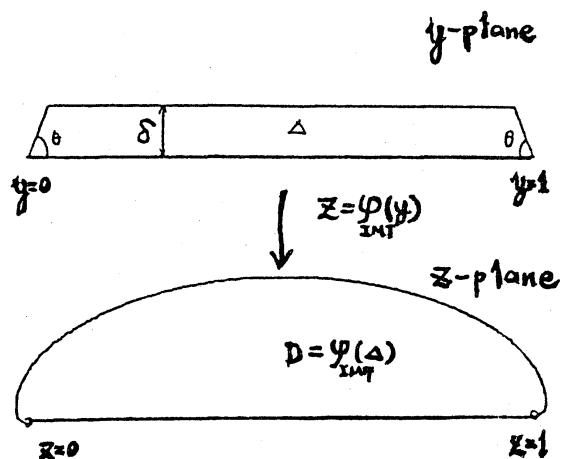


図3. $\varphi(\Delta)$ の根形 (上半平面のみ)

注意 3.1 関数空間 H_1 には, $z^\beta(1-z)^\beta$ ($\beta \geq \alpha$) が入っている. このことに鑑みるに, この関数空間は, 積分区間の端点における特異性が $z^\alpha(1-z)^\alpha$ 以下の関数の成す空間と“象徴的に”述べてもよいと思われる.

§ 4. H_1 の性質 (積分作用素の近似と関連した性質)

4.1. H_1 の基本的性質

H_1 は, 次のような一連の性質をもつ.

- (1) H_1 は Banach 空間である (ただし, このことは, δ が十分小さいとき
にのみしか証明できていない. δ がかなり大きいても成立するようにあるが)

H_1 上の作用素 A のノルム $\|A\|_1$ は $\sup_{g \in H_1} \frac{|Ag|}{\|g\|_1}$ で入る.

- (2) 積分作用素 $\int_0^1 g(x) dx$, 値代入作用素 $g(a_i)$, $a_i \in (0, 1)$ は有界作用素である.

- (3) 数値積分公式 $\sum_{i=1}^N A_i g(a_i)$ に対する誤差生成作用素:

$$E(A_i; a_i) g = \int_0^1 g(x) dx - \sum_{i=1}^N A_i g(a_i)$$

は有界作用素である.

IMT積分公式の誤差評価に対しては、次の結果が成立する(本質的に、以下の結果が成立するように関数空間を設定しただけであるから、この結果(性質)は当然である)。

$$| \text{IMT積分公式}(N\text{点}) \text{による誤差} | \leq \|g\|_1 \cdot C \frac{1}{N^{\frac{3}{4}+\alpha}} \exp(-\sqrt{4\pi(1+\alpha)}N)$$

より,

$$\|E(\text{IMT積分公式}(N\text{点}))\|_1 \leq C \frac{1}{N^{\frac{3}{4}+\alpha}} \exp(-\sqrt{4\pi(1+\alpha)}N)$$

4.2. 変数変換によつて導入される空間

H_1 上の積分公式の性質を調べるために、次に定義するような変数変換によつて導入される関数空間を考える。

まず、 Ψ を $\varphi_{\text{IMT}}: \text{IMT変換}$ と $\varphi_{\text{tanh}}: \frac{1}{2} \tanh(\omega) + \frac{1}{2}$ の合成 $\varphi_{\text{IMT}} \circ \varphi_{\text{tanh}}$ とする。このとき、 H_1 から変数変換 Ψ によつて導入される関数空間 H_Ψ を次のように定義する(図4参照)。

$$H_\Psi = \{ f(\xi) \mid \begin{array}{l} (1) f(\xi) \text{ は, } \Psi^{-1}(\varphi_{\text{IMT}}(\Delta)) \text{ 上で正則,} \\ (2) \sup_{\xi \in \Psi^{-1}(\varphi_{\text{IMT}}(\Delta))} |f(\xi)(\Psi(\xi))^d (1 - \Psi(\xi))^d / \Psi(\xi)| < +\infty \end{array} \}$$

これ、ノルム $\|f\|_\Psi$ は $\sup_{\xi \in \Psi^{-1}(\varphi_{\text{IMT}}(\Delta))} |f(\xi)(\Psi(\xi))^d (1 - \Psi(\xi))^d / \Psi(\xi)|$ で入れる。

H_Ψ は、次のような基本的性質をもつ

(1) H_Ψ は Banach 空間である (δは十分小さいとする)

