

# 退化する摩擦項をもつ波動方程式の エネルギー減衰

九大教養 中尾慎宏 (Mitsuhiko Nakao)

## 0. 序.

$\Omega$  をなめらかな境界  $\partial\Omega$  をもつ  $\mathbb{R}^N$  の有界領域とし, 次のような摩擦項をもつ波動方程式を考慮する。

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t = f(x,t) & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

簡単のためしばらく  $f \equiv 0$  としよう。よく知られているように,  $a(x) \geq 0$  かつ  $a(x) > 0$  なるば (1)-(2) の解  $u(x,t)$  のエネルギー

$$E(u(t)) \equiv \frac{1}{2} (\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2)$$

( $\|\cdot\|$  は  $L^2(\Omega)$  ノルム) は  $t \rightarrow \infty$  のとき指数的に減衰する。

(くわしい詳細については Rauch [11] 参照) もし  $a(x) \geq 0$

で  $a(x) = 0$  となり得るならばどうであろうか。Iwasaki

[3], Dautermon [1] によれば  $\Omega$  のある開集合で  $a(x) > 0$

ならば  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(u(t)) = 0$  が成立する。この事実の証明はしかし、力学系の理論や概周期関数の性質に依拠しており、従って decay rate について何らかの示唆を与えてくれるものではない。

この報告では、 $\alpha(x)$  に対するある合理的な条件下 (16) で (1)-(2) の解のエネルギー減衰評価を導く。さらに  $N=1$  の場合には、同様の方法で非線型方程式：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \rho(x, u_t) + \beta(x, u) = f(x, t) & \text{in } I \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad u|_{\partial I} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

( $I$  は  $\mathbb{R}$  の区間) も取扱えることを示した。ここで  $\rho$  は  $\rho \sim \alpha(x)|u_t|^r u_t$  ,  $\beta(x, u)$  は  $\beta(x, u) \sim \alpha(x)|u|^q u$  のような非線型性をもつものである。

Russell [12] は抽象的な議論を展開しているが、それを (1)-(2) に適用すると次を得る：

$$E(u(t)) \leq C_R (1+t)^{-R} \quad (4)$$

ここで  $R$  は  $(u_0, u_1)$  のなめらかさの程度 (たとえば  $(u_0, u_1) \in H_{2r+1} \times H_{2r}$  で compatibility 条件を満たす) で、 $\alpha(x)$  については次の条件が課されている：

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \inf (w_j \| \sqrt{a} \phi_j \|_U) \geq \delta > 0, \quad (5)$$

ただし,  $U$  は  $U \subset L^2$  なる Hilbert 空間,  $w_j$  は  $-\Delta$  の固有値 (Dirichlet 条件下),  $\phi_j$  は正規化された固有関数 ( $L^2$  で). 条件 (5) を explicit に書く下ろすのは極めて困難と思え, また彼の証明方法は control theory を用いる莫でもその程簡単ではない。この報告では

$$a(x) \geq 0, \quad a(x) > 0 \text{ a.e. } x \in \Omega, \quad a(x)^{-1} \in L^p(\Omega), \quad 0 < p < \infty \quad (6)$$

エネルギー法のみを用いて, の仮定の下で (1)-(2) および (3) の解のエネルギー減衰評価を導くことにする。Russell の結果およびわれわれのそれから、暖めることは '  $a(x)$  の degeneracy は解の regularity によって補償される ' というものである。

## 1. 線型方程式.

この節では, (1)-(2) について考える。存在定理を念のため書くと, 以下を要す,

定理 A. (cf. [2])  $m \geq 0$  (整数),  $a \in B^{\max(m, 2)}$ ,  $f \in \bigcap_{i=0}^m E_t^i(H_{m-i}) \cap E_t^{m+1}(L^2)$  かつ  $(u_0, u_1) \in H_{m+2} \cap \dot{H}_1 \times H_{m+1} \cap \dot{H}_1$  は  $m+1$  次の compatibility 条件を満たすとする。このとき (1)-(2) は  $u \in \bigcap_{i=0}^{m+1} E_t^i(H_{m+2-i})$  なる一意解をもつ。

