

一様分布に基づくチェビシェフ級数展開 と一つの自動積分法

島田 達生, 長谷川 武夫 (名大工学部)

1. はじめに

有限区間上で滑らかな関数の自動積分法の一つに, 被積分関数のチェビシェフ級数展開を項別積分する Clenshaw-Curtis 積分法がある. この方法は収束性, 安定性ともによい. 高速 cosine 変換 (FFT) を用いれば, 演算回数も少なくできる. 所要の精度に応じて標本数をなるべく少なく決定したいが, この方法ではそのべきでしか定められない.

Clenshaw-Curtis 法の特長を生かして, 標本数に関する制限を以下のようにゆるめたい.

目的. 「区間 $[-1, 1]$ で滑らかな関数 $f(x)$ に対して, 等差数列的に標本点を増しながら $f(x)$ の "Chebyshev 有限級数" の列をつくる. その項別積分によって

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) dx$$

を求める. ここで $w(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で必ずしも正と

は限らない。重み係数

$$\mu_k = \int_{-1}^1 w(x) T_k(x) dx$$

が解析的に求めらるか，漸化式で計算できればよい。

正の整数の増え列 $N_0 < N_1 < \dots < N_e < \dots$ と区間

$[-1, 1]$ に標本点列

$$x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_{N_0}^{(0)}$$

$$x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_{N_1}^{(1)}$$

$$\dots$$

$$x_0^{(e)}, x_1^{(e)}, \dots, x_{N_e}^{(e)}$$

とえ， $f(x)$ の補間式列をつくる。標本点 $\{x_j^{(e)}, 0 \leq j < N_e\}$ を N_e+1 次のケルビシエフ多項式の零点にとれば，収束性，安定性ともによいが，標本点 $x_j^{(e)}$ が e に依存するので各段階で，それ以前の段階の $f(x)$ に関する情報が利用できない。

したがって算法の経済性の立場からいえば， $x_j^{(e)} = x_j$ と標本点は e に依存しないことが望ましい。

算法の基本は次の三点である。

1) 区間 $(0, 1)$ 上に一様分布する Van der Corput 列¹⁾ からケルビシエフ分布する点列をつくり，これを標本点に用いる。

2) N 点づつ標本点を追加しながら拡張された意味の 4 エビシエフ補間式の列をつくる. このとき N 項 FFT を用いれば, 演算回数を 1 点づつ追加する場合 (Newton 補間) に比べて $1/N$ に減らすことができる.

3) 上で求めた 4 エビシエフ級数を項別積分する.²⁾

任意の指数関数 a^k ($1 < a < 2$) は, 区分的に直線近似できることから, 前述の方法を標本数を a^k のオーダーで増やす補間過程, 自動積分法に拡張することも可能である.

2 一様分布と単位円周上の補間

n ビットの正の整数 k の 2 進表示

$k = k_1 + k_2 2 + \cdots + k_{n-1} 2^{n-1} + 2^n$, $k_i \in \{0, 1\}$ に対し, k の 2 進逆転と折り返しにより k の共役反転 k^* を

$$k^* = k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \cdots + k_{n-1} 2^{n-1} + 2^{-n}, \quad 0^* = 0$$

によって定義する. $[0, 1)$ 上に分布する $\{k^*\}$ は, Vander Input 列とよばれる¹⁾ 一様分布列である. 実際, $\{k^*\}$ から, 1 次多項式

$$\omega_\ell(z) = \prod_{0 \leq k < \ell} (z - \lambda_k), \quad \lambda_k = e^{2\pi i k^*}$$

を定義すれば, $\ell = \ell_1 + \ell_2 2 + \cdots + \ell_n 2^{n-1}$, $\ell_n = 1$ のとき

$$\omega_\ell(z) = \prod_{\ell_v \neq 0, 1 \leq v < n} (z^{2^{v-1}} + \lambda_{\ell_v}^{2^{v-1}}) \quad (1)$$

と書けるからである。後の都合上 $\omega_0(z) = 1$ とおく。

この直接的結果として $\omega_\lambda(z)$ の次の諸性質が明らかとなる。

$$\omega_\lambda(\lambda_\lambda z) = \lambda_\lambda^\lambda \prod_{\lambda \neq 0} (z^{2^{\lambda-1}} + 1) \quad (2)$$

N が 2 のべき乗ならば

$$\omega_{\lambda N}(z) = \omega_\lambda(z^N) \quad (3)$$

単位円周 $|z| = 1$ における $|\omega_\lambda(z)|$ の最大値について

$$\max_{|z|=1} |\omega_\lambda(z)| = |\omega_\lambda(\lambda_\lambda)| = 2^{\sum \lambda_\nu} \quad (4a)$$

半径 $r > 1$ の円周上において

$$\frac{\max |\omega_\lambda(z)|}{\min |\omega_\lambda(z)|} < \frac{r+1}{r-1} \quad (4b)$$

が成り立つ。

上の不等式だけ証明する。簡単のため $\omega_\lambda(\lambda_\lambda z)$ をあらためて $\omega_\lambda(z)$ とおけば

$$\omega_\lambda(z) = \frac{z^{2^N} - 1}{(z-1) \prod_{\lambda \neq 1} (z^{2^{\lambda-1}} + 1)}$$