H_Ψ 上の作用素 A のノルム $\|A\|_\Psi$ は $\sup_{f \in H_\Psi} \frac{\|Af\|}{\|f\|_\Psi}$ で入れる。

(2) 積分作用素 $\int_a^\infty f(x) dx$, 値代入作用素 $f(b_i)$, $b_i \in (-\infty, \infty)$,

誤差生成作用素 $E(B_i; b_i)f = \int_a^\infty f(x) dx - \sum_{i=1}^N B_i f(b_i)$ は有界作用素

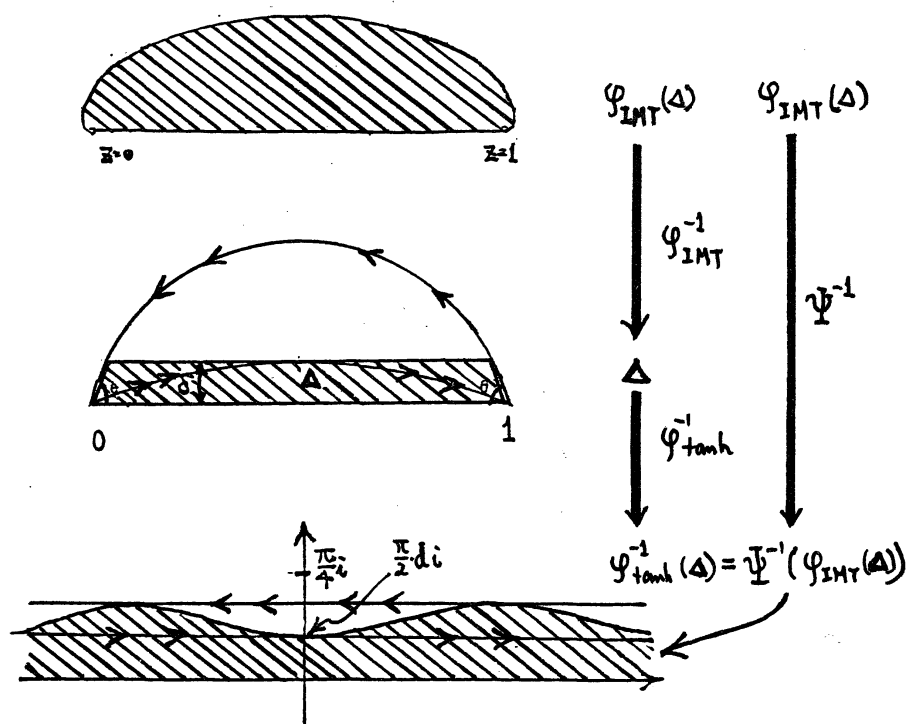


図4. $\Psi^{-1}(\varphi_{\text{IHT}}(\Delta)) = \varphi_{\text{tanh}}^{-1} \circ \varphi_{\text{IHT}}^{-1}(\varphi_{\text{IHT}}(\Delta))$ の概形 (上平面)

$\mathbf{H}_1$ と $\mathbf{H}_\Psi$ の基本関係は次の定理で与えられる。

定理4.1 ($\mathbf{H}_1$ と $\mathbf{H}_\Psi$ の基本関係)

(1) $g \in \mathbf{H}_1$ ならば, $g(\Psi) \cdot \Psi' \in \mathbf{H}_\Psi$ で $\|g\|_1 = \|g(\Psi) \cdot \Psi'\|_\Psi$.

逆に, $h \in \mathbf{H}_\Psi$ ならば, $h(\Psi^{-1}) \cdot (\Psi^{-1})' \in \mathbf{H}_1$ で $\|h\|_\Psi = \|h(\Psi^{-1}) \cdot (\Psi^{-1})'\|_1$.

(2) $A_i \in (-\infty, \infty)$, $a_i \in (0, 1)$ に対して,

$$\|E(A_i; a_i)\|_1 = \|E\left(\frac{A_i}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))}; \Psi^{-1}(a_i)\right)\|_\Psi.$$

逆に, $B_i \in (-\infty, \infty)$, $b_i \in (-\infty, \infty)$ に対して,

$$\|E(B_i; b_i)\|_\Psi = \|E\left(\frac{B_i}{(\Psi^{-1})'(\Psi(b_i))}; \Psi(b_i)\right)\|_1.$$

(証明)