先ず次の簡単な評価をみよう。

命題 1. 定理 A の仮定に加えて,

$$M_0 \equiv \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^+ \\ 0 \leq i \leq m}} \|f^{(i)}(t)\|_{H_{m-i}} < \infty \quad (f^{(i)} \equiv \frac{\partial^i}{\partial t^i} f)$$

かつ

$$M_1 \equiv \max_{0 \leq i \leq m+1} \min \left( \int_0^\infty \int_\Omega \alpha^{-1} |f^{(i)}|^2 dx dt, \int_0^\infty \|f^{(i)}(t)\| dt \right) < \infty$$

とする。このとき,

$$\sum_{i=0}^{m+1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} u(t) \right\|_{H_{m+2-i}} \leq C_0 < \infty$$

が成立する。ここで  $C_0$  は  $\|u_0\|_{H_{m+2}}, \|u_1\|_{H_{m+1}}, M_0, M_1$  に依存する定数。

略証)  $M_1 < \infty$  は  $\int_0^\infty \|f^{(i)}(t)\| dt < \infty, i=1, \dots, m+1$  の方を仮定する。  $\frac{\partial^i}{\partial t^i} u = U, i=0, 1, \dots, m+1$ , とおくと  $U$  は

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + a(x)U_t = f^{(i)} \\ U(0) = u_0, \quad U_t(0) = u_1, \quad U|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

の解である。ここで  $\{u_k\}_{k=2}^{m+1}$  は次で定まる。

$$u_k = -a u_{k-1} - \Delta u_{k-2} + f^{(k-2)}(x, 0). \quad (8)$$

(compatibility 条件より)  $(u_k, u_{k+1}) \in H_2 \cap \dot{H}_1 \times \dot{H}_1, k=1, \dots, m$ , に注意。 (7)  $\times U_t$  を積分して,

$$\begin{aligned} E(U(t)) + \int_0^t \int_{\Omega} a U_t^2 dx ds &= E(U(0)) + \int_0^t \int_{\Omega} f(x) U_t dx ds \\ &\leq E(U(0)) + \int_0^t \|f^{(k)}\| \sqrt{E(U(s))} ds \end{aligned}$$

これより

$$E(U(t)) \leq \left( \sqrt{E(U(0))} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \|f^{(k)}\| ds \right)^2 < \infty. \quad (9)$$

(9) と楕円型方程式の正則性定理より結論が従う。

系 1.  $m \geq m_0 \equiv [N/2]$  とする。この時、命題 1 の仮定の下

で

$$\sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in \mathbb{R}^+}} |U_t(x, t)| \leq C_0 < \infty.$$

略証) Sobolev の埋蔵定理よりある。

結論と証明を述べよう。( [8] より少し結果は良くなっている。)

3.)

定理 1. ([8])  $\Omega(x)$  について (6) を仮定する。  $m \geq [N/2]$  にして命題 1 の仮定が満たされているとする。さらに

$$f_0(t)^2 + f(t)^{(2p(m+1)+N)/2p(m+1)} = o(t^{-1-2p(m+1)/N}), \quad t \rightarrow \infty,$$

を仮定する。この時次が成立する。

$$E(u(t)) \leq C_m (1+t)^{-2p(m+1)/N} \quad (10)$$

ここで,  $C_m$  は  $\|u_0\|_{H_{m+2}}, \|u\|_{H_{m+1}}$  に依存する定数,

$$D_0(t) = \left( \int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 ds \right)^{1/2}, \quad D_1(t) = \left( \int_t^{t+1} \int_{\Omega} a^{-1}(x) f(x,s)^2 dx ds \right)^{1/2}$$