であるから $|z| = r$ 上において

$$|\omega_\lambda(z)| > \frac{r^{2^N} - 1}{(r+1) \prod_{\lambda \neq 1} (r^{2^{\lambda-1}} + 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r-1}{r+1} \prod_{\ell \neq 0} (r^{2^{\ell-1}} + 1) \\
&= \frac{r-1}{r+1} \max_{|z|=r} |w_\ell(z)| \quad (\text{証明終})
\end{aligned}$$

一様分布列 $\{k^*\}$ のつくり方は、いくつか考えられるが一例を示す。

$$\begin{aligned}
1^* &= 1/2 \\
(2^\ell)^* &= (2^{\ell-1})^* / 2 \\
(2^\ell + j)^* &= (j^* + (2^{\ell-1} + j)^*) / 2, \quad 0 < j < 2^{\ell-1} \\
(2^{\ell+1} - 1 - j)^* &= \overline{(2^\ell + j)^*}, \quad 0 \leq j < 2^{\ell-1} \\
\ell &= 1, 2, \dots \quad (5)
\end{aligned}$$

ただし $\alpha \in (0, 1)$ の 1 に関する補数 $\bar{\alpha}$ を表わす。

この漸化式から容易に $\lambda_k = e^{2\pi i k^*}$ に関する漸化式を導くことができる。

単位円周板 $|z| \leq 1$ で解析的な関数 $f(z)$ に対する補間過程を構成する。 N を 2 のべきとする。単位円周上の一様分布列 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N, \dots, \lambda_{2N-1}, \dots$ を N 個ずつ区切り、最初の組から補間点として採用する。すなわち N 個ずつ点を追加しながら補間式の列 $L_{\ell N}(f, z)$, $\ell = 1, 2, \dots$ をつくる。

いま $z^N - \lambda_\ell$ の零点は $\lambda_{\ell N+j}$, $0 \leq j < N$ であるから

$$L_{(\ell+1)N}(f, z) = L_{\ell N}(f, z) + w_\ell(z^N) \sum_{0 \leq k < N} A_{\ell, k} z^k$$

あるいは

$$L_{(L+1)N}(f, z) = \sum_{\lambda=0}^L \omega_{\lambda}(z^N) \sum_{0 \leq \kappa < N} A_{\lambda, \kappa} z^{\kappa} \quad (6)$$

と書いてよい。係数 $A_{\lambda, \kappa}$ は、補内条件

$$f(\lambda_{LN+j}) = \sum_{\lambda=0}^L \omega_{\lambda}(\lambda_L) \sum_{0 \leq \kappa < N} A_{\lambda, \kappa} \lambda_{LN+j}^{\kappa} \quad (7)$$

から一意に定まる。左辺の N 項離散型フーリエ変換を

$$A_{\kappa} = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq j < N} f(\lambda_{LN+j}) \lambda_{LN+j}^{-\kappa}, \quad 0 \leq \kappa < N \quad (8)$$

と表せば、補内条件 (7) は

$$A_{\kappa} = \sum_{0 \leq \lambda \leq L} \omega_{\lambda}(\lambda_L) A_{\lambda, \kappa}, \quad 0 \leq \kappa < N \quad (9)$$

と変る。したがって、求める係数 $A_{\lambda, \kappa}$ は

$$A_{\lambda, \kappa} = \frac{A_{\kappa}}{\omega_{\lambda}(\lambda_L)} - \sum_{0 \leq i < L} \frac{\omega_i(\lambda_L)}{\omega_{\lambda}(\lambda_L)} A_{i, \kappa} \quad (10)$$

によつて帰納的に計算できる。この式は、 κ を固定すれば“ニュートン補内”の差分子の計算と考えられる。

L 個の係数 $A_{\lambda, \kappa}$, $0 \leq \lambda < L$, $0 \leq \kappa < N$ を求めるには、必要な複素数乗算回数は、(8) に N 項 FFT を用いれば、(8), (10) あわせ $L N (\log_2 N + L) / 2$ と表す。これは $L N$

が十分大ならば, 1 矢つ違ひする場合に比べ, $1/N$ 以下

補間式の誤差は, 差分商を用いて

$$f(z) - L_{2N}(f, z) = f[z, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2N-1}] \omega_2(z^N) \quad (11a)$$

ある λ は 適当な $r > 1$ をとり

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{\omega_2(z^N)}{(s-z) \omega_2(s^N)} f(s) ds \quad (11b)$$

と複素積分表示できる.

半径 r の周周上での $|f(z)|$ の最大値を $M(r)$ とすれば, (4a), (4b) を用いることにより

$$\begin{aligned} |f(z) - L_{2N}(f, z)| &< 2^{\sum \lambda_v} \cdot \frac{r}{r-1} \cdot \frac{r^{N+1}}{r^N-1} \cdot \frac{M(r)}{\max_{|s|=r} |\omega_2(s)|} \\ &< 2^{\sum \lambda_v} \cdot \frac{r^{N+1}}{r^{2N-1} (r-1) (r^N-1)} M(r) \quad (12) \end{aligned}$$

となる. 右辺の誤差は指数関数的 $O(r^{-2N})$ に減少する.

