

最高ウェイトを持つ表現のホイタッカーモデル

広島大 理学部 橋爪道彦

実半単純リー群の既約表現のうち 最高ウェイトをもつ表現について それが ホイタッカーモデルと呼ばれる表現の実現を持つかを考察する.

以下 G を連結半単純リー群で中心が有限なものとし K を G の極大コンパクト部分群 G の岩沢分解を $G = NAK$ とする. N の表現 χ (その表現空間を $\mathcal{X}$) をとり次のような G 上の関数の空間を考える.

$$C^\infty(G, \chi) = \{ f: G \rightarrow \mathcal{X} \mid f(nq) = \chi(n)f(q) \quad q \in G, n \in N \}$$

$$C^\infty(G, \chi) \text{ は 左かゝる } G \text{ の作用 } R(q)f(x) = f(xq) \quad x, q \in G$$

により G -加群になるが 更に次のようにして $\mathfrak{g}$ -加群の構造を持つ (但 $\mathfrak{g}$ は G のリー環).

$$f(q; X) = R(X)f(q) = \left. \frac{d}{dt} f(q \exp tX) \right|_0 \quad q \in G, X \in \mathfrak{g},$$

$C^\infty(G, \chi)$ の元 f が, (a) K -finite であるとは $\langle R(k)f; k \in K \rangle$ が

有限次元部分空間を張るときをいう. $C^\infty(G, \chi)^0$ で $C^\infty(G, \chi)$ 中

の K -finite な元全体のなす部分空間を表わすことにすれば $C^\infty(G, \chi)^0$ は $\mathfrak{g}$ -加群の構造をもつことが知られている。

(定義) (π, V) を既約 $\mathfrak{g}$ -加群 (厳密には既約, 認容的 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群) とする。 (π, V) が ホイタッカー・モデル (χ -型の) をもつとは (π, V) が $C^\infty(G, \chi)^0$ の部分加群と同型であるときをいう。

以下 我々は Harish-Chandra [] で与えられた 最高ウェイトをもつ表現について それが いかなる χ に對し χ -型のホイタッカー・モデルをもつかを調べる。

G を連結, 非コンパクト, 実単純リー群で次の仮定をみたすとする。(i) G は単連結複素単純リー群 $G_{\mathbb{C}}$ の実形 (ii) G/K は G -不変な複素構造をもつ, (ここに K は G の極大コンパクト部分群)。

G のリー環を $\mathfrak{g}$, K のリー環を $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン分解, θ を対応するカルタン包含写像, $B(X, Y)$ を $\mathfrak{g}$ のキリーン形式とする。仮定より $\mathfrak{k}$ の中心子は 1次元であることに元 Z であって $\text{ad } Z$ が $\mathfrak{p}$ 上複素構造を与えるものか一意的に存在する。

$\mathfrak{p}_+$ と $\mathfrak{p}_-$ を $\mathfrak{p}_+ = \{X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} : [Z, X] = iX\}$, $\mathfrak{p}_- = \{X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} : [Z, X] = -iX\}$ と与える。 $\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の可換部分リー環で, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ である。

又仮定より $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}$ に対して $\mathfrak{k}$ にふくまれないものが存在する。 Δ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{h}$ に對するルート系とする。 $\Delta_{\mathfrak{k}}, \Delta_{\mathfrak{p}}$ を

$$\Delta_{\mathfrak{k}} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\} = \text{コンパクトルートの集合}$$

$$\Delta_{\mathfrak{p}} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}\} = \text{非コンパクトルートの集合} \quad \text{とする。}$$

$$\Delta = \Delta_R \cup \Delta_F, \quad \Delta_R \cap \Delta_F = \emptyset \quad \text{である.}$$