(1) $\|g\|_1 = \|g(\Psi) \cdot \Psi'\|_\Psi$ を示せば, 十分である。この等式は, 次のように容易に得られる。

$$\begin{aligned}
\|g(\Psi) \cdot \Psi'\|_{\Psi} &= \sup_{\xi \in \Psi^{-1}(\varphi_{\text{LMT}}(\Delta))} |g(\Psi(\xi)) \Psi'(\xi) (\Psi(\xi))^{-\alpha} (1 - \Psi(\xi))^{-\alpha} / \Psi'(\xi)| \\
&= \sup_{z = \Psi(\xi) \in \varphi_{\text{LMT}}(\Delta)} |g(z) z^{-\alpha} (1 - z)^{-\alpha}| \\
&= \|g\|_1.
\end{aligned}$$

逆も同様である。

$$\begin{aligned}
(2) \quad \|E(A_i; a_i)\|_1 &= \sup_{g \in H_1} \frac{|\int_0^1 g(x) dx - \sum_i A_i g(a_i)|}{\|g\|_1} \\
&= \sup_{g \in H_1} \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} g(\Psi(\xi)) \Psi'(\xi) d\xi - \sum_i A_i \frac{g(\Psi(\Psi^{-1}(a_i))) \Psi'(\Psi^{-1}(a_i))}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))}|}{\|g(\Psi) \Psi'\|_{\Psi}} \\
&\leq \sup_{h \in H_{\Psi}} \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) d\xi - \sum_i \frac{A_i}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))} \cdot h(\Psi^{-1}(a_i))|}{\|h\|_{\Psi}} \\
&\quad (\text{この不等式は, } h = g(\Psi) \cdot \Psi' \text{ とおいてみればわかる}) \\
&= \|E(\frac{A_i}{\Psi'(\Psi^{-1}(a_i))}; \Psi^{-1}(a_i))\|_{\Psi}.
\end{aligned}$$

逆向きの不等式も同様にして得られ、等式が成立する。

第2の等式も同様に証明できる。 ■

定理 4.1 の中の (1) の性質の故に、 H_{Ψ} を変数変換空間によって導入された関数空間と呼ぶ。以下、この定理（特に (2)）を利用して、 H_1 上の積分公式の研究を H_{Ψ} 上の積分公式の研究に帰着させて調べる。

4.3 H_1 の性質 (H_{Ψ} を通してわかる)

(I) $\inf_{\substack{a_i \in (0,1) \\ A_i \in \mathbb{R}}} \|E(A_i; a_i)\|_1$ の評価

H_1 と H_Ψ の関係 (2) から,

$$\inf_{\substack{a_i \in (0,1) \\ A_i \in \mathbb{R}}} \|E(A_i; a_i)\|_1 = \inf_{\substack{b_i \in (-\infty, \infty) \\ B_i \in \mathbb{R}}} \|E(B_i; b_i)\|_\Psi$$

が成り立つ。右辺の量に対しては、次の結果が成り立つ。

定理 4.2

$$\inf_{\substack{b_i \in (-\infty, \infty) \\ B_i \in \mathbb{R}}} \|E(B_i; b_i)\| \geq \text{const} \cdot \exp\left(-c \frac{N}{\log N}\right)$$

従って、 $\|E(A_i; a_i)\|_1$ の下限の評価として、次の結果を得る。

定理 4.3

$$\inf_{\substack{a_i \in (0,1) \\ A_i \in \mathbb{R}}} \|E(A_i; a_i)\| \geq \text{const} \cdot \exp\left(-c \frac{N}{\log N}\right)$$

以下に、定理 4.2 の証明を与える (基本的証明のアイディアは [4] で述べたものと同じ)

数値積分公式 (分点 b_i , 重み B_i ($i=1, \dots, N$)) が任意に与えられたとき,

$$f(z) \equiv \left\{ \prod_{i=1}^N \tanh^2(z - b_i) \right\} \cdot (\Psi(z))^q (1 - \Psi(z))^q \cdot \Psi'(z)$$

なる関数を考える。

この関数 $f(z)$ は、 H_Ψ に属し、かつ、 $\|f\|_\Psi \leq 1$ である ($|\text{Im } z| \leq \frac{\pi}{4}$ なる z に対して $|\tanh(z)| \leq 1$ となることに注意せよ)。

一方、 $f(z)$ に与えられた数値積分公式を適用したときの誤

差は以下のよう評価される。

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{i=1}^N B_i f(b_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\
 &\geq 2R \int_{-R}^R f(x) \frac{dx}{2R} \quad (\because f(x) \geq 0) \\
 &\geq 2R \exp \left(\int_{-R}^R \log f(x) \frac{dx}{2R} \right) \\
 &\quad \left(\because \text{Jensen の不等式} \right. \\
 &\quad \left. g(x) \text{ が上に凸ならば, } E[g(X)] \leq g(E[X]) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2R \cdot \exp \left(\frac{1}{2R} \sum_{i=1}^N 2 \int_{-R}^R \log |\tanh(x-b_i)| dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log ((\Psi(x))^{\alpha} (1-\Psi(x))^{\alpha} \Psi'(x)) dx \right) \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

(4.1) の指数部が二項に対応する部分は、次のよう評価される。

$$\begin{aligned}
 &\exp \left(\frac{1}{2R} \sum_{i=1}^N 2 \int_{-R}^R \log |\tanh(x-b_i)| dx \right) \\
 &\geq \exp \left(\frac{1}{2R} \sum_{i=1}^N 2 \int_{-\infty}^{\infty} \log |\tanh(x-b_i)| dx \right) \\
 &= \exp \left(\frac{1}{2R} \cdot N \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} \log |\tanh(x)| dx \right) \\
 &= \exp \left(-\frac{N}{4R} \pi^2 \right) \quad (4.2) \\
 &\quad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} \log |\tanh(x)| dx = -\frac{\pi^2}{4} \right)
 \end{aligned}$$

次に (4.1) の指数部が二項に対応する部分の評価を行う。まず、

$-R \rightarrow -\infty$ ($\varphi_{\tanh}(-R) \rightarrow +0$) の時、

$$\begin{aligned}
 (\Psi(x))^{\alpha} (1-\Psi(-R))^{\alpha} \Psi'(-R) &= (\varphi_{\text{INT}}(\varphi_{\tanh}(-R)))^{\alpha} (1-\varphi_{\text{INT}}(\varphi_{\tanh}(-R)))^{\alpha} \\
 &\quad \times \varphi_{\text{INT}}'(\varphi_{\tanh}(-R)) \cdot \varphi_{\tanh}'(-R)
 \end{aligned}$$

$$\sim \text{const} \cdot (\varphi_{\tanh}(-R))^{2\alpha} \exp\left(-\frac{(\alpha+1)}{\varphi_{\tanh}(-R)}\right) \cdot \varphi_{\tanh}'(-R)$$

$$\sim \text{const} \cdot \exp(-4\alpha R) \cdot \exp(-(\alpha+1) e^{2R}) \cdot \exp(-2R).$$

$R \rightarrow \infty$ においても, $(\Psi(R))^\alpha (1-\Psi(R))^\alpha \Psi'(R)$ に対して, 同様の評価が成り立つ. 従って, 任意の実数 α に対して

$$(\Psi(x))^\alpha (1-\Psi(x))^\alpha \Psi'(x) \geq \text{const} \cdot \exp(-2(\alpha+1+\varepsilon) \cosh(2x)) \quad (\varepsilon > 0)$$

と (てよい). この不等式を用いると, (4.1) の指数部分 = 値に対応する部分は, 以下のよう評価される.

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log((\Psi(x))^\alpha (1-\Psi(x))^\alpha \Psi'(x)) dx\right) \\ & \geq \exp\left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log(\text{const} \cdot \exp(-2(\alpha+1+\varepsilon) \cosh(2x))) dx\right) \\ & = \exp\left(\frac{1}{2R} \int_{-R}^R (\log(\text{const}) - 2(\alpha+1+\varepsilon) \cosh(2x)) dx\right) \\ & = \exp\left(\frac{1}{2R} (2R \cdot \log(\text{const}) - 2(\alpha+1+\varepsilon) \sinh(2R))\right) \\ & = \exp(\text{const} - 2(\alpha+1+\varepsilon) \frac{1}{2R} \sinh(2R)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.2) と (4.3) と (4.1) に代入すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{i=1}^N B_i f(b_i) \geq \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{N}{4R} \pi^2 - 2(\alpha+1+\varepsilon) \frac{1}{2R} \sinh(2R)\right) \quad (4.4)$$

を得る. ここで R を $\frac{N}{4R} \pi^2 = 2(\alpha+1+\varepsilon) \frac{1}{2R} \sinh(2R)$ とするようにとると, $R \approx c \log N$ となる. この値を (4.4) に代入して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{i=1}^N B_i f(b_i) \geq \text{const} \cdot \exp\left(-c \frac{N}{\log N}\right)$$