である。

証明) 方程式 (1)  $\times u_t$  を積分して,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \int_{\Omega} a(x) u_t^2 dx ds &\leq 2 \{E(u(t)) - E(u(t+1))\} + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} a^{-1} |f|^2 dx ds \\ &\equiv D(t)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, 仮定 (6) を用いると,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \|u_t(s)\|^2 ds &= \int_t^{t+1} \int_{\Omega} a^{-p/(p+1)} a^{p/(p+1)} u_t^2 dx ds \\ &\leq \left( \int_{\Omega} a^{-p} dx \right)^{p/(p+1)} \left( \int_t^{t+1} \int_{\Omega} a |u_t|^{2(p+1)/p} dx ds \right)^{p/(p+1)} \\ &\leq \|a^{-1}\|_p^{p/(p+1)} \left( \int_t^{t+1} \int_{\Omega} a |u_t|^2 dx ds \right)^{p/(p+1)} \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \leq s \leq t+1}} |u_t(x,s)|^{2/(p+1)} \\ &\leq C D(t)^{2p/(p+1)} \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \leq s \leq t+1}} |u_t(x,s)|^{2/(p+1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

$\exists \tau, \exists t_1 \in [t, t+1], \exists t_2 \in [t+3/4, t+1] \quad \text{s.t.}$

$$\|u_t(t_i)\|^2 \leq C D(t)^{2p/(p+1)} \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \leq \rho \leq t+1}} |u_t(x, \rho)|^{2/(p+1)} \quad (13)$$

次に, 方程式  $\times u$  を  $\Omega \times [t_1, t_2]$  上で積分すると,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(\rho)\|^2 d\rho &= (u(t_1), u_t(t_1)) - (u(t_2), u_t(t_2)) \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (a(x) u_t u + f u) dx d\rho \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t(\rho)\|^2 d\rho \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \|u(t_i)\| \|u_t(t_i)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 d\rho \\ &\quad + \left( \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} a u_t^2 dx d\rho \right)^{1/2} \left( \int_{t_1}^{t_2} \|u(\rho)\|^2 d\rho \right)^{1/2} \|a\|_{\infty} \\ &\quad + \left( \int_{t_1}^{t_2} \|f(\rho)\|^2 d\rho \right)^{1/2} \left( \int_{t_1}^{t_2} \|u(\rho)\|^2 d\rho \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

さらに, (11), (12), (13) を用いて,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u(\rho)\|^2 d\rho \leq C_0 D(t)^{V(p+1)} \sup_{t \leq \rho \leq t+1} \|u(\rho)\| \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \leq \rho \leq t+1}} |u_t(x, \rho)|^{V(p+1)}$$

$$+ C_0 D(t)^{2p/(p+1)} \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \leq s \leq t+1}} |u_t(x, s)|^{2/(p+1)}$$

$$+ C_0 (D(t)^2 + \sigma(t)^2)$$

$$\equiv A(t)^2.$$

⇐ (1) & (2) & (3)

$$\int_{t_1}^{t_2} E(u(s)) ds \leq C A(t)^2$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} E(u(s^*)) ds \leq C A(t)^2, \quad \exists t^* \in [t_1, t_2].$$

ここで、エネルギー等式を用い、 $\delta = \varepsilon > 0$  と、

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq s \leq t+1} E(u(s)) &\leq E(u(s^*)) + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} (a u_t^2 + |f u_t|) dx ds \\ &\leq C A(t)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\|u(s)\| \leq C E(u(s))^{1/2} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

$$\sup_{x \in \Omega} |u_t(x, s)| \leq C \|u_t(s)\|^\theta \|u_t(s)\|_{H^{m+1}}^{1-\theta} \quad (15)$$

$$\leq C E(u(s))^{\theta/2} \quad (\text{命題 1.3.1})$$

with  $\theta = 1 - N/2(m+1)$  に注意し, Young の不等式を用いて (14) を整理すると次を得る。

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq n \leq t+1} E(u_n) &\leq C_0 \left\{ D(t)^{4P(m+1)/(2P(m+1)+N)} + D(t)^2 + \delta(t)^2 \right\} \\ &\leq C_0 \left\{ D(t)^{4P(m+1)/(2P(m+1)+N)} + \delta(t)^2 \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