Δ に, 非コンパクトルート α が正 $\Leftrightarrow \alpha \in \mathfrak{F}_+$ となる順序を入れる. Δ^+ を上の順序に関する正のルートの集合, $\Delta_R^+ = \Delta_R \cap \Delta^+$, $\Delta_F^+ = \Delta_F \cap \Delta^+$ とおく. 又 $\tilde{\Delta}^+ = \Delta_R^+ \cup \Delta_F^-$ とおく. 各ルート α に対し ルーティングベクトル E_α を, (i) $B(E_\alpha, E_\alpha) = 2/\langle \alpha, \alpha \rangle$ (ii) $\theta E_\alpha = -E_\alpha$ を満たすようにとる. ここに $\langle, \rangle$ はキリング形式から自然に誘導される $(\mathfrak{F}t)^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{F}t, \mathbb{R})$ 上の内積, $X \mapsto \bar{X}$ は $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役を表わす. $H_\alpha = [E_\alpha, E_\alpha]$ は t_c の元で $\alpha(H_\alpha) = 2$ を満たす. Λ は $(\mathfrak{F}t)^*$ の元で $\Lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}^+$ ($\forall \alpha \in \Delta_R^+$) を満たすものとする.

[定義] 既約 $\mathfrak{g}$ -加群 (π, V) が $\tilde{\Delta}^+$ に関する最高ウェイト Λ をもつ表現であるとは V 中に次の条件を満たす零でない元 F_Λ が存在するときをいう.

- (i) $\pi(H)F_\Lambda = \Lambda(H)F_\Lambda \quad \forall H \in t_c$
- (ii) $\pi(E_\alpha)F_\Lambda = 0 \quad \forall \alpha \in \tilde{\Delta}^+$
- (iii) $\pi(\mathfrak{g})F_\Lambda = V$ (ここ $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_c$ の展開環).

(注) いわゆる正則離散系列の表現は上の性質を満たす.

以下最高ウェイト Λ をもつ表現を π_Λ と書くことにする. π_Λ が χ -型ポイタッカーモデルを持つかどうかは 次の関係(正確には微分方程式系)を満足する零でない関数 $F_\Lambda \in C^\infty(G, \chi)^0$ が存在するかどうかに帰着する.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad R(H)F_\lambda &= \lambda(H)F_\lambda & \forall H \in \mathfrak{h}_c \\
 (ii)_1 \quad R(E_\alpha)F_\lambda &= 0 & \forall \alpha \in \Delta_K^+ \\
 (ii)_2 \quad R(E_{-\beta})F_\lambda &= 0 & \forall \beta \in \Delta_P^+.
 \end{aligned}$$

最初に (i) 及び (ii)₁ をみたす関数について考察する。

$\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}^+$ ($\forall \alpha \in \Delta_K^+$) より, λ を最高ウェイトとする K (従って K_c) の既約表現 $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ が存在する。 v_λ を最高ウェイト λ に対応するウェイトベクトルとする。 $(\tilde{\tau}_\lambda, \tilde{V}_\lambda)$ を $(\tau_\lambda, V_\lambda)$ の反傾表現としよう。 F を $\tilde{V}_\lambda \otimes \mathcal{X}$ に値をとり G 上の C^∞ -関数で次の関係をもたすものとする: $F(ngr) = \tilde{\tau}_\lambda(r^{-1}) \otimes \chi(n) F(g)$ ($g \in G, n \in N, r \in K$). $v \in V_\lambda$ に対し 関数 F_v を $F_v(g) = \langle F(g), v \rangle$ で定義すると $F_v \in C^\infty(G, \mathcal{X})$ であり, $F_v(gr) = \langle F(g), \tau(r)v \rangle \dots (*)$ ($g \in G, r \in K$) より F_v は左 K -finite かつ K -type は τ_λ である。

とくに F_{v_λ} を考えみると (*) 及び v_λ が最高ウェイトベクトルであることから F_{v_λ} は (i) 及び (ii)₁ をみたすことがわかる。又コンパクト群の表現の一般論より $C^\infty(G, \mathcal{X})^0$ の元で τ_λ と異なる K -type をもつものが (i) 及び (ii)₁ をみたすことはない。故に我々の問題は 上に与えた関数 F_{v_λ} で更に (ii)₂ をみたす零でない関数が存在するかどうかに帰着した。以下我々は 微分方程式系 (ii)₂ の自明でない解の構成を問題とする。

2つのルート α, β が強直交とは $\alpha + \beta$ 及び $\alpha - \beta$ が共にルートにならぬときを言う。強直交する非コンパクト正