を得る. これは, 先に述べた $\|f\| \leq 1$ に注意すると, 定理 4.2 に述べた評価が成立することと意味する. ■

(II) $\|E(A_c; a_c)\|_1 \leq \text{const} \cdot \exp(-c' \frac{N}{\log N})$ を満足する公式

(I) で $\|E(A_c; a_c)\|_1$ の下限の下からの評価が $\text{const} \cdot \exp(-c \frac{N}{\log N})$ で与えられることがわか, に。次に問題となるのは, この下限の評価を達成する公式が存在するかどうかである。以下に見るように, 誤差評価式に含まれる定数は $\|E(A_c; a_c)\|_1$ の下限の評価で与えられるものとは異なるが, 本質的に同じ形の評価式が成立するような公式 ($\|E(A_c; a_c)\|_1 \leq \text{const} \cdot \exp(-c' \frac{N}{\log N})$ を満足する公式) が存在する。

ここでも H_2 で考察する。まず, 基本となるのは次の補題である。

補題 4.4 ([5])

領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |Im z| < \frac{\pi}{2}d\}$ で解析的な関数 f で, 次の条件を満足するものを考える。

$$(1) \quad N(f) \triangleq \lim_{c \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x + c\frac{\pi}{2}i)| + |f(x - c\frac{\pi}{2}i)|) dx < +\infty.$$

$$(2) \quad 0 \leq c < d \text{ に 対 し } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-c\frac{\pi}{2}}^{c\frac{\pi}{2}} |f(x + yi)| dy = 0.$$

この時, $h > 0$ に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\pi^2}{4}d)}{1 - \exp(-\frac{\pi^2}{4}d)} N(f)$$

この補題, R_n , $\Psi^{-1}(\varphi_{\text{ENT}}(\Delta))$ (図4) の形から, 容易に次の結果が得られる。

定理 4.5

$$\|E(\text{台形則})\|_{H_2} \leq \text{const} \cdot \exp(-c' \frac{N}{\log N})$$

ただし, ここで言う台形則とは, $h \sum_{j=-N}^N f(jh)$ の形の公式を意味するものとする

(定理 4.5 の証明)

補題 4.4 から, 台形則の生成する誤差に対して, 次の評価が成り立つ.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-N}^N f(jh) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\pi^2}{4}(d-\varepsilon))}{1 - \exp(-\frac{\pi^2}{4}(d-\varepsilon))} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} |w(x + \frac{\pi}{2}(d-\varepsilon)i)| dx \cdot \|f\|_{\Psi} + h \sum_{|j| > N} |f(jh)|.$$

ここで, d は図 4 で定義した量で, ε は正の任意定数 ($0 \leq \varepsilon < d$), $w(z) \triangleq (\Psi(z))^d (1 - \Psi(z))^d \Psi'(z)$ である. ($\int_{-\infty}^{\infty} |w(x + \frac{\pi}{2}(d-\varepsilon)i)| dx < \infty$ に注意)

この評価の右辺は, 以下のよう to 評価される.

$$\begin{aligned} h \sum_{|j| > N} |f(jh)| &\leq h \sum_{|j| > N} |w(jh)| \cdot \|f\|_{\Psi} \\ &\leq \left(h \sum_{|j| > N} \text{const.} \cdot \exp(-2(\alpha+1-\varepsilon') \cosh(2jh)) \right) \cdot \|f\|_{\Psi} \quad (\varepsilon' > 0) \\ &\leq \text{const.} \cdot h \exp(-2(\alpha+1-\varepsilon') \cosh(2Nh)) \cdot \|f\|_{\Psi}. \end{aligned}$$

ここで, $-\frac{\pi^2}{4}(d-\varepsilon) = -2(\alpha+1-\varepsilon') \cosh(2Nh)$ とするよう to $h \varepsilon$ とし, $h \doteq c \cdot \log N / N$ とする, この $h \varepsilon$ 以上の評価に代入すると

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-N}^N f(jh) \right| \leq \text{const.} \cdot \exp(-c' \frac{N}{\log N}) \cdot \|f\|_{\Psi}$$

を得る. これは, 定理 4.5 の評価を意味する. ■

定理 4.5 の結果を, H_1 と H_{Ψ} の関係 (定理 4.1) を用いて, H_1 の

結果に翻訳すると次のようになる。

定理 4.6

H_1 における積分公式 $h \sum_{j=-N}^N g(\psi(jh)) \cdot \psi'(jh)$ ($h = c \log N / N$) に対して

$$\|E(h\psi(jh); \psi(jh))\|_1 \leq \text{const}' \cdot \exp(-c' \frac{N}{\log N})$$