上式は, $f(z)$ の解析性と関連して打つて誤差が減少する漸近的傾向を知るにはよいが, 実際の誤差評価には使えない.

そこで差分商 (11a) の $z=0$ を中心とするテイラー展開を求め, 又 $\lambda_{2N}, \lambda_{2N+1}, \dots, \lambda_{(2+1)N-1}$ を補間点として (10) で求めた係数が, (11a) のテイラー展開の係数の近似値

となる。この対応はフーリエ係数と離散型フーリエ係数の関係になっている。したがって

$$\begin{aligned} |f(z) - L_N(f, z)| &\approx |\omega_N(z^N)| \left| \sum_k A_{n,k} z^k \right| \\ &\leq 2^{\sum n_k} \sum_k |A_{n,k}| \\ &\leq 2 \sum_k |A_{n,k}|. \end{aligned} \quad (13)$$

で評価すればよい。しかし N が大きくなれば、過大評価となるから k による和は、最後の 2~3 項をそればよいであろう。

収束判定に $\epsilon > 0$ を与えたときの補間過程の停止規則として

$$2 \sum_k |A_{n,k}| < \epsilon \quad (14)$$

を用いればよい。

3. 閉区間 $(-1, 1)$ 上でのケエビシエフ補間過程

単位円周上に一様分布する点列を実軸上の区間 $[-1, 1]$ に射影した点列を、ケエビシエフ分布という。これを標本点とする補間式を一般化したケエビシエフ補間式とよぶことにする。一様分布の点列のつくり方には対応してケエビシエフ分布する点列のつくり方も数多く考えられるが、一様性が最もよいとされている Van der Corput 列から次のようにして

つくる. n ビットの自然数 k に対し

$\alpha_k = (k + 2^{n-1})^* = k_1 2^{-1} + k_2 2^{-2} + \cdots + k_{n-1} 2^{-(n-1)} + 2^{-n-1}$
を定義する. k^* と α_k の違いを例で示す.

k	k^*	α_k	
1	0.1	0.01	$= 1/4$
2	0.01	0.001	$= 1/8$
3	0.11	0.101	$= 5/8$
4	0.001	0.0001	$= 1/16$
5	0.101	0.1001	$= 9/16$
6	0.011	0.0101	$= 5/16$
7	0.111	0.1101	$= 13/16$

表 1

単位円周上の数列 $\lambda_k = e^{2\pi i k^*}$ は, 原点および実軸に関して対称であるが, $e^{2\pi i \alpha_k}$ は, 原点に関して対称, 実軸に関して非対称であるので, これを実軸に射影した数列

$$\alpha_k = \cos 2\pi \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

は, 原点に関して対称に分布し, すべて相異なる.

三角関数表 (15) の能率的算法を意欲して, 漸化式

$$\alpha_{2^l} = \alpha_{2^{l-1}} / 2$$

$$\alpha_{2^l+j} = \alpha_{2^{l-1}+j} - \alpha_{2^l}, \quad 0 < j < 2^{l-1}$$

$$\alpha_{2^{l+1}-j-1} = \overline{(\alpha_{2^{l-1}+j} + \alpha_{2^l})}, \quad 0 \leq j < 2^{l-1}$$

9 $l = 1, 2, \dots \quad (16)$

を示しておく. α_j の定義から

$$\sin \pi \alpha_{2j} = -\cos \pi \alpha_{2j+1}, \quad \sin \pi \alpha_{2j+1} = \cos \pi \alpha_{2j}$$

であるから, 三角関数の半角の公式と加法定理を用い, $\cos \pi \alpha_j$, $1 \leq j < 2^n$ を平方根 n 回, 乗算 2^n 回で求めることができる.

また χ エビシエフ分布する実列 $\{x_k\}$ を零点とする多項式

$$\tilde{w}_{\ell-1}(x) = 2^{\ell-1} \prod_{1 \leq k < \ell} (x - x_k), \quad \ell \geq 1$$

$$\tilde{w}_0(x) = 1$$

を定義する. $w_\ell(z)$ の表示 (2) の導出と同様にして

$$\tilde{w}_{\ell-1}(x) = 2^{\sum \ell_\nu} \prod_{\nu=1}^{\ell-1} T_{2^{\nu-1}}(x) \prod_{\ell_\nu \neq 0} \{T_{2^{\nu-1}}(x) + T_{2^{\nu-1}}(x_{\ell_\nu})\} \quad (17)$$

ただし ν の動く範囲は $1 \leq \nu < n$. 以下同じ.

を得る. ここで $T_k(x)$, $\prod_k(x)$ は k 次の第 1 種, 第 2 種 χ エビシエフ多項式である.

単位円周上に零点をもつ $w_\ell(z)$ の性質 (4a), (4b) に対応して不等式

$$|\tilde{w}_{\ell-1}(w_0 \theta) \sin \theta| \leq 4^{\sum \ell_\nu} \quad (18)$$

が成り立つ.