( $D(t)$ : 有界に注意)。

$D(t)$  の定義 (11) を思い出して, (16) を変形すると,

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq n \leq t+1} E(u_n) &\leq C_0 \left\{ \frac{\{2P(m+1)+N\}}{2P(m+1)} \right. \\ &\quad \left. \leq C_0 \left\{ E(u_t) - E(u_{t+1}) + (C_0 \delta(t)^2 + (\delta(t))^{\{2P(m+1)+N\}/2P(m+1)}) \right\} \right. \end{aligned}$$

これに次の補題を適用すれば (17) を得る。

補題 1. ([6])  $\phi(t)$  を  $\mathbb{R}^+$  上の非負関数で, 次を満たすものとする。

$$\sup_{t \leq n \leq t+1} \phi(n)^{1+\alpha} \leq C(1+t)^r (\phi(t) - \phi(t+1)) + g(t), \quad C > 0$$

with  $r \leq 1$ . この時,

(i)  $\alpha > 0$ ,  $-\infty < r < 1$  かつ  $g(t) = o(t^{-(1-r)(\alpha+1)/\alpha})$  as  $t \rightarrow \infty$

ならば

$$\phi(t) \leq C_0 (1+t)^{-(1-r)/\alpha},$$

(ii)  $\alpha > 0$ ,  $r=1$  かつ  $\phi(t) = (\log t)^{(1+\alpha)/\alpha}$  as  $t \rightarrow \infty$  ならば,

$$\phi(t) \leq C_0 (\log(1+t+2))^{-1/\alpha}.$$

ここで  $C_0$  は  $\phi(0)$  等に依存する定数。

注意. [8] では (15) の代りに系 1 を用いたのが結果は少し粗くなっている。しかし <sup>1階</sup>高エネルギーの評価も与えている。

## 2. 非線型方程式.

この節では空間一次元の非線型波動方程式 (3) を考察する。

簡単のため  $p(x, u_t) = a(x)|u_t|^r u_t$ ,  $-kr < \infty$ , とする。  $a(x)$  に

ついては (6) の他 有界性  $a \in L^\infty(I)$  のみを仮定する。  $p(x, u)$

はフラテオトリ条件を満たし,  $u \in C^1$  として微分可能 かつ 次を満足するものとする。

$$(i) \quad p(x, u)u \geq 0.$$

$$(ii) \quad |p(x, u)| + \left| \frac{\partial}{\partial u} p(x, u) \right| \leq C(M) \quad \text{a.e. } x \in I$$

$$\text{且 } |u| \leq M.$$

(3) の解の存在定理とそれかみたら差分不等式を次に述べる。  
組わい減衰評価はこの不等式から導かれる。

命題 2.  $-1 < \gamma \leq 2/p$  とする。  $(u_0, u_1) \in H_2 \cap \dot{H}_1 \times \dot{H}_1$ ,  
 $f \in W_{loc}^{1,2}(R^+; L^2)$  に対して (3) は次のよう解を一意的  
にもつ。

$$u \in W_{loc}^{3,\infty}(R^+; L^2) \cap W_{loc}^{1,\infty}(R^+; \dot{H}_1) \cap L_{loc}^2(R^+; H_2 \cap \dot{H}_1)$$

さらに次の不等式が成立する。

$$\sup_{t \leq A \leq t+1} E(u(A)) \leq C \left\{ D(t)^{4p(\gamma+2)/(4p+p\gamma+2)} \sup_{t \leq A \leq t+1} \|u_{tx}(A)\|^{2 \frac{2(2-p\gamma)}{4p+p\gamma+2}} \right. \\ \left. + D(t)^{2(\gamma+1)} + D(t)^{\gamma+2} + \sigma(t)^2 \right\} \quad (17)$$