ルートの極大集合 $\Psi = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ を次のように定める。

γ_1 を最小ルートとし、以下 $j \geq 1$ に対し γ_{j+1} を $\gamma_1, \dots, \gamma_j$ に強直交する非コンパクト正ルートのうち最小なものにとる。各 j に

対し $A_{\gamma_j} = E_{\gamma_j} + E_{-\gamma_j}$ とおき $\mathcal{O} = \sum_{j=1}^r \mathbb{R} A_{\gamma_j}$ とすれば

$\mathcal{O}$ は $\mathfrak{g}$ にふくまれる最小可換部分環である。またの実線型部

分空間 $t_{\mathbb{R}}$ を $t_{\mathbb{R}} = \sum_{j=1}^r \mathbb{R} H_{\gamma_j}$ で定義する。このときケ

リー変換 $\text{Ad } C$ (但し $C = \prod_{j=1}^r \exp(-\frac{\pi}{4}(E_{\gamma_j} - E_{-\gamma_j})) \in G_C$) は

$t_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$ (同型) を与える。 γ_j ($1 \leq j \leq r$) の $t_{\mathbb{R}}$ への制限も同じ文

字 γ_j で表わすことにする。このとき $\gamma_j(H_{\gamma_k}) = 2\delta_{jk}$ である。

$\mathcal{O}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ の元 λ_j ($1 \leq j \leq r$) を

$$\lambda_j(A) = \gamma_j(\text{Ad}(C^{-1})A) \quad (A \in \mathcal{O}) \text{ で定める。}$$

補題 1. (C. C. Moore [J]) Δ^+ の元の $t_{\mathbb{R}}$ への制限に関し次の二つの場合が成立する。夫々 Case I 及び Case II と名づける。

(i) $\Delta_{\mathbb{R}}^+$ の元の $t_{\mathbb{R}}$ への制限で零でないものは次の形の集合を成す。

$$\text{Case (I)} \quad \left\{ \frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_j) : 1 \leq i < j \leq r \right\}$$

$$\text{Case (II)} \quad \left\{ \frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_j) : 1 \leq i < j \leq r \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\gamma_i : 1 \leq i \leq r \right\}$$

(ii) $\Delta_{\mathbb{R}}^+$ の元の $t_{\mathbb{R}}$ への制限は零でなく次の形の集合を成す。

$$\text{Case (I)} \quad \left\{ \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j) : 1 \leq i \leq j \leq r \right\}$$

$$\text{Case (II)} \quad \left\{ \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j) : 1 \leq i \leq j \leq r \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}\gamma_i : 1 \leq i \leq r \right\}$$

次に $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{O}$ に関する制限ルート系 Σ について次の補題が成立つ。

補題 2. (C.C. Moore) $\mathfrak{g}$ の α に 関する 制限ルート系 Σ は次の形の集合から成る。

$$\text{Case(I)} \quad \Sigma = \{\pm \frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j) : 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{\pm \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j) : 1 \leq i \leq j \leq r\}$$

$$\text{Case(II)} \quad \Sigma = \{\pm \frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j) : 1 \leq i < j \leq r\} \cup \{\pm \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j) : 1 \leq i \leq j \leq r\} \cup \{\pm \frac{1}{2}\lambda_i : 1 \leq i \leq r\}$$

以下 Σ に上の複号で $\pm \epsilon$ とするルートを正のルートとするような順序を付ける。 $\lambda \in \Sigma$ に對しそのルート空間を π_λ と書く。

$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\pi_0, \pi_{\frac{1}{2}}, \pi_1$ を夫々

$$\pi_0 = \sum_{1 \leq i < j \leq r} \pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)}$$

$$\pi_{\frac{1}{2}} = \sum_{1 \leq i \leq r} \pi_{\frac{1}{2}\lambda_i} \quad (\text{注}) \quad \text{Case(I) の場合 } \pi_{\frac{1}{2}} = (0).$$

$$\pi_1 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq r} \pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)}.$$

で定めると $[\pi_p, \pi_q] \subset \pi_{p+q}$ ($p, q = 0, \frac{1}{2}, 1$ 但し $\pi_{p+q} = (0)$ 例外)

