

Dynamics on Rational Surfaces *

上原崇人†

平成 23 年 2 月 3 日

概要

論文 [7] のレジュメとして, エントロピーが正の有理曲面上の自己同型写像の構成方法について述べる. ここでは, orbit data とよばれる概念を導入し, orbit data が適当な条件を満たすとき, orbit data を実現する自己同型写像が存在することを示す.

1 導入

論文 [7] のレジュメとして, エントロピーが正の有理曲面上の自己同型写像の構成方法について述べる. エントロピーが正の自己同型写像を許容するコンパクトな複素曲面は, 本質的には, 複素トーラス, K3 曲面, そして有理曲面のいずれかに分類されることが S. Cantat [2] により示されている. このうち有理曲面上の自己同型写像の具体例については, 以前までほとんど知られていