

離散回転に付随する領域交換

秋山 茂樹 (AKIYAMA Shigeki)

新潟大・理 (Faculty of Science, Niigata Univ.)

1 シフト基数系

シフト基数系¹とは次のような簡単な格子上の力学系である。実ベクトル $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ によりきまる d 次元の正方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上に写像 τ_d を

$$\tau_{\mathbf{r}}(\mathbf{a}) = (a_2, \dots, a_d, -[\mathbf{r}\mathbf{a}]) \quad (\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d)$$

で定める。別の表現をすると

$$0 \leq a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_d r_d + a_{d+1} < 1$$

という不等式で順に格子点を

$$(a_1, a_2, \dots, a_d) \rightarrow (a_2, a_3, \dots, a_{d+1}) \rightarrow (a_3, a_4, \dots, a_{d+2}) \rightarrow \dots$$

と定めていくので、線形回帰数列の拡張と思える。おそらく、このような数列に最初に注目したのは、数系フラクタルを調べた W. Gilbert [5] およびベータ展開の記号力学系的な性質を調べた M. Hollander [6] である。両者の興味の対象は全く異なるものであったが、重要な問題がシフト基数系に言葉で記述される (c.f. [4])。すなわち、

問題 1. いかなる $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ に対して、全ての軌道は周期的か？

問題 2. いかなる $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$ に対して、全ての軌道は自明なサイクル $(0, \dots, 0) \bigcirc$ に落ちるか？

の二つの問題である。たとえばベータ展開においては問題 2 はその双対タイル張りの中心タイルが原点を内点に含むことと対応する。この事実はベータ展開の代数的な自然拡大の構成を易しくする²。

¹この仕事は H. Brunotte, A. Pethö, J. Thuswaldner, K. Scheicher, W. Steiner との共同の仕事に基づく。

²ここで「代数的」というのは数論への応用がしやすいという意味である。

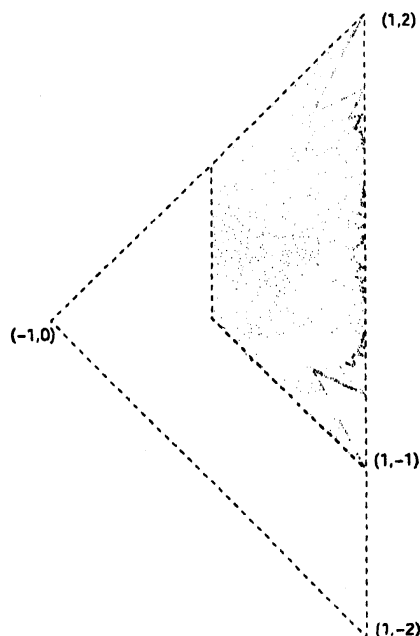


図 1: (r_1, r_2) の分布

さて一般的に $\mathbf{r}$ に対して

$$x^d + r_d x^{d-1} + r_{d-1} x^{d-2} + \cdots + r_1$$

の根の絶対値が 1 より小ならば、全ての軌道は周期的である。一方、一つでも絶対値が 1 より大な根があれば、非有界（したがって周期的でない）な軌道が存在する。(c.f. [1]) 難しいのは根の一部が単位円周上にあり他は単位円盤内にある場合である。この問題を $d = 2k - 1$ の場合は、K.Schmidt [8] による

問題 3. 次数 $2k$ の *Salem* 数 β による $\mathbb{Q}(\beta)_{>0}$ の元のベータ展開は周期的か？

という未解決問題に対応している。

$d = 2$ の場合で感覚を理解していただくため図 1 を見ていただきたい。この図の着色部分は $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ が問題 2 の解に属することを意味し、問題 2 の解は三角形の完全内部にある compact 集合内では有限個の線分で区切られた多角形で記述される。但し、その多角形は開でも閉でもない。また、解集合が連結かどうかは分かっていない。問題 2 に関する進展について詳しくは [3]。

上に述べたことにより図 1 の三角形の内点は問題 1 の解に属すること、外部の点は属さない事がわかる。一般に本稿では主に問題 1 を扱う。さて我々の扱うのは $d = 2$ の場合である。予想は平たくいえば次のようになる。

予想 1. 任意の $-2 < \lambda < 2$ に対して $0 \leq a_{n-1} + \lambda a_n + a_{n-1} < 1$ でさだまる整数列は全て周期的である。

すなわち図 1 で境界のうち $(1, -2)$ と $(1, 2)$ を結ぶ線上が問題 1 の解に属するという予想である³。もちろん λ が整数ならば自明であるが、他のいかなる値でも大変難しい問題だと我々は考えている。

予想 1 のうち我々に証明できたのは

$$\lambda = \frac{\pm\sqrt{5} \pm 1}{2}, \pm\sqrt{2}$$

の 6 つの場合のみである。 $(\pm\sqrt{3})$ の場合はまだ完全ではないが近い将来にできる見込みである。) 当初我々は $(1+\sqrt{5})/2$ の場合には数論的方法 [2] で示したが、他の場合に拡張するのは難しい。最近になって、この問題は領域交換と関連付けて問題を考えるのが自然であること、および実際にその方法で様々な力学系の研究者 (Vivaldi, Kouptsov, Lowenstein, Goetz, Poggiaspalla, Vladimirov, Bosio, Shaidenko, ...) がアプローチしていることに気がついた。底に流れるアイデアは近いのであるが、詳細に比較してみると我々の手法に一部優位性があるように見える。以下、証明をもっとも易しい $(1+\sqrt{5})/2$ の場合を用いて紹介する。

2 離散回転

関係式 $0 \leq a_{n+2} + \lambda a_{n+1} + a_n < 1$ を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

とかける。 k は λa_{n+1} の小数部で、 $k \in [0, 1)$ となる。掛けられている行列の特性多項式は $x^2 + \lambda x + 1$ で固有値は $(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4})/2$ となる。 $\lambda \in (-2, 2)$ よりこの二つの固有値は絶対値 1 の共役な複素数である。 $\lambda = -2\cos(\theta)$ と置けば二つの固有値は $\cos(\theta) \pm i\sin(\theta) = \exp(i\theta)$ と書ける。すなわちこの行列は角度 θ の回転を意味し、その軌道を $\mathbb{R}^2$ で実現すれば楕円を描く。すなわち誤差のベクトル ${}^t(0, k)$ を無視すれば格子上で回転である。対応 $(a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_{n+1}, a_{n+2})$ は全単射であることに注意すると、格子上に角度 θ の回転を定義したいときの自然な方法であると思うことができる。予想 1 はこのような離散的回転を繰り返したとき誤差が積み重ならず有界ならば成り立つ。誤差のベクトルは一定の方向を向いており、したがってそれが楕円軌道において相殺する方向で動くのが自然であり、これが予想の直感的な根拠となる。すなわち予想 1 は離散回転における累積誤差が発散しないであろうという意味である。

数値実験も非常に易しいし、多少の実験で予想が正しそうなことはすぐに納得できる。Mathematica で、 $\lambda = 1/2$ とし初期値 $(100, -15)$ としたときのコードは以下のとおり、ほんの数行である。

