

Schrödinger 半群 u に対する長時間漸近形と正值解

東京都立大 村田 貴 (Minoru Murata)

定常 Schrödinger 方程式 $(-\Delta + V)u \equiv H u = 0$

の正值解と Schrödinger 半群 e^{-tH} の $t \rightarrow \infty$ での漸近行動との関わりを論じたい。

§1. 問題設定

Ω : $\mathbb{R}^n$ の領域

V : $L_{p,loc}(\Omega)$ に属する実数値関数 ($p > n/2$)

$$C \equiv \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + V |\varphi|^2 dx > -\infty$$

$$\|\varphi\|_2 = 1$$

$\{\Omega_j\}_{j=1}^\infty$: regular な境界を持つ Ω の領域の列で, $\Omega_j \subset \subset \Omega_{j+1}$, $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$

H_j : $(-\Delta + V)$ on $C_0^\infty(\Omega_j)$ の $L_2(\Omega_j)$ での Friedrichs ext.

H : $(-\Delta + V)$ on $C_0^\infty(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ での Friedrichs ext.

Fact 1° $\forall \lambda \leq c \quad \exists G_j(x, y; \lambda) : \text{positive Green}$
function for $H_j - \lambda$ (i.e. $G_j : L^2(\Omega_j) \rightarrow L^2(\Omega_j)$
 $(H_j - \lambda)^{-1}$ の核関数, Ω_j で正値)

2° $\forall \lambda < c \quad \exists G(x, y, \lambda) : \text{pos. Green f. for}$
 $(H - \lambda)$ with $G = \lim_{j \rightarrow \infty} G_j$

3° $\lim_{j \rightarrow \infty} G_j(\cdot, y; c) \equiv \infty \quad \exists \tau = 12$
 " " $\equiv G(\cdot, y; c) \in L^1_{loc}(\Omega)$

第1の場合 $(H-c, \Omega)$ は critical,

例 2 $(H-C, \Omega)$ は subcritical である。

$G(x, y; c) \in$ minimal Green function of $\mathcal{F}_\infty$.

シ を積分核とする作用素は $L_2(\Omega)$ での有界作用素ではない事に注意せよ。

4° $\exists$ positive sol. u of $(H-\lambda)u=0$ in Ω
 $\iff H-\lambda \geq 0$ i.e. $\lambda \leq c$

5° $U_j(t, x, y)$: kernel for e^{-tH_j}
 $U(t, x, y)$: " e^{-tH}

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j(t, x, y) = \psi(t, x, y),$$
$$G(x, y, \lambda) = \int_0^{\infty} v(t, x, y) e^{-\lambda t} dt \quad (v_2 \leq c)$$

《問題》 $U(t, x, y)$ の $t \rightarrow \infty$ での漸近形を求めよ。

命題 $\forall \delta > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad \exists m, M > 0 \quad \text{s.t.}$

$$m e^{-(c+\delta)t} \leq \sup_{(x,y) \in \Omega_k^2} U(t, x, y) \leq M e^{-ct} \quad (\forall t > 1)$$

以下、簡単のため $c = \inf \sigma(H) = 0$ とする。

§2. Criticality & Subcriticality

定理 (i) $\int_1^\infty U(t, x, y) dt < \infty \Leftrightarrow (H, \Omega) : \text{subcrit.}$
 $\Leftrightarrow \exists q \geq 0, q \neq 0 \quad \text{s.t.} \quad H - q \geq 0$

(ii) $\int_1^\infty U(t, x, y) dt = \infty \Leftrightarrow (H, \Omega) : \text{crit.}$

$$\Leftrightarrow H - q \not\geq 0 \quad \forall q \geq 0, q \neq 0$$

$\Rightarrow H u = 0$ in Ω の正値解は定数倍を除いて一意

系 $0 : \text{eigenvalue} \Rightarrow (H, \Omega) : \text{critical}$

定理 $\Omega = \mathbb{R}^n$ とする。

(i) $\exists$ pos. sol. v of $Hv = 0$ in $\mathbb{R}^n$ s.t.

$$\int_1^\infty r^{1-n} \left[\int_{S^{n-1}} v^2(r\omega) d\omega \right]^{-1} dr = \infty$$

$\Rightarrow (H, \mathbb{R}^n) : \text{critical}$

(ii) $\exists$ pos. sol. u of $Hu = 0$ in $\mathbb{R}^n$ s.t.

$$\int_1^\infty r^{1-n} u^{-2}(r\omega) dr < \infty \quad \forall \omega \in U$$

for a Borel subset U of S^{n-1} with $|U| > 0$

$\Rightarrow (H, \mathbb{R}^n) : \text{subcrit.}$

証明には、上記定理と $(H\varphi, \varphi) = \int |\nabla(\frac{\varphi}{v})|^2 v^2 dx$ を用いよ。これは市原 (Publ. RIMS, Kyoto Univ. 14 (1978), 441-486) による付録. 拡散過程の transience & recurrence の判定法 からも証明される。

(H, Ω) が critical な場合, 弱..意味で

$$v(t, x, y) \sim v(t, x_0, y_0) \frac{v(x)}{v(x_0)} \frac{v(y)}{v(y_0)} \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