但し

$$E(u(A)) = \frac{1}{2} \|u_t(A)\|^2 + \frac{1}{2} \|u_x(A)\|^2 + \int_{\mathbb{R}} \int_0^u f(x, v) dv dx,$$

$$D(t)^{\gamma+2} = C \left\{ E(u(t)) - E(u(t+1)) \right\} + C \sigma_0(t)^{(\gamma+2)/(\gamma+1)},$$

$$\sigma(t)^2 = \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds, \quad \sigma_0(t)^2 = \int_t^{t+1} \int_{\mathbb{R}} a^{-1} |f(s)|^2 dx ds.$$

上の命題において, 解の存在証明は standard であり (cf. Lions & Strauss [4] etc.) (17) の導出は定理 1 の証明にあたる (16) と平行に行われるので証明は省略する。(くわしくは [10]).

注意.  $r \geq 2/p$  のときは (17) の代わりに次を得る:

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(u(s)) \leq C \{ D(u)^2 + D(u)^{2(r+1)} + D(u)^{r+2} + \delta(u)^2 \},$$

これから,  $\delta(u)^{(r+2)/(r+1)} + \delta(u)^{r+2} = O(|x|^{-1-2/r})$  の下で,

$$E(u(s)) \leq C_0 (1+|x|)^{-2/r} \quad (18)$$

が従うが, この結果は nondegenerate な場合 ( $a(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ ) と一致する。([5]) (18) のためには ラータ については,  $(u_0, u_1) \in H_1 \times L^2$ ,  $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2)$  で十分であることも注意しておく。退化している場合には, もっと一般の発展方程式に対してくわしい結果が得られている (N. [6, 7], Yamada [13])。

以後, 命題 2 の解  $u(x)$  について考える。 (17) から  $E(u(s))$  の decay 評価が導かれるわけだが, 典型例として次の二つの定理をあげておこう。いずれも略証を与える。

定理 2.  $-1 < r \leq 2/p$  とき,  $\beta(x, u) \equiv 0$  とする。このとき,

$$\int_0^\infty \|f_t(u)\| dt < \infty, \quad \sigma_0(t)^{(r+2)/(r+1)} + \sigma(t)^{r+2} = O(t^{-1-\gamma_0})$$

の下で次が成立する。

$$E(u(t)) \leq C_1 (1+t)^{-\gamma_0}$$

但し,  $C_1$  は  $\|u_0\|_{H^2}$ ,  $\|u_0\|_{H^1}$  に依存する定数,  $\gamma_0$  は次の定数である。

$$\gamma_0 = \begin{cases} 4p/(2+pr) & \text{if } p \geq -2(r+1)/r(r+3) \\ -2(r+1)/r & \text{if } 0 < p < \end{cases}$$

定理 3.  $0 \leq r \leq 2$ ,  $2r/(r^2+2r+4) < p \leq 2/r$  とし,

$\beta \equiv 0$  とさらに次を仮定する:

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \beta(x, u) \right| \leq k_1 a(u)^{(2-pr)/(r+2)} |u|^\alpha, \quad \alpha \geq 0.$$

このとき,

$$(i) \quad \alpha > r(pr+2)/(pr+2), \quad \sigma_0(t)^{(r+2)/(r+1)} + \sigma(t)^{(4p+pr+2)/pr} \\ = O(t^{-1-4p/(pr+2)}), \quad \int_0^\infty \|f_t\|^2 dt < \infty \quad \text{の下で}$$

$$E(u(t)) \leq C_1 (1+t)^{-4p/(pr+2)}$$

$$\text{iii)} \quad 0 \leq \alpha \leq r(pr+2)/2p(r+2), \quad \sigma_0(t)^{(r+2)/(r+1)}(1+t)^{b_0} + \\ \sigma(t)^{(4pr+2+pr)/2p} = O(t^{-1-4p/(pr+2)}), \quad \int_0^\infty \|\dot{u}_t\|^2 dt < \infty$$