³境界の他の部分は根 ± 1 が存在する場合で難しくない。

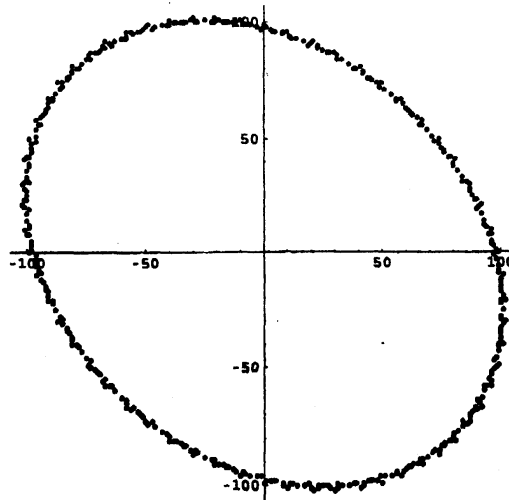


図 2: $\lambda = 1/2$ のとき $(100, -15)$ の軌道

```
r1 = 1/2;
a = {100, -15};
L = NestWhileList[Function[z,
{Last[z], -Floor[First[z] + r1 Last[z]]}], a, ! (a == #) &, {2, 1}];
Print[Length[L]-1];
Show[Graphics[Map[Point, L]], AspectRatio -> Automatic, Axes -> True];
```

これにより周期 410 がであること、および図 2 から楕円軌道を描いていることが見て取れる。回転角が π の有理数倍のときなどは図 3 のごとく軌道が「分離」したり面白い形になることもある。これは周期 520 である。

3 二次有理回転と Torus map

問題が難しいとすれば、もっとも易しいケースを考えてみるのは自然である。 λ が整数でない場合で一番簡単なのは θ が 2π の有理数倍である場合であろう。さらに $\mathbb{Q}(\cos(\theta))$ が簡単ならば可能性があるかも知れない。特に $\mathbb{Q}(\cos(\theta))$ が $\mathbb{Q}$ の二次拡大の場合は簡単と思われる。 p/q を既約分数として $\theta = 2p\pi/q$ のとき $\mathbb{Q}(\cos(\theta))$ の次数はオイラー関数 ϕ を用いて $\phi(q)/2$ と表せる。二次体となるのは $\phi(q) = 4$ の場合である。これは $q = 5, 8, 10, 12$ の 4 つのケースしかない。そのそれぞれに対して p の選び方は本質的に二つあり、 $p/q \in \{1/5, 2/5, 1/8, 3/8, 1/10, 3/10, 1/12, 5/12\}$ である。この順番でそれぞれ $\lambda = -2\cos(\frac{2p\pi}{q})$ は

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$$

となる。

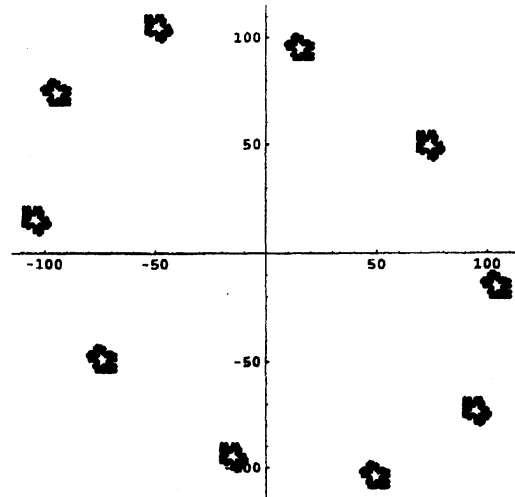


図 3: $\lambda = (\sqrt{5} - 1)/2$ のとき $(100, -15)$ の軌道

Vivaldi, Kouptsov, Lowenstein [7] による Torus map を導こう。 λ の最小多項式を $x^2 + Ax + B$ としよう。このとき $0 \leq a_{n+2} + \lambda a_{n+1} + a_n < 1$ は

$$a_{n+2} + \lambda a_{n+1} + a_n = \langle \lambda a_{n+1} \rangle$$

と同値であることに注意する。ここで $\langle x \rangle$ は x の小数部分である。これから

$$\lambda a_{n+2} + (-A\lambda - B)a_{n+1} + \lambda a_n = \lambda \langle \lambda a_{n+1} \rangle$$

とくに

$$\langle \lambda a_{n+2} \rangle - A \langle \lambda a_{n+1} \rangle + \langle \lambda a_n \rangle \equiv \lambda \langle \lambda a_{n+1} \rangle \pmod{1}$$