つぎにパラメータ α を含む高速 cosine 変換法について述べる. α は 1 よりやなる正数とする. $N-1$ 次の cosine 級数

$$t(\theta) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \theta + \cdots + a_{N-1} \cos (N-1) \theta \quad (19)$$

の N 個の標本 $t_{j+d} = t\left(\frac{2\pi}{N}(j+d)\right)$, $0 \leq j < N$ から, 各係数 A_k を求めることが問題である. $\{t_{j+d}\}$ に形式的に N 項変換型 FFT を適用して

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq j < N} t_{j+d} \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} k(j+d)\right) \quad (20)$$

とおく. λ/τ の実数性より出力データはエルミート対称となる.

$$A_{N-k} = \overline{A_k} \exp(-2\pi i d) \quad , \quad 0 \leq k \leq N$$

$$\text{ただし} \quad A_N = A_0 \exp(-2\pi i d)$$

この事実と三角関数の逆変換関係により

$$a_k = \frac{2}{N \sin 2\pi d} \operatorname{Im} \overline{A_{N-k}} \quad , \quad 0 \leq k < N \quad (21)$$

が得られる. $\operatorname{Im} z$ は z の虚数部.

三角多項式 $t(\theta)$ が N 項級数

$$t(\theta) = a_1 \sin \theta + a_2 \sin 2\theta + \cdots + a_N \sin N\theta$$

ならば

$$a_k = \frac{2}{N \sin 2\pi d} \operatorname{Re} A_{N-k} \quad , \quad 1 \leq k < N$$

$$a_N = \frac{1}{N \sin 2\pi d} A_0 \quad (22)$$

となる. N が 2 のべき乗ならば, N 項 cosine 変換, sine 変

換に必要な複素乗算乗回数数は、実数型FFT (20) だけに費やすので $\frac{1}{4} N \log_2 N$ である。

とくに $\alpha = 1/4$ ならば, (21), (22) は中矢公式によるフーリエ変換である。

以上準備して閉区間 $(-1, 1)$ における $f(x)$ の補間過程を構成する。標本値 $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N, \dots, x_{2N-1}, \dots$ において, 初めの $N-1$ 点, 以後 N 点づつ追加しながら補間式の列をつくる。それは

$$f(\cos \theta) \sin \theta = \sum_{k=1}^{N-1} A_{0,k} \sin k\theta + \sin N\theta \sum_{\lambda=1}^{\infty} \tilde{w}_{\lambda-1}(\cos N\theta) \cdot \sum_{0 \leq k < N}' A_{\lambda,k} \cos k\theta \quad (23)$$

と表わし, 係数 $A_{\lambda,k}$ を, 補間条件より決定する。 $\sum'$ は初項を $1/2$ 倍して和をとることを意味する。

まず $A_{0,k}$ は, $f(\cos \theta) \sin \theta$ に対するコ形公式による sine 変換によって求まる。

$$A_{0,k} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f(\cos \frac{\pi}{N} j) \sin \frac{\pi}{N} j \sin \frac{\pi}{N} k j \quad (24)$$

これは $A_{\lambda,k}$, $\lambda \geq 1$ の場合である。2段階の補間条件は

$$f(\cos \theta_j^e) \sin \theta_j^e = \sum_{k=1}^{N-1} A_{0,k} \sin k\theta_j^e + \sin 2\pi d_e \sum_{\lambda=1}^{\infty} \tilde{w}_{\lambda-1}(\cos 2\pi d_e) \cdot \sum_{0 \leq k < N} A_{\lambda,k} \cos k\theta_j^e, \quad 0 \leq j < N \quad (25)$$

$$\text{ただし } \theta_j^1 = \frac{2\pi}{N} (j + d_x)$$

とす。この $\cos \sin$ 変換を行えば、左辺を A_k で表わす。
(107)より d_x を含む

$$A_k = \frac{1}{\sin 2\pi d_x} \left(A_{0, N-k} - \cos 2\pi d_x \cdot A_{0, k} \right) + \sin 2\pi d_x \sum_{i=1}^l \tilde{\omega}_{i-1}(\cos 2\pi d_x) A_{i, k} \quad (26)$$

$$A_{0,0} = A_{0,N} = 0, \quad 0 \leq k < N$$

これを $A_{\ell, k}$ に関する解く。 $\ell = 1$ のとき $\sin 2\pi d_1 = 1$
 $\tilde{\omega}_0(\cos 2\pi d_1) = 1$ であるから $A_{1, k}$ は容易に求まるので
 $\ell \geq 2$ の場合を述べればよい。

$$B_{\ell-1} = \frac{A_k}{\sin 2\pi d_\ell} - \frac{A_{0, N-k} - \cos 2\pi d_\ell A_{0, k}}{\sin^2 2\pi d_\ell} - A_{1, k}$$

$$B_i = \frac{B_{i+1}}{2(\cos 2\pi d_\ell - \cos 2\pi d_{\ell-i-1})} - A_{\ell-i, k}$$

$$i = \ell-2, \ell-3, \dots, 1$$

$$A_{\ell, k} = \frac{B_1}{2(\cos 2\pi d_\ell - \cos 2\pi d_{\ell-1})} \quad (27)$$

$$0 \leq k < N, \quad \ell = 2, 3, \dots$$

==で各 B_i は, k に依存するが複雑なので省略した。

以上によって $(-1, 1)$ 上での $f(x)$ の補間過程をつくることに
 行った。又 $x_1, x_2, \dots, x_{\ell N-1}$ 上での $f(x)$ の補間式と利

