

(論文内容の要旨)

我々は、非可換時空上の場の理論、特に Lie 代数的な交換関係 $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = 2i\kappa\epsilon^{ijk}\hat{x}_k$ (κ は定数) で与えられる 3 次元の非可換時空上の場の理論と、非可換時空上の場の理論におけるホップ代数的対称性に関する研究を行った。

最初に、Lie 代数的な座標の交換関係を持つ 3 次元の非可換時空上の場の理論の構成法と、その非可換時空上の場の理論に存在するホップ代数的な並進対称性に関して解説した。可換な運動量演算子とローレンツ不変性、およびヤコビ恒等式の仮定のもとで、運動量空間は $SL(2, R)$ 群空間になり、それにより並進対称性がホップ代数的に変形される。しかし、non-planar diagram から評価される振幅は運動量保存則を満たしておらず、これを解決するためには、ブレイドと呼ばれる非自明な統計性を場に課せばよいことを説明した。また、1 ループレベルの振幅は、ブレイドを考慮すると、質量が $1/\sqrt{2}\kappa$ より小さいときのみ Cutkosky rule を満たすことを、非可換 ϕ^3 理論において示した。UV-IR mixing もブレイドを考慮すると起こらないことを 1 ループレベルで見た。

次に、Lie 代数的な非可換時空上の場の理論の運動量空間が、3 次元重力と結合した運動するスカラー粒子の運動量空間と同じ $SL(2, R)$ 群空間であることを示した。まず始めに、3 次元重力理論について解説し、重力と結合した静止している点粒子は、その質量に比例する欠損角をもった、円錐状の特異点で表わされることを説明した。次に重力と結合した複数の運動する粒子を記述する方法を紹介し、その運動量が $SL(2, R)$ 群で与えられることを示した。また、非可換時空上の場の理論におけるブレイドが、粒子の位置の交換から理解できることを示した。

次に、場の理論が量子論のレベルにおいても、ホップ代数的な対称性をもつためには、必ずブレイドを場に課さなければならないことを一般的に証明した。まず始めに、ブレイドをもつ場の理論の構成について解説した。次に、ホップ代数的対称性のための Ward-Takahashi 恒等式が成り立つための条件を求め、そのうちの 1 つがブレイドの条件であることを示した。また、これまでに提唱されていた、非可換時空上の場の理論におけるブレイドは、すべてこのブレイド条件を満たすことを確認した。

最後に、ホップ代数的な対称性の破れを理解するために、Lie 代数的な非可換時空上の場の理論においてドメインウォール解を構成し、そのホップ代数的並進対称性の破れについて議論した。そこで我々は、そのドメインウォール解のモジュライパラメーターの生成子が通常の場合に比べて、非自明になっていることを発見した。また、そのドメインウォール上を伝搬するモジュライ場が、ブレイドを考慮すると質量 0 であることを示した。

(論文審査の結果の要旨)

非可換時空間は、超高エネルギーにおける時空間を記述するような、量子論的時空間概念として考えられているものである。そして、非可換時空間上の場の理論は、そのような極限状況での物理現象の可能性を理解するために、幅広く研究されている。近年（2004 年頃）、非可換時空間上の場の理論の対称性として、通常のリー代数的なものだけでなく、ホップ代数的な一般化まで考える必要のあることが指摘された。このことは、超高エネルギーの物理においては、ホップ代数的対称性もまた物理的に重要であることを示唆している。当論文は、そのような非可換時空間上の場の理論とそのホップ代数的対称性について、笹井裕也氏が博士課程において研究した成果をまとめたものである。

彼の研究成果で最も優秀と思われるのは、そのようなホップ代数的対称性を持つような場の理論の構成法、及び、ホップ代数的対称性の物理的意義に関して、明確な回答を与えたことである。当時、ホップ代数的対称性を持つような非可換時空間上の場の量子論に関する明確な一般論が存在せず、極めて混乱した状況にあった。しかし、笹井裕也氏は、ホップ代数的対称性の物理的意義が相関関数の間に成立する所謂ワード・高橋恒等式であることを出発点として、その量子場の理論が持つべき 4 つの条件を書き下すことにより、明確な一般的回答を与えた。特に、そのうちの一つの条件は所謂ブレードと呼ばれる、場の間の非自明な統計性であり、幾つかの知られているホップ代数的対称性を持つ場の量子論において、最も特徴的なものである。笹井裕也氏は、この場の量子論におけるブレードとホップ代数的対称性の間の関係を明確にした。

また、当論文においては、リー代数的非可換時空間上の場の量子論の研究も行われている。この場の量子論は、ホップ代数的な並進対称性を持つ場の量子論のうち最も簡単な例である。（所謂モヤル面上の場の量子論は、ホップ代数的なローレンツ対称性を持つ。）このリー代数的時空間上の場の理論は、3 次元格子量子重力理論と結合した粒子の有効理論として導かれることが、近年（2005 年）示されていたが、当論文では、3 次元重力が位相的であるため古典論と大差ないことに着目して、古典的重力がある場合の粒子のエネルギー・運動量の和則を調べることにより、並進対称性（エネルギー・運動量作用子）がホップ代数的であることを示している。また、ホップ代数的並進対称性の自発的破れを議論するために、この場の理論におけるドメインウォール解の研究も行っており、物理的に興味深い結果を得ている。

以上のように、本論文は、複数の優れたオリジナルな成果を含んでおり、博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また、公聴会において、笹井裕也氏は明快な発表を行い、論文内容とそれに関連した事項についての試問に対しても明快な回答を行い、合格と認めた。