λ' を λ の共役とすれば $A = -\lambda - \lambda'$ より

$$\langle \lambda a_{n+2} \rangle + \lambda' \langle \lambda a_{n+1} \rangle + \langle \lambda a_n \rangle \equiv 0 \pmod{1}$$

この式にしたがって $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ 上の自己写像を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pmod{1}$$

により定義できる。 $\mathbb{Z}^2 \ni^t (a_n, a_{n+1}) \mapsto^t (\langle \lambda a_n \rangle, \langle \lambda a_{n+1} \rangle) \in \mathbb{T}^2$ は単射であるのもとの離散回転の力学系は $\mathbb{T}^2$ の別の力学系に埋め込まれたことになる。この写像 $\Phi :^t (x, y) \mapsto^t (x_1, y_1)$ を Torus map という。Torus map は、 $[0, 1]^2$ をまず行列で回転し、その像を $[0, 1]^2$ に $\text{mod } \mathbb{Z}^2$ で引き戻すことで得られる。この引き戻しは不連続に生じるので、Torus map は不連続で piecewise affine 写像である。 $\mathbb{Z}^2 \ni^t (a, b) \mapsto^t (\langle \lambda a \rangle, \langle \lambda b \rangle) \in \mathbb{T}^2$ は稠密な埋め込みであり、Torus map の様子を調べれば、もとの離散回転の挙動が分かることになる。Torus map が良い点は、誤

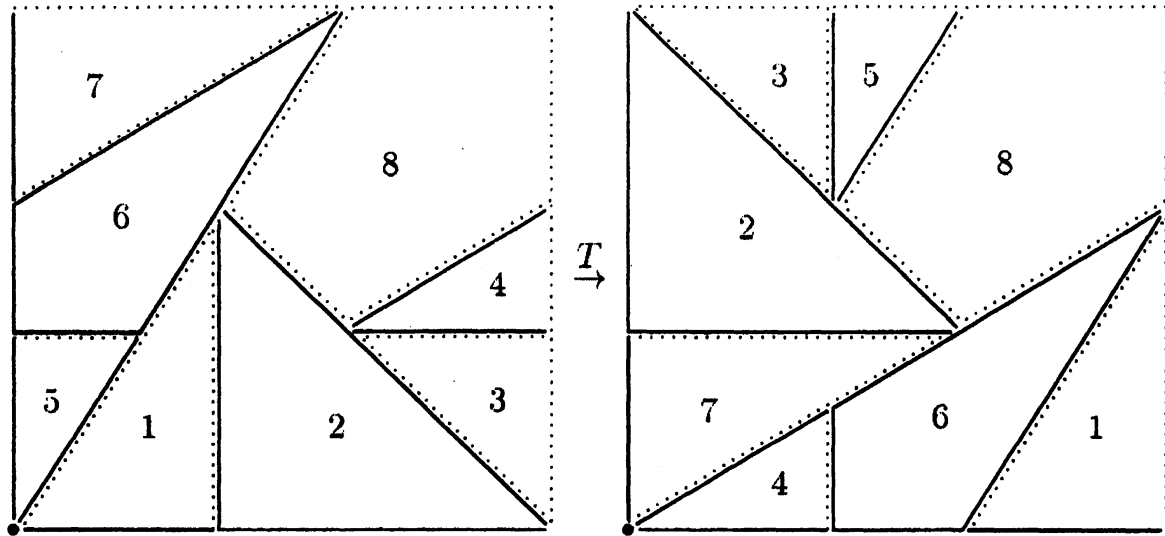


図 4: 領域交換 T , $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

差の累積がない決定的なアルゴリズムであることだが、一方 $\mathbb{T}^2$ で ${}^t(\langle \lambda a \rangle, \langle \lambda b \rangle)$ のような二次体 $\mathbb{Q}(\lambda)$ に属する点は可算であり、後から見るように $\mathbb{T}^2$ には実際には非周期的軌道も含まれている。Torus map の立場からすると予想 1 は、 $\mathbb{Q}(\lambda)^2$ の軌道が周期的であるという事を示すことになる。すなわち