の下で,

$$E(u_t) \leq C_1(\varepsilon)(1+t)^{-4p(1-b_0)/(pr+2)}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$\text{in B' C, } b_0 \equiv \frac{2-pr}{2p(r+2)} \cdot \frac{r(pr+2) - 2p(r+2)\alpha}{2+pr - (2-pr)\alpha}.$$

定理 2 の略証)  $\frac{\partial}{\partial p} \rho(x, p) \geq 0$  から, 方程式 (3) を  $t$  で微分し (2) を

$$E(u_t) = \frac{1}{2} \|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u_{tx}(t)\|^2 \\ \leq E(u_{t=0}) + \int_0^t \|\dot{u}_t\| \sqrt{E(u_{t=0})} d\lambda. \quad (19)$$

従って

$$E(u_t) \leq \left( \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{u}_t\| d\lambda + \sqrt{E(u_{t=0})} \right)^2 \leq C_1 < \infty.$$

これを (17) に代入し,  $\rho(t)$  の有界性 (8.2(1)) を用いると

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(u_s)^{(r+2)/q} \leq C_1 \left\{ E(u_t) - E(u_{t+1}) + C \sigma_0^{(r+2)/(r+1)} \right. \\ \left. + C \sigma(t)^{2(r+2)/q} \right\},$$

$$\text{in B' C, } q = \min(4p(r+2)/(4p+pr+2), 2(r+1), r+2).$$

これに補題 1 を適用すればよい。

定理 3 の略証) (19) の代わりに次を得る。

$$\begin{aligned} E(u_t u_t) + (r+1) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t|^r |u_{tt}|^2 dx ds \\ \leq E(u_t(0)) + c \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(x)^\theta |u_t| |u_{tt}| |u|^\alpha dx ds + \int_0^t \|u_t\| \|u_{tt}\| ds \end{aligned}$$

$$(\theta = (2-pr)/(r+2)).$$

$$c = c', \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t|^{r+2} dx ds < \infty \quad \text{を仮定すると,}$$

$$\begin{aligned} c \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(x)^\theta |u_t| |u_{tt}| |u|^\alpha dx ds \\ \leq \frac{r+1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(x) |u_t|^r |u_{tt}|^2 dx ds + c \left( \int_0^t \|u(s)\|_\infty^{\alpha(r+2)/r} ds \right)^{2r/(r+2)} \end{aligned}$$

と変形でき、従ってより

$$\begin{aligned} E(u_t u_t) &\leq E(u_t(0)) + c \int_0^t \|u_t(s)\| \sqrt{E(u_t(s))} ds \\ &\quad + c \left( \int_0^t \|u(s)\|_\infty^{\alpha(r+2)/r} ds \right)^{2r/(r+2)} \quad (20) \end{aligned}$$

先ず  $\|u_t(s)\|_\infty$  の有界性 ( $E(u_t)$ : bdd. 系) と (20) から

$$E(u_t u_t) \leq C_1 (1+t)^{2r/(r+2)}$$

=  $\mu$  を命題 2 の (17) 式に代入して, 補題 1 を用いると

$$E(u_k) \leq C_1 (1+x)^{-4p(1-\mu_0)/(pr+2)} \quad (21)$$

with  $\mu_0 = r(2-pr)/(2p(r+2)) < 1$ . (20), (21) より

$$E(u_{k+1}) \leq C_1 (1+x)^{\eta_1}$$

with  $\eta_1 = \max(0, \frac{2r}{r+2} - \frac{4p\alpha(1-\mu_0)}{pr+2})$ . この評価式を用いると, 命題 2 より (21) より さらに sharp な結果を得ることはできる。この操作をくり返すことにより, 次が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} E(u_k) \leq C_1 (1+x)^{-4p(1-\mu_k)/(pr+2)} \\ E(u_{k+1}) \leq C_1 (1+x)^{\eta_{k+1}} \end{array} \right., \quad (22)$$