余項は

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \sum_{0 \leq k < N} A_{0,k} \bar{U}_{k-1}(x) + \bar{U}_N(x) \sum_{\lambda=1}^{L-1} \tilde{\omega}_{\lambda-1}(T_N(x)) \\
 & \cdot \sum_{0 \leq k < N} A_{\lambda,k} T_k(x) \\
 & + \bar{U}_N(x) \tilde{\omega}_{L-1}(T_N(x)) f[x, x_1, \dots, x_{LN-1}]
 \end{aligned} \tag{28}$$

と表示できる。

$LN-1$ 階差分商 $f[x, x_1, \dots, x_{LN-1}]$ は x の $4L$ ビンセント級数 (離散型) に展開したものが

$$f[x, x_1, \dots, x_{LN-1}] \simeq \sum'_{0 \leq k < \infty} A_{L,k} T_k(x) \tag{29}$$

ただし標本点は $x_{LN}, x_{LN+1}, \dots, x_{(L+1)N-1}$ にほかならない。

円区間 $[-1, 1]$ で $f(x)$ が解析的ならば, z -平面上の $1, -1$ を焦点とする楕円

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}(r-\frac{1}{r})^2} \leq 1, \quad r > 1$$

の上で解析的としてよい。この境界を C とすれば差分商は

$$f[x, x_1, \dots, x_{LN-1}] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-x) \bar{U}_N(z) \tilde{\omega}_{L-1}(T_N(z))} dz \tag{30}$$

と表現できるので, (17), (18) より剰余項は指数関数

的 $O(r^{-2N})$ で減少することがわかる。

4 閉区間 $[-1, 1]$ 上でのチェビシエフ補間過程

いままで区間の端点を用いたかったので、両端の点を用いる場合を述べる。このために区間の端点に対応して α_0, α_{-1} を適当に定義してやればよい。

$$\chi_0 = \cos 2\pi\alpha_0 = -1, \quad \alpha_0 = 1/2$$

$$\chi_{-1} = \cos 2\pi\alpha_{-1} = 1, \quad \alpha_{-1} = 0$$

そこで標本点 $\chi_{-1}, \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_N, \dots$ において初めは $N+1$ 点、以後 N 点ずつ増して補間式の列をつくる。いま

$$f(\cos \theta) = \sum_{0 \leq k \leq N}'' A_{0,k} \cos k\theta + \sin N\theta \sum_{\lambda=1}^{\infty} \tilde{w}_{\lambda-1}(\cos N\theta) \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} A_{\lambda,k} \sin k\theta \quad (31)$$

と展開できると仮定して、補間条件より各係数 $A_{\lambda,k}$ を定めてやればよい。 $\sum''$ は、初項と末項を $1/2$ 倍して和をとることを表す。

まず、初めの $A_{0,k}$, $0 \leq k \leq N$ は $[0, \pi]$ を N 等分した台形公式に基づく高速 cosine 変換が求まる。 $A_{\lambda,k}$ は、閉区間 $(-1, 1)$ の場合と類似の方法で計算できる：

ℓ 段階の補間条件

$$f(\cos \theta_j^{\ell}) = \sum_{0 \leq k \leq N}'' A_{0,k} \cos k \theta_j^{\ell} + \sin 2\pi \alpha_{\ell} \sum_{\lambda=1}^{\ell} \tilde{\omega}_{\lambda-1}(\cos 2\pi \alpha_{\ell}) \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} A_{\lambda,k} \sin k \theta_j^{\ell} \quad (32)$$

$$0 \leq j < N, \quad \theta_j^{\ell} = \frac{2\pi}{N}(j + \alpha_{\ell})$$

に対し, パラメータ α_{ℓ} を含む sine 変換を適宜に挿入して
左辺を A_k とおけば

$$A_k = \frac{A_{0,k} \cos 2\pi \alpha_{\ell} + A_{0,N-k}}{\sin 2\pi \alpha_{\ell}} + \sin 2\pi \alpha_{\ell} \sum_{\lambda=1}^{\ell} \tilde{\omega}_{\lambda-1}(\cos 2\pi \alpha_{\ell}) A_{\lambda,k} \quad 1 \leq k \leq N \quad (33)$$

$k=N$ のときは, 右辺第 1 項を $\frac{1}{2}$ 倍した式を用いる.

係数 $A_{\ell,k}$ は, 前節の差分商の計算 (27) に従って求められるように.