予想 2. 任意の ${}^t(x, y) \in \mathbb{Q}(\lambda)^2$ について数列 $(\Phi^n({}^t(x, y)))_{n=0,1,\dots}$ は周期的である。

と言い換えられた。

ここに現れた行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\lambda' \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ と同じように回転を表し、 q 乗すると単位行列になる。したがって $T = \Phi^q$ は piecewise には平行移動となる。すなわち Φ^q は $[0, 1)^2 \rightarrow [0, 1)^2$ の領域交換写像である

4 黄金比 $(\sqrt{5} + 1)/2$ の場合

以下、さらに話を特殊化し $\lambda = (\sqrt{5} + 1)/2$ とする。 $T = \Phi^5$ は図 4 で与えられる。点線と実線により境界がどのように動くかが記述されており、原点は不動点となる。構成からこの写像は非常に多くの周期点を有することが期待される。

結論からいえば、非周期点は図 5 のような形で与えられる。まず 8 番の領域の開五角形に注目すると T では動いていない。また二番目に大きい閉五角形の部分は T により相互に入れ替わる。このことは、この部分に属する $\mathbb{Q}(\lambda)^2$ の点の周期がそれぞれ 5 または 10 であることを意味する。同様に図形のいたるところに現れている五角形は T の周期点に対応しており、周期点の $[0, 1)^2$ での Lebesgue 測度は実は 1 となる。非周期点の全体の閉包 Y は一般化された Iterated Function

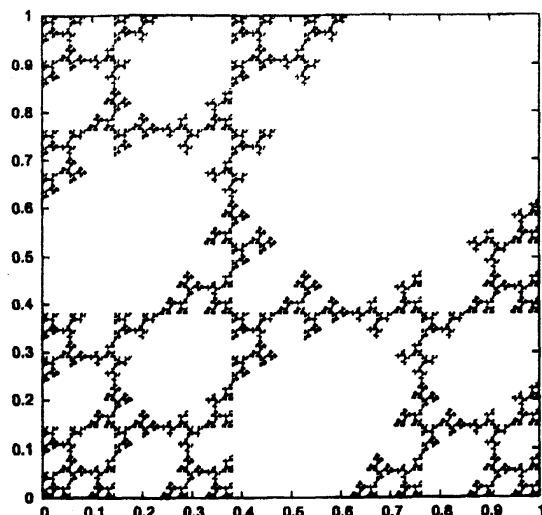


図 5: $\lambda = (\sqrt{5} + 1)/2$ のときの非周期軌道

System の attractor となり、 $[0, 1]^2$ で測度 0 である。自己相似測度を Y に乗せると領域交換写像 T は Y に ergodic に働く。⁴

$[0, 1]^2$ で測度 1 の集合上では周期的であるという Koupstov-Lowenstein-Vivaldi([7]) の主張は、痒いところに手が届かないといった印象を感じる。予想 1 は可算集合に関する問題であり、そもそも測度零の集合を扱うものであるから我々は、例外を許さない予想 1, 予想 2 の証明に主な興味を感じる。彼等もこの完全解決を global stability を呼んで興味をもっており、特に $\lambda = (1 - \sqrt{5})/2$ の場合には実際に証明しているが、計算機援用による証明で膨大な計算を行う必要があり、その方法は他の場合に拡張するのは厄介である。