ただし,  $\mu_0 = \frac{r(2-pr)}{p(r+2)} < 1$ ,  $\mu_k = \frac{(2-pr)\eta_k}{4p}$  より

$$\eta_{k+1} = \max\left(0, \frac{2r}{r+2} - \frac{4p\alpha(1-\mu_k)}{pr+2}\right), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_k = 0 & (k \text{ 十分大}) \quad \text{if } r(pr+2)/2p(r+2) < \alpha \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = b_0 & \text{if } 0 < \alpha \leq r(pr+2)/2p(r+2) \end{array} \right.$$

より, 結論を得る。

最後に退化する場合では有りか、類似の方法で証明できる  
興味深いと思われる結果を一つつけ加えます。

$$f(x, u_t) = k_0 |u_t|^{-r} u_t, \quad 0 < r < 1, \text{ (sublinear)}, \quad \beta(u, u) = k_1 |u|^\alpha u, \quad \alpha \geq 0$$

とある。もちろん  $k_0 \geq 0, k_1 \geq 0$ 。

定理 4.1 [9])  $d_0(x) = O(x^{-(1-r)/r}), \int_0^\infty \|u_t\|^2 dx < \infty$

のとき、命題 1 の解  $u(x)$  に対して次が成立：

$$E(u(x)) \leq C_1 (1+x)^{-2/r}$$

さらに,  $(1-r)(1+\alpha) > 1$ ,  $d_1(x) \equiv \left( \int_x^{x+1} \|u_s\|^2 ds \right)^{1/2} = O(x^{-1/r})$

が成り立つ。

$$E(u(x)) \leq C_1 (1+x)^{-2/r}$$

も得る。

以上。

## References

- [1] C.Dafermos, Asymptotic behavior of solutions of evolution equations, in Nonlinear Evolution Equations, M.G.Crandall ed., Academic Press, New York (1978).
- [2] M.Ikawa, Mixed problems for hyperbolic equations of second order, J.Math.Soc.Japan, Vol.20(1968), p.580-608.
- [3] N.Iwasaki, Local decay of solutions for symmetric hyperbolic systems with dissipative and coercive boundary conditions in exterior domains, Publ.R.I.M.S., Kyoto Univ., Vol.5, No.2(1969), p.193-218.
- [4] J.L.Lions and W.A.Strauss, Some non-linear evolution equations, Bull.Soc.Math. France, 93(1965), p.43-96.
- [5] M.Nakao, Convergence of solutions of the wave equations with a dissipative term to the steady state, Mem.Fac. Sci.Kyushu Univ., 30(1976), p.257-265.
- [6] M.Nakao, A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations, J.Math.Soc.Japan 30(1978) p.747-762.
- [7] M.Nakao, Asymptotic stability for some nonlinear evolution equations of second order with unbounded dissipative terms, J.Differential Equations, Vol.30, No.1(1978), 54-63.
- [8] M.Nakao, Energy decay for the wave equation with a degenerate dissipative term, Proc.Royal Soc. Edinburgh Sec.A (1985), to appear.
- [9] M.Nakao, Periodic solutions and decay for some nonlinear wave equations with sublinear dissipative terms, to appear.
- [10] M.Nakao, Energy decay for the nonlinear wave equations with degenerate dissipative terms, to appear.
- [11] J.Rauch, Qualitative behavior of dissipative wave equations on bounded domains, Arch.Rational Mech.Anal., Vol.62(1976) p.77-85.
- [12] D.L.Russell, Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space, J.Differential Equations, Vol.19(1975), p.334-370.
- [13] Y.Yamada, On the decay of solutions for some nonlinear evolution equations of second order, Nagoya Math.J. (1979) p.69-98.