が成り立つ。

この結果からわかるように、IMT 積分公式の誤差評価が自然な形で拡張されるような関数空間 H_1 においては、積分公式

“ ψ 変換 (IMT 変換 + tanh 変換) + 台形則”

が (IMT 積分公式ではなく) 最適 — 誤差ノルムの下限の評価と同一形の誤差評価が得られているという意味で最適 — である。

4.4 DE 公式に対する誤差ノルムの評価

DE 公式 (6) は、積分区間の端点に代数的特異性をもつ関数の積分公式として、非常に有効であることが知られている。

一方、§3 の注意で述べたように、 H_1 は 0, 1 において代数的特異性をもつような関数の成る空間と考えられる。そこで、ここでは、DE 公式を H_1 の関数に施した時の誤差について考える。

まず、次の H_1 から DE 変換によって導入される関数空間を考える。(ただし、DE 変換: $\frac{1}{2} \tanh(\frac{\pi}{2} \sinh(z)) + \frac{1}{2} \in \Phi$ と記す)

$H_\Phi = \{f(z) \mid (1) f(z) \text{ は } \Phi^{-1}(\varphi_{\text{IMT}}(\Delta)) \text{ 上で正則,}$

(2) $\sup_{z \in \Phi^{-1}(\varphi_{\text{IMT}}(\Delta))} |f(z)(\Phi(z))^\alpha (1-\Phi(z))^\alpha / \Phi'(z)| < +\infty\}$

ここでノルムは $\|f\|_{\Phi} = \sup_{\xi \in \Phi^{-1}(\varphi_{\text{IMT}}(\Delta))} |f(\xi)(\Phi(\xi))^d(1-\Phi(\xi))^d/\Phi'(\xi)|$ で入れる。

この時、次の事実が成り立つ (証明略)。

《事実》 $\Phi^{-1}(\varphi_{\text{IMT}}(\Delta)) \supset$ 帯領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$ 。

このことから、定理 4.5 の証明と同様にして、次の結果を得る。

定理 4.7

$$\|E(\text{台形則})\|_{\Phi} \leq \text{const} \cdot \exp(-c \frac{N}{\log N})$$

この結果は、 H_1 と H_{Φ} の関係に鑑みれば、次の結果が成り立つことを意味する。

定理 4.8

$$\|E(\text{DE 公式})\|_1 \leq \text{const} \cdot \exp(-c \frac{N}{\log N})$$

この結果は、 H_1 では、DE 公式が最適 - 4.3 の (II) にあけると同じ意味で一であることを物語っている。

§5 おわりに (まとめと今後の課題)

本論文において、IMT 積分公式が有効な (論文 [1] にある IMT 積分公式の誤差評価法がそのまま適用出来るよう自然な) 関数空間 H_1 を設定した。そして、この関数空間における積分作用素を近似する時の誤差ノルムの下限の評価を示した。そして、さらに、DE 公式や (IMT 変換 + tanh 変換) を行、これから台形則を適用する公式が H_1 で最適であることを示した。

今後の課題としては, IMT型の他の積分公式 (IMT型 DE公式や一般化したIMT公式 [6], [7]) に対して, こゝで行なったのと同じ研究を行なうことが残っている (この研究は, 本質的に, 変換に用いる関数の Riemann 面を調べることと帰着される). 今後の研究に俟ちたい.

参考文献

- [1] 伊理正夫, 森口繁一, 高沢嘉光: ある数値積分公式について, 京都大学数理解析研究所講究録, No.21 (1970), pp.82-118.
- [2] P.J. Davis and P. Rabinowitz: "Methods of Numerical Integration," 2nd-ed., Academic Press(1984).
- [3] M. Mori: Quadrature formulas obtained by variable transformation and the DE-rule, J. Comp. Appl. Math., Vol.12 & 13 (1985), pp.119-130.
- [4] 杉原正顕: DE変換公式の最適性について, 京都大学数理解析研究所講究録, No.585 (1986), pp.150-175.
- [5] F. Stenger: Integration formulas based on the trapezoidal formula, J. Inst. Math. Appl., Vol.12 (1973), pp.103-114.
- [6] M. Mori: An IMT-type double exponential formula for numerical integration, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol.14 (1978), pp.713-729.
- [7] K. Murota and M. Iri: Parameter tuning and repeated application of the IMT-type transformation in numerical quadrature, Numer. Math., Vol.38 (1982), pp.327-363.