以下我々の考え方の優位性が認められる部分を解説する。これにより手計算でも可能な範囲の簡数論的証明に帰着することができる。

5 Induced system と period reducing map

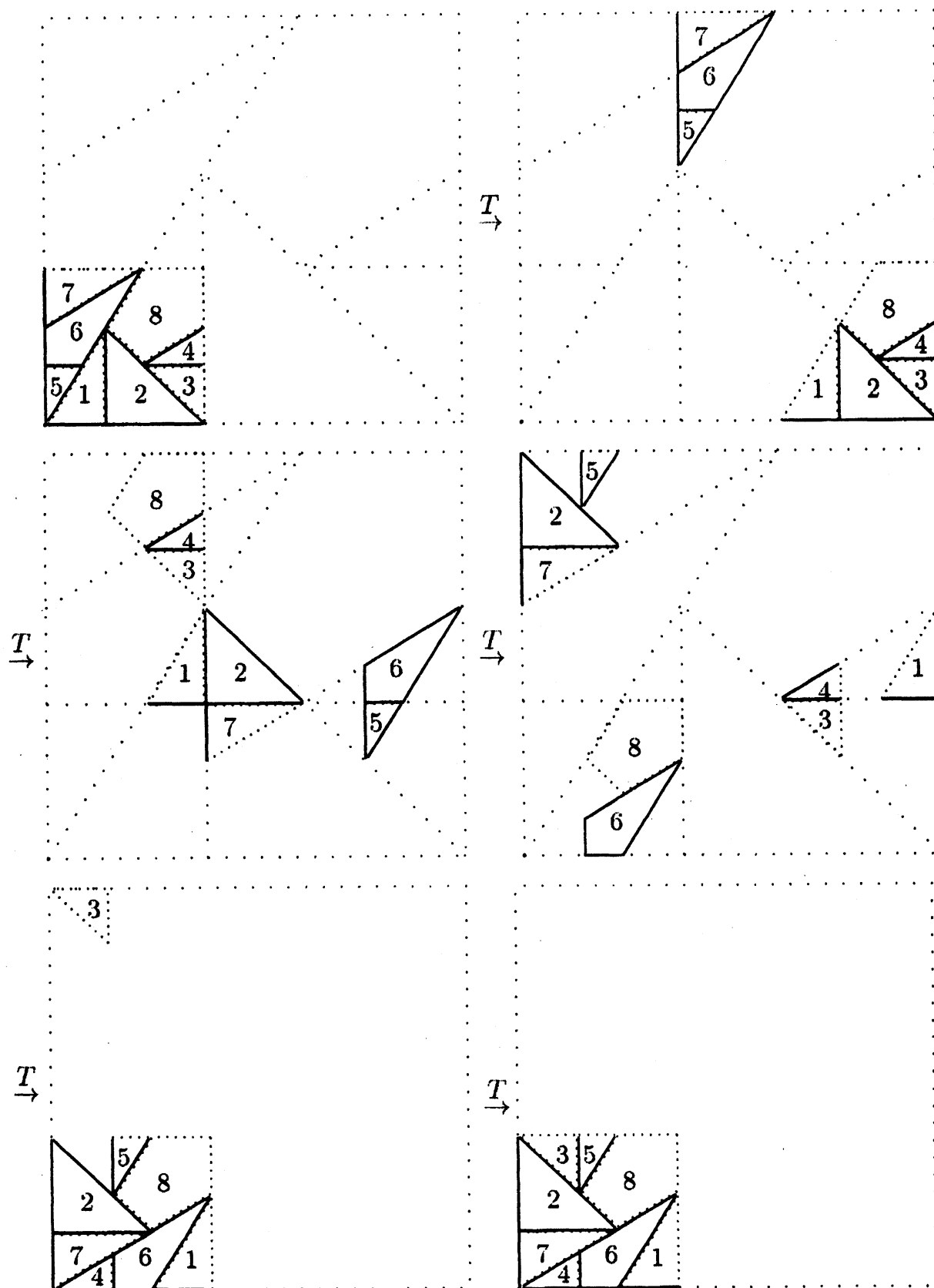
まず、図 5 を見て気づくのは $[0, 1]^2$ と $[0, 1/\lambda^2]^2$ の相似性である。これは $[0, 1/\lambda^2]^2$ への induced system を考えれば以下の図のような証明できる。つまり $\tilde{T}$ を $[0, 1/\lambda^2]^2$ への first return とすれば

$$([0, 1]^2, T) \simeq ([0, 1/\lambda^2]^2, \tilde{T})$$

となる。ここで重要なのは、この同型は境界の部分でも成立している事である。我々は例外のない主張をしたいので、この力学系の完全な自己相似性は問題の解決を非常に容易にする。⁵