以上によって閉区間 $[-1, 1]$ 上における $f(x)$ の ℓN 次補間式

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{0 \leq k \leq N}'' A_{0,k} T_k(x) + (1-x^2) \bar{U}_{N-1}(x) \sum_{\lambda=1}^{\ell-1} \tilde{\omega}_{\lambda-1}(T_N(x)) \\ & \cdot \sum_{1 \leq k \leq N} A_{\lambda,k} \bar{U}_{k-1}(x) + (1-x^2) \bar{U}_{N-1}(x) \\ & \cdot \omega_{\ell-1}(T_N(x)) f[x, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{\ell N-1}] \end{aligned} \quad (34)$$

を得る. 最後の項の差分商の式 2 種 4 エビシエフ 展開係数が $A_{\ell,k}$ である.

ℓN 次の補間式を求めるために必要な乗算回数は ℓN
 $(\log_2 N + \ell/2)$ である。

5. 自動積分法

区間 $[-1, 1]$ で滑らかな関数の定積分を機械的に求める。前
 区間 $(-1, 1)$ 上での $f(x)$ の補間式の項別積分によって目的の
 積分の近似値を計算する。

補間式 (28) を項別積分するために、あらかじめ重み係数

$$w_{\ell, k} = \int_0^\pi \tilde{\omega}_{\ell-1}(\cos N\theta) \sin N\theta \cos k\theta \, d\theta \quad (35)$$

を計算しておく。(求める方は後に述べる)。 k が偶数ならば
 重み係数は 0 であるから、標本点を N 点ずつ追加するごとに
 次式によって積分の近似値の列を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= \sum_{k=1}^{N/2} \frac{2}{2k-1} A_{0, 2k-1} \\ \tilde{S}_{\ell+1} &= \tilde{S}_\ell + \sum_{k=1}^{N/2} A_{\ell, 2k-1} w_{\ell, 2k-1} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\ell = 1, 2, \dots$$

ℓN が 2 のべき乗ならば $\tilde{S}_\ell$ は、^(標本点 k) $\frac{1}{\ell N - 1}$ 点の Clenshaw -
 Curtis 積分に一致する (或 2 種 Gauss-Legendre 級数展開の項別積分)。

重み係数 $w_{\ell, k}$, $1 \leq \ell \leq m$, $0 \leq k < N$ は次の漸化式で
 求められよう。

$$w_{l,k} = \begin{cases} \frac{2N}{N^2 - k^2} & , \quad k \text{ は奇数} \\ 0 & , \quad k \text{ は偶数} \end{cases}$$

$$0 \leq k < mN$$

$$w_{l+1,k} = w_{l,|N-k|} - 2 \cos 2\pi d_l w_{l,k} + w_{l,N+k}$$

$$0 \leq k < (m-l)N, \quad l=1, 2, \dots, m-1 \quad (37)$$

次に閉区間 $[-1, 1]$ 上での $f(x)$ の補間式 (34) の項別積分を行なう方法について述べる。再び同じ記号で重み係数

$$w_{l,k} = \int_0^\pi \tilde{w}_{l-1}(\cos \theta) \Delta \sin N\theta \cos k\theta \sin \theta d\theta \quad (38)$$

を定義する。 k が奇数ならば 0 であるから、標本点を N 点づつ追加するごとく、次式で積分の近似値を得る。

$$S_1 = \sum_{k=0}^{N/2} \frac{2}{1-4k^2} A_{0,2k}$$

$$S_{l+1} = S_l + \sum_{k=1}^{N/2} A_{l,2k} w_{l,2k} \quad (39)$$

$$l=1, 2, \dots$$

lN が 2 のべき乗ならば、積分区間の端点における標本点を使用した Clenshaw-Curtis 積分となる。

重み係数は、開いた積分公式の場合と同様に (2, 次の漸化式によって、あらかじめ計算しておく。

$$w_{1,k} = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ は奇数} \\ -4Nk / \{(N-k)^2 - 1\} \{(N+k)^2 - 1\} & , \quad k \text{ は偶数} \end{cases}$$

$$0 \leq k < mN$$

$$w_{l+1,k} = w_{l,N-k} - 2 \cos 2\pi \alpha_l w_{l,k} + w_{l,N+k}$$

$$\text{ただし} \quad w_{l,N-k} = \text{sgn}(N-k) w_{l,|N-k|}$$

$$0 \leq k < (m-l)N, \quad l=1, 2, \dots \quad (40)$$

被積分関数が $[-1, 1]$ を含む領域で解析的ならば, $\{f_l\}$ は漸進的には指数関数の速さで収束する。係数は, 1 つごとく計算すればよいが演算回数は, 補内插法の場合の約 $1/2$ である。

6 数値例

被積分関数として, ケービニエフ級数展開が解析的にわかっているものをとれば, 理論と実験が対比しやすい。

例 1

$$\int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} dx = \frac{1-t^2}{t} \log \frac{1+t}{1-t}$$

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} t^k T_k(x)$$

例 2
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{2}{a} \tan^{-1} \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{2}{a\sqrt{1+a^2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (a+\sqrt{1+a^2})^{-2k} T_{2k}(x)$$