従つて $\pi_0, \pi_1, \pi_0 \oplus \pi_{\frac{1}{2}} = \mathfrak{f}, \pi_1 \oplus \pi_{\frac{1}{2}} \oplus \pi_0 = \pi$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環で π_1 は可換かつ $\mathfrak{f}$ の中心である。又 $\mathfrak{g} = \pi \oplus \pi_c \oplus \mathfrak{k}_c$ が成立しこれは $\mathfrak{g}$ の岩沢分解を与える。以下 A, N, N_0, N_1, H を夫々 $\pi, \pi_0, \pi_1, \mathfrak{f}$ に對応する G の解析的部分群とする。 $G = NAK$, $N = HN_0$ である。又 $\pi_{\frac{1}{2}}^- = \pi_{\frac{1}{2}}^c \cap (\mathfrak{k}_c + \mathfrak{p}_-)$, $\mathfrak{f}^- = \mathfrak{f}_c \cap (\mathfrak{k}_c + \mathfrak{p}_-)$ とおくと $\mathfrak{f}^-$ は $\mathfrak{f}_c$ の複素リー部分環で $\mathfrak{f}_c = \mathfrak{f}^- + \overline{\mathfrak{f}^-}$, $\mathfrak{f}^- \cap \overline{\mathfrak{f}^-} = \pi_1^c$ かつ $\mathfrak{f}^- = \pi_1^c \oplus \pi_{\frac{1}{2}}^-$ が成立つことに注意しておく。次に $E_{-\beta}$ ($\beta \in \Delta_{\mathfrak{f}}^+$) の岩沢分解を与える。これは我々の微分方程式系を解くのに "key" となるものである。 $\mathfrak{g}_c = \pi_c \oplus \pi_{\frac{1}{2}c} \oplus \mathfrak{k}_c$ より $\forall X \in \mathfrak{g}_c$ は

$X = P_n X + P_a X + P_k X$ (但し $P_n X$ は X の n -成分, $P_a X$ は X の a -成分, $P_k X$ は X の k -成分) と一意的に書ける。又次のルートの集合を導入する。

$$P_i = \{ \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ : \beta|_{\mathfrak{t}_R} = \frac{1}{2} \gamma_i \} \quad 1 \leq i \leq r$$

$$P_{ij} = \{ \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ : \beta|_{\mathfrak{t}_R} = \frac{1}{2} (\gamma_i + \gamma_j) \} \quad 1 \leq i < j \leq r$$

補題 1 より $\Delta_{\mathfrak{g}}^+ = \Psi \cup \left(\bigcup_{i < j} P_{ij} \right) \cup \left(\bigcup_i P_i \right)$

命題 1. $E_{-\beta}$ ($\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+$) の右項分解は次の通り。

(i) $\beta = \gamma_j \in \Psi$ ($1 \leq j \leq r$) のとき,

$$P_n E_{-\gamma_j} = -\frac{1}{2} H_{\gamma_j}, \quad P_a E_{-\gamma_j} = \frac{1}{2} A_{\gamma_j} \quad \text{従って} \quad P_n E_{-\gamma_j} = E_{-\gamma_j} + \frac{1}{2} H_{\gamma_j} - \frac{1}{2} A_{\gamma_j}.$$

更に $\sqrt{1} P_n E_{-\gamma_j} = X_{\gamma_j}$ とおけば $X_{\gamma_j} \in \pi_{\lambda_j}$ と $\pi_{\lambda_j} = R X_{\gamma_j}$.

$$E_{-\gamma_j} = -\sqrt{1} X_{\gamma_j} + \frac{1}{2} A_{\gamma_j} - \frac{1}{2} H_{\gamma_j} \quad (1 \leq j \leq r).$$

(ii) $\beta \in P_{ij}$ ($1 \leq i < j \leq r$) のとき

$$P_n E_{-\beta} = -[E_{\gamma_i}, E_{-\beta}], \quad P_a E_{-\beta} = 0. \quad \text{従って} \quad P_n E_{-\beta} = E_{-\beta} + [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}]$$

更に $P_n E_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{\gamma_i - \beta}$ より $\gamma_i - \beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+$ ($(\gamma_i - \beta)|_{\mathfrak{t}_R} = \frac{1}{2} (\gamma_i - \gamma_j)$).