⁴一般にはこの事は正しくなく $\lambda = \sqrt{3}$ では ergodic component は二つに分かれる。

⁵残念なことにこの完全な自己相似性は二次有理回転の 8 つのうち $(\pm\sqrt{5} + 1)/2$ の場合しか成立していない。



部分関数 $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ を次で定義する。

定義 1. $T^m(x) \in [0, 1/\lambda^2]^2$ に入るような $m = 0, 1, \dots$ が存在する場合その最小値を m_0 として $S(x) = \lambda^2 T^{m_0}(x)$ とする。

すなわち S は前出した周期 1, 2 (元の数列では 5, 10) に対応する開五角形と二つの閉五角形の部分では定義されない。

定義 2. $x \in [0, 1]^2$ について $\pi(x)$ を x の T に関する周期とする。非周期的な点に対しては ∞ とおく。

T は $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$ の全単射であるから、周期が存在すればすべて純周期的であることに注意する。このとき

命題 1. $x \in [0, 1]^2$ に対して $S(x)$ が定義されれば $\pi(S(x)) < \pi(x)$ 。

が成り立つ。なぜなら $\pi(T(x)) = \pi(x)$ であり $x \in [0, 1/\lambda^2]^2$ の元の周期は $\lambda^2 x \in [0, 1]^2$ の周期と比べれば長いのは二つの力学系の自己相似性と first return map の定義を考えれば明らか。

したがって証明すべきことは次のようになる。

全ての $\mathbb{Q}(\lambda)^2 \setminus \{(0, 0)\}$ の元にたいしてある自然数 m があって $S^{m-1}(x)$ は定義されるが $S^m(x)$ は定義されない。すなわち、 $S^m(x)$ は 3 つの五角形の中に落ちる。

定理 1. 予想 2 は $\lambda = (\sqrt{5} + 1)/2$ で成り立つ。

Proof. $(S^m(x))_{m=0,1,\dots}$ が無限列となることはないことを言えばよい。さて $x \in [0, 1]^2$ に対して $S(x)$ が定義されるならば $m_0 \leq 4$ であり、

$$S(x) = \lambda^2(x - a)$$

で $a \in \mathbb{Z}[\lambda]^2$ とかける。 a は有限集合

$$\left\{ \begin{aligned} &(0, 0), \left(0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(0, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}, -2 + \sqrt{5}\right), \\ &\left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}, -\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}\right), \left(2 - \sqrt{5}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(2 - \sqrt{5}, -3 + \sqrt{5}\right), \\ &\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right), \\ &\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right), \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right), \left(-3 + \sqrt{5}, \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned} \right\}$$

からなる。これを D とかく。

$$x \mapsto \lambda^2 x - \lambda^2 a_1 \mapsto \lambda^4 x - \lambda^4 a_1 - \lambda^2 a_2 \mapsto \dots$$

となり

$$S^m(x) = \lambda^{2m} x - \sum_{i=1}^m \lambda^{2(m-i+1)} a_i \quad (a_i \in D)$$

を得る。ここで λ の共役 λ' の絶対値は 1 より小である。 $a \in \mathbb{Q}(\lambda)^2$ について a' を $\lambda \mapsto \lambda'$ の共役写像による像、 $\|x\|$ を $\mathbb{R}^2$ の L_∞ -ノルム、 $M = \max\{\|a'\| \mid a \in D\}$ と置けば

$$\begin{aligned} \|S^m(x)'\| &= \left\| \lambda'^{2m} x - \sum_{i=1}^m \lambda'^{2(m-i+1)} a_i' \right\| \\ &< \varepsilon + \frac{M|\lambda'|^2}{1-|\lambda'|^2} \end{aligned}$$