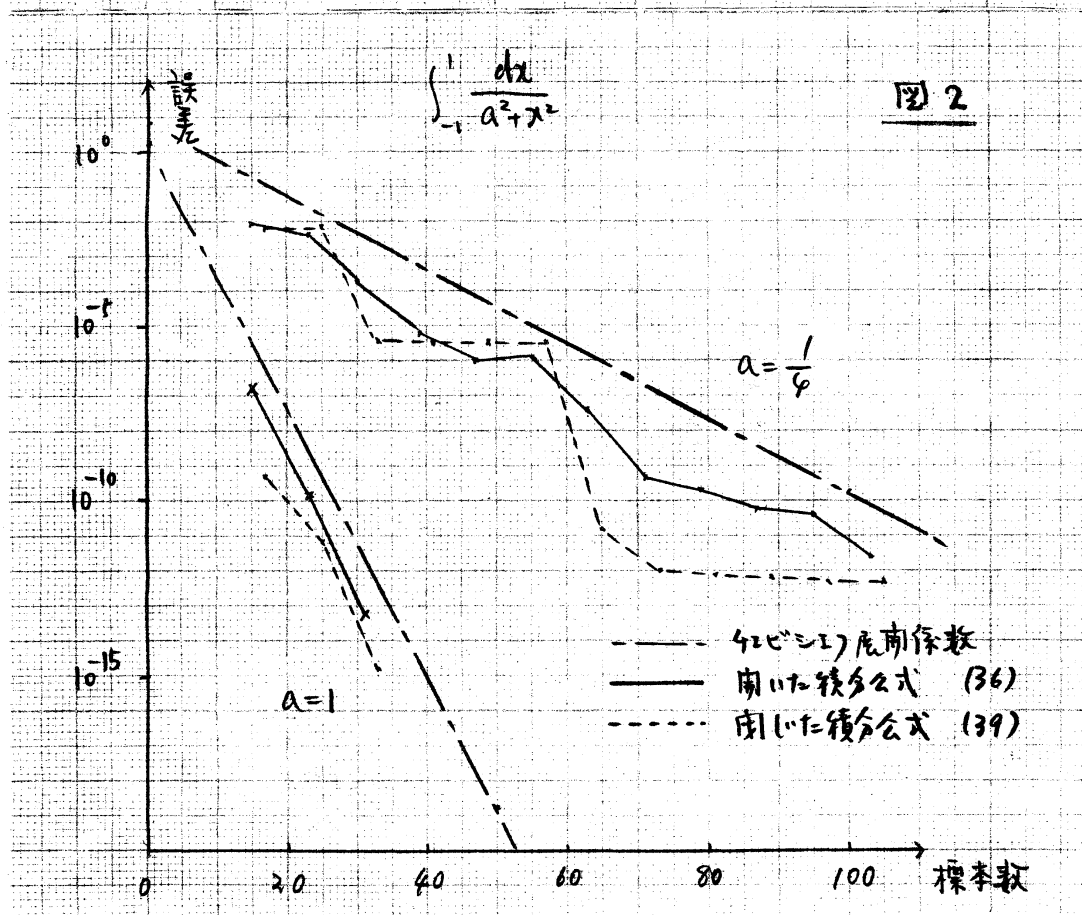
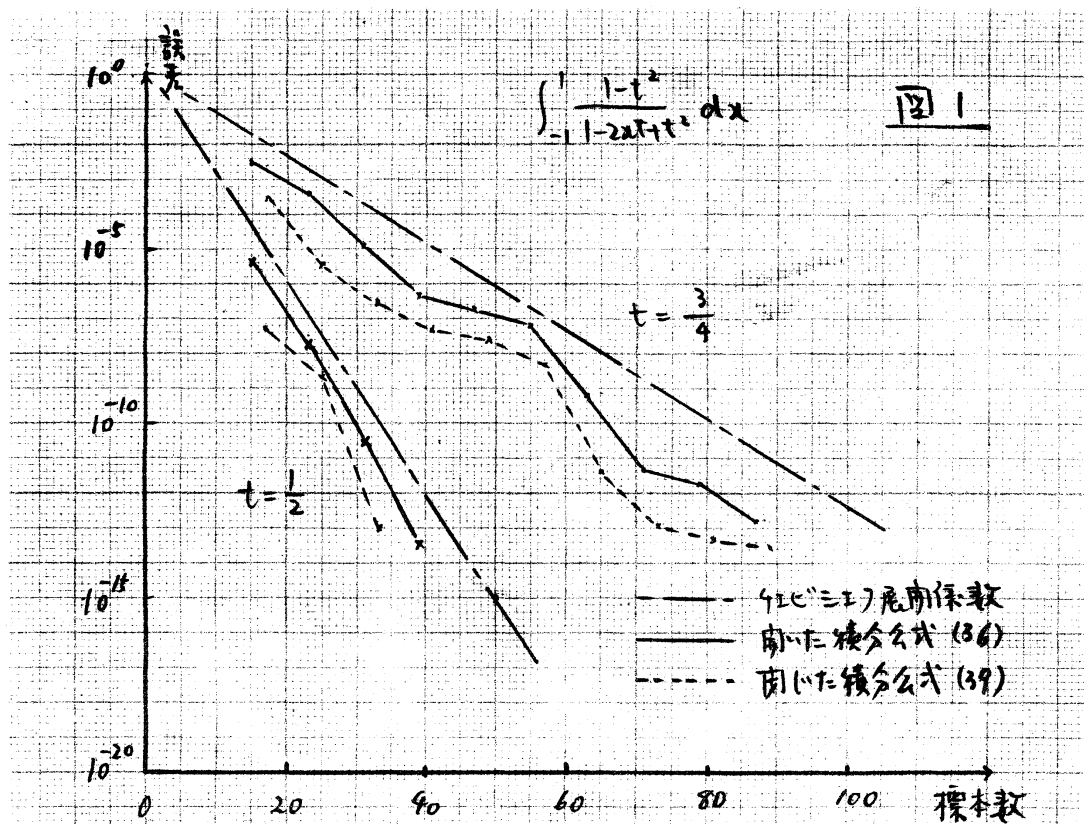
例 3
$$\int_{-1}^1 \cos ax = \frac{2}{a} \sin a$$