又 $P_n E_{-\beta} \in \pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)}^c + \pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)}^c$ で、従って $P_n E_{-\beta}$ は

$$P_n E_{-\beta} = U_{\beta} - \sqrt{1} X_{\beta} \quad (U_{\beta} \in \pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)}^c, \quad X_{\beta} \in \pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)}^c) \text{ と書ける.}$$

故に $E_{-\beta} = (U_{\beta} - \sqrt{1} X_{\beta}) - [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}] \quad (\beta \in \bigcup_{i < j} P_{ij}).$

$\{U_{\beta} : \beta \in P_{ij}\}$ は $\pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)}^c$ の basis, $\{X_{\beta} : \beta \in P_{ij}\}$ は $\pi_{\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)}^c$ の basis を成す。最後に $S = \sum_{j=1}^r X_{\gamma_j}$ とおけば $S \in \pi_1$ で

$$[U_{\beta}, S] = X_{\beta} \quad (\beta \in \bigcup_{i < j} P_{ij}) \text{ が成立つ.}$$

(iii) $\beta \in P_i$ ($1 \leq i \leq r$) のとき.

$$P_R E_{-\beta} = -[E_{\gamma_i}, E_{-\beta}], \quad P_R E_{-\beta} = 0, \quad P_R E_{-\beta} = E_{-\beta} + [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}]$$

しかして $P_R E_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{\gamma_i - \beta}$, $\gamma_i - \beta \in \Delta_R^+$, $(\gamma_i - \beta)|_{t_R} = \frac{1}{2} \gamma_i$.

又 $P_R E_{-\beta} \in (\pi_{\frac{1}{2}\gamma_i}^c) \cap \pi_{\frac{1}{2}}^-$ である。以下 $P_R E_{-\beta} = W_\beta$ とおく。

$$E_{-\beta} = W_\beta - [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}] \quad \beta \in P_i \quad 1 \leq i \leq r. \quad \text{と}$$

$\{W_\beta : \beta \in \bigcup_{i=1}^r P_i\}$ は $\pi_{\frac{1}{2}}^-$ の基底を成す。

以上の順位の β に対して $R(E_\beta)F_{\lambda} = 0 \quad (\beta \in \Delta_f^+)$ を満たす関数 F_{λ} を決定しよう。以下 F_{λ} を単に F_{λ} と書く。

N の表現 χ として以下で与える表現を考えよう。 N_1 の 1 次元表現は $\xi \in \pi_1^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\pi_1, \mathbb{R})$ により次の形で与えられる。

$$\psi_{\xi}(\exp X) = \exp(2\pi i \xi(X)) \quad X \in \pi_1.$$

$N = HN_0$ (半直積), N_1 は H の中心であることに注意する。 H の既約表現でその N_1 への制限が ψ_{ξ} ($\xi \in \pi_1^*$) であるようなものを 1 つとる。それを ρ_{ξ} としよう。 N の表現 χ として ρ_{ξ} を N に誘導して得られる表現 χ_{ξ} とする。

$$C^{\infty}(G, \rho_{\xi}) = \{F: G \rightarrow \mathcal{H}_{\xi} \mid F(hg) = \rho_{\xi}(h)F(g), g \in G, h \in H\}$$

とおけば容易に

$$C^{\infty}(G, \chi_{\xi}) \cong C^{\infty}(G, \rho_{\xi}) \quad \& \quad C^{\infty}(G, \chi_{\xi})^0 \cong C^{\infty}(G, \rho_{\xi})^0.$$

($\because \mathcal{H}_{\xi}$ は ρ_{ξ} の表現空間). $\mathcal{H}_{\xi}$ は $C^{\infty}(H, \psi_{\xi}) = \{\varphi \in C^{\infty}(H): \varphi(n_1 h) = \psi_{\xi}(n_1) \varphi(h) \quad h \in H, n_1 \in N_1\}$ の部分空間に出来ることに注意しておく。 $F \in C^{\infty}(G, \rho_{\xi})$ とすると, $F(g) \in C^{\infty}(H)$ ($\forall g \in G$) である。そこで $F(h: g) = F(g)(h)$ ($g \in G, h \in H$) とおく。