が言える。ここで x_0, y_0 は固定点, v は "唯一" の正値解。即ち次の定理が成立する。

定理 (H, Ω) : critical , $T > 0$, $(x_0, y_0) \in \Omega^2$

v : pos. sol. of $Hv = 0$ in Ω

$$\Rightarrow \int_T^\infty V(t, x, y) e^{-\alpha t} dt$$

$$= \frac{v(x)}{v(x_0)} \cdot \frac{v(y)}{v(y_0)} \int_T^\infty V(t, x_0, y_0) e^{-\alpha t} dt [1 + o(1)]$$

as $\alpha \downarrow 0$ uniformly on each compact subset of Ω^2

証明 には Y. Pinchover (Preprint 1988) の observation

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} G(x, y; \alpha) / G(x_0, y_0; \alpha) = v(x) v(y) / v(x_0) v(y_0)$$

を用いる。

注意 v : L_2 固有関数

$$\Rightarrow V(t, x, y) = v(x) v(y) [1 + o(1)] \text{ as } t \rightarrow \infty$$

$$\text{on } \forall K \subset \subset \Omega^2$$

(H, Ω) が subcritical な場合 , e^{-tH} の $t \rightarrow \infty$ での漸近形はかなり複雑である。以下 $\Omega = \mathbb{R}^n$ として 2, 3 の考察をする。

§3. 1-dimensional case

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V \quad \text{on } L_2(\mathbb{R}), \quad \inf \sigma(H) = 0$$

定理 $(H, \mathbb{R})$: subcrit.

$$\Leftrightarrow \exists \psi_1, \psi_2 : \text{pos. sol. s.t.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (\psi_1(x) / \psi_2(x))^{\pm 1} = 0$$

定理 $(H, \mathbb{R})$: subcrit. $\Rightarrow \{F_{jk}(t)\}_{j,k=1}^2$ s.t.

$$U(t, x, y) = \sum_{j,k=1}^2 F_{jk}(t) \psi_j(x) \psi_k(y) [1 + o(1)]$$

$$\text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{on } \forall K \subset \subset \mathbb{R}^2$$

$$F_{11} + F_{22} > 0, \quad F_{12}^2 \leq F_{11} F_{22}, \quad F_{12} = F_{21}$$

$$F_{jj} \geq 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} F_{12}(t) \geq 0$$

最後の結論 $\liminf F_{12}(t) \geq 0$ の証明には本定理を用いる。他は Titchmarsh - Kodaira の固有函数展開から導かれる。

例 1 V の $+\infty$ と $-\infty$ での漸近行動が同程度でないと, "弱" の正適解だけが漸近公

式に現われる。例之は $V(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ 1 & (x \leq 0) \end{cases}$

の場合,

$$U(t, x, y) \cong \text{Const. } t^{-3/2} \psi(x) \psi(y) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1+x & (x > 0) \\ e^x & (x \leq 0) \end{cases}$$

例 2 $U(t, x, y)$ の漸近形に 2 つの 同 等 で な い

関数 F_{11} と F_{22} が 現われる 様 な ポテンシヤル V
 と Gelfand-Leritan の スペクトル問題 に対す
 理論 を 用いて 構成 できる。即ち,

$$\exists V(x) = \begin{cases} V_{\pm}(x), & \pm x \geq 1 \\ k, & 0 \leq x < 1 \\ 2k, & -1 < x < 0 \end{cases} \quad (k \gg 1).$$

s.t.

$$e^{-t(-d^2/dx^2 + V)}, \text{ kernel } U(t, x, y)$$

$$\cong F_1(t) \chi_1(x) \chi_1(y) + F_2(t) \chi_2(x) \chi_2(y)$$

$$F_1(t) \cong t^{-3/4} \exp(-2\sqrt{t})$$

$$F_2(t) \cong \quad \quad \quad [2 + \cos \log \sqrt{t}]$$

χ_1, χ_2 : linearly independent pos. sol.

§4. 球対称ポテンシャル

$$V = V(|x|), \quad H = -\Delta + V, \quad (H, \mathbb{R}^n) : \text{subcrit.}$$

とき

(cf. M. Murata, Duke Math. J.

53 (1986), 869-943) 次の (i) 又は (ii) が成立。

(i) 正値解 $K(x, \infty)$ が存在して, 任意の正値解
は $K(x, \infty)$ の定数倍。

(ii) 単位球面 S^{n-1} で parametrized された正値解
の族 $\{K(x, \omega)\}_{\omega \in S^{n-1}}$ が存在して

$\forall u : \text{pos. sol.} \quad \exists \mu : \text{finite Borel measure on } S^{n-1}$

$$\text{s.t.} \quad u(x) = \int_{|\omega|=1} K(x, \omega) \mu(d\omega)$$

Conjecture $\exists F_0(t) \quad \text{s.t.}$

$$U(t, x, y) \cong F_0(t) \bar{\Phi}(x, y) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

$$\bar{\Phi}(x, y) = \begin{cases} K(x, \infty) K(y, \infty) & \text{for the case (i)} \\ \int_{S^{n-1}} K(x, \omega) K(y, \omega) d\omega & \text{, (ii)} \end{cases}$$

この予想は 才1の場合と、才2の場合の Special case には成立することが確かられている。

§5. いくつかの注意と問題

- 1° テンサー積の振動法を用いて既知の事実から情報を引き出せる。例えば、Very Short Range Potentials に関しては M. Murata [J. Funct. Anal. 56 (1984), 300-310] を見よ。

2° 問題

$$v(t, x, y) \underset{?}{\cong} \sum_{j=1}^N F_j(t) \Phi_j(x, y) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

$$(1 \leq N \leq \infty, \Phi_j(\cdot, y) : \text{pos. sol.})$$

$\{\Phi_j(\cdot, y)\}_j$ の Martin 理論での特徴づけ?

$F_j(t)$ の decay rate と $\Phi_j(\cdot, y)$ の growth rate の関係?