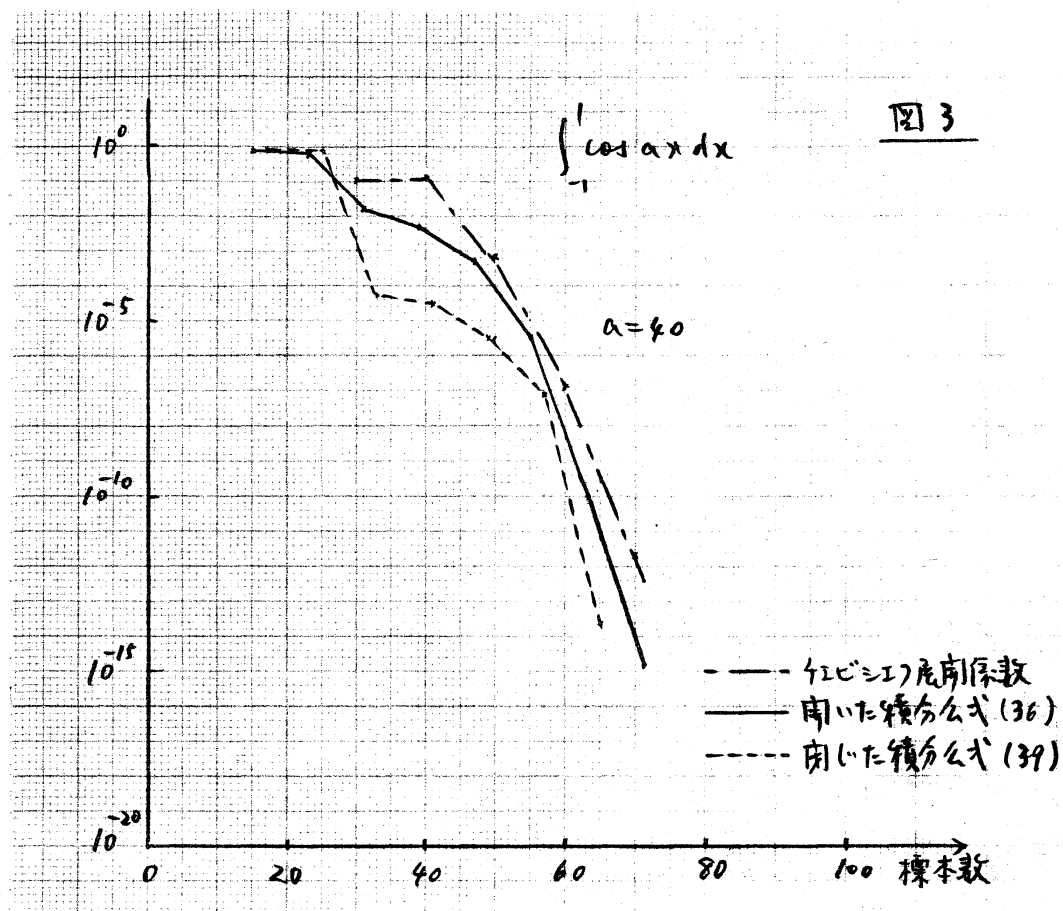
$$\cos ax = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(a) T_{2k}(x)$$

$J_{2k}(a)$ は $2k$ 次の第一種ベッセル関数.

これらの例は、被積分関数が実軸上に極をもつ有理式、実軸上で解析的な有理式および整関数の代表とみなして採用した。標本数の増加とともに、近似積分の誤差およびギブシエフ展南係数が減少してゆく状況を図1, 2, 3にそれぞれ示した。開いた積分公式(36), 閉いた積分公式(39) いずれの誤差も、ギブシエフ展南係数より速く0に収束する。閉いた積分公式は、標本数が 2^L+1 のとき精度が急によくなる。

開いた積分公式は、^(の誤差)標本数の増加とともに比較的にだるかに減少するが、 2^L-1 を標本数が通過することによって矢張り目立って誤差は小さくなっていく。





参考文献

- 1) L. Kuiper & H. Niederreiter: Uniform distribution of Sequences, Chap. 2, John Wiley (1974).
- 2) 島田達生, 長谷川武夫, 三宮亨三: 等差数列の n -標本数 n 増す補間の自動積分法, 情報処理 (印刷中).