我々の求める関数 F_λ は $N_0 A$ への制限により完全に決定されることは上に述べたことから容易にわかる。我々は

$F_\lambda(h; n_0 a)$ $F_\lambda(h; n_0 : a)$ と書くことにする。又前に述べたように π による π 不変ベクトル場の作用を $f(x; X)$ と書くことにする。

$$F_\lambda(h; n_0 a; X) = F_\lambda(h; \text{Ad}(n_0 a)X; n_0 a) \quad (X \in \mathfrak{g})$$

$$\text{とくに } F_\lambda(h; n_0 a; X) = 2\pi i \xi(\text{Ad}(n_0 a)X) F_\lambda(h; n_0 a) \quad (X \in \pi_1)$$

に注意すると 命題 1 より 次の微分方程式系をうる。

$$\textcircled{1} \quad F_\lambda(h; n_0 : a; X_{r_j}) = \{ \Lambda(H_{r_j}) - 4\pi i \xi(\text{Ad}(n_0 a)X_{r_j}) \} F_\lambda(h; n_0 : a) \quad (1 \leq j \leq r)$$

$$\textcircled{2} \quad F_\lambda(h; n_0; \text{Ad}(a)U_\beta; a) + 2\pi i \xi(\text{Ad}(n_0 a)X_\beta) F_\lambda(h; n_0 : a) = 0$$

for $\forall \beta \in \bigcup_{i=1}^r P_{ij}$,

$$\textcircled{3} \quad F_\lambda(h; \text{Ad}(n_0 a)W_\beta; n_0 : a) = 0 \quad \forall \beta \in \bigcup_{i=1}^r P_i$$

(注) $\textcircled{3}$ は 命題 1 (iii) より

$$F_\lambda(h; W; n_0 : a) = 0 \quad (\forall W \in \pi_{\frac{1}{2}}^-) \text{ と同値.}$$

又 $\textcircled{3}$ は Case(I) の場合は考える必要はない。

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を満たす関数として } S = \sum_{j=1}^r X_{r_j} \text{ として}$$

$$\Phi_\lambda(n_0 : a) = \exp\{ \Lambda(\text{Ad}(a^{-1}) \log a) \} \exp\{ -2\pi i \xi(\text{Ad}(n_0 a)S) \}$$

がとれる。更にこれは本質的に一意である。よって

$$F_\lambda(h; n_0 : a) = C_\lambda(h) \Phi_\lambda(n_0 : a)$$

と書ける。ここに $C_\lambda(h)$ は H 上の C^∞ 関数で

$$C_\lambda(h; Z) = 2\pi i \xi(Z) C_\lambda(h) \quad Z \in \pi_1$$

But $G_{\lambda}(h; W) = 0 \quad \forall W \in \pi_{\frac{1}{2}}^{-}$ を満たさねばならぬ。このような関数が存在するためには $f^{-} = \pi_1^{\circ} \oplus \pi_{\frac{1}{2}}^{-}$ が ξ に対し正の polarization であることが必要十分。即ち H の既約表現 ρ_{ξ} が Kostant の意味での $\rho(\xi, f^{-})$ となければならぬ。以上まとめて

定理. 最高ウェイト λ をもつ既約 (g, K) -加群 π_{λ} は χ_{ξ} -型のホイタッカーモデルをもつ。ここに χ_{ξ} は

$\chi_{\xi} = \text{Ind}_H^N \rho(\xi, f^{-})$ で与えられる N の表現 (但し $\xi \in \pi_1^*$, $f^{-} = f_c \cap (\mathfrak{k}_c + \mathfrak{p}^{-})$ で f^{-} は ξ における正の polarization) 又 π_{λ} のホイタッカーモデルは unique である。

(追記) N の表現 χ がいわゆる非退化指標の場合 $G \simeq SL(2, \mathbb{R})$ の場合を除いて π_{λ} は χ -型のホイタッカーモデルをもたぬことも命題 1 を用いて対応する微分方程式系を解くことにより示される。(即ち零解しか存在しない)。