となる。 $S^m(x)$ ($m = 0, 1, \dots$) は $\mathbb{Z}[\lambda]^2$ に含まれ

$$C = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\lambda]^2 \mid \|x\| \leq 1, \|x'\| < \varepsilon + \frac{M|\lambda'|^2}{1-|\lambda'|^2} \right\}$$

に含まれる。ところが、この集合 C は有界集合内の格子点と対応しており、 m と無関係な有限集合となる。 $S(C) \subset C$ となるので、 $(S^m(x))_{m=0,1,\dots}$ という無限列があるとすれば C 内で循環することになる。 C の元の S での軌道を計算し、すべて有限で止まることを確かめることができる。これで証明が終了した。□

この証明のもっとも大切な点は λ が代数的整数で λ' の絶対値が 1 より小であること、すなわち λ が Pisot 数ということである。同じ証明で $\frac{1}{2}\mathbb{Q}(\lambda)^2$ の全ての元が T に関して周期的であることもいえる。また $\frac{1}{3}\mathbb{Q}(\lambda)^2$ では実際に非周期点が見つかる。たとえば $(1/3, 0)$ は非周期点である。具体的な非周期点を作れるのもこの方法の面白いところである。実際に、多数の代数的な点が非周期点になることがわかるが、これは 3 進 Cantor 集合に代数的数が属するかという Mahler の未解決問題を想起させる。

6 終わりに

本稿では $(\sqrt{5}+1)/2$ の場合を詳しく述べた。他の 7 つの二次有理回転でも同様の構造がある。すなわち、まず T は自己相似性をもつことが確かめられる。 $(\sqrt{5}+1)/2$ の場合には全体の $[0, 1]^2$ とその縮小との相似関係であったが、他の場合にはこのように単純ではなく $[0, 1]^2$ の一部の領域が自己相似性を持つ。また、その拡大率は Pisot 数となる！ただし、この自己相似性は $(\sqrt{5}+1)/2$ のような完全なものではなく、境界上では別の振る舞いの自己相似性を示すことになり、記述は面倒にな

る。周期の記述にはある種の substitution を導入した方がわかりやすくなる。さらに拡張として高次元、たとえば三次有理回転を扱うことも可能である。この場合には Torus map は $[0, 1]^4 \rightarrow [0, 1]^4$ の領域交換である。この場合まだ力学系の自己相似性は見つかっていないが、同様の Pisot 拡大率の自己相似性があるのではないかと期待している。

参考文献

- [1] S. Akiyama, T. Borbély, H. Brunotte, A. Pethő, and J. M. Thuswaldner, *Generalized radix representations and dynamical systems I*, Acta Math. Hungar. **108** (2005), no. 3, 207–238.
- [2] S. Akiyama, H. Brunotte, A. Pethő, and W. Steiner, *Remarks on a conjecture on certain integer sequences*, Periodica Math. Hungarica **52** (2006), 1–17.
- [3] S. Akiyama, H. Brunotte, A. Pethő, and J. M. Thuswaldner, *Generalized radix representations and dynamical systems II*, Acta Arith. **121** (2006), 21–61.
- [4] S. Akiyama and K. Scheicher, *From number systems to shift radix systems*, Nihonkai Math. J. **16** (2005), no. 2, 95–106.
- [5] W. J. Gilbert, *Radix representations of quadratic fields*, J. Math. Anal. Appl. **83** (1981), 264–274.
- [6] M. Hollander, *Linear numeration systems, finite beta expansions, and discrete spectrum of substitution dynamical systems*, Ph.D. thesis, University of Washington, 1996.
- [7] K. Koupstov, J. H. Lowenstein, and F. Vivaldi, *Quadratic rational rotations of the torus and dual lattice maps*, Nonlinearity **15** (2002), 1795–1842.
- [8] K. Schmidt, *On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers*, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 269–278.

秋山茂樹

Shigeki AKIYAMA

新潟大学理学部数学教室

新潟市五十嵐 2 の町 8050

e-mail: akiyama@math.sc.niigata-u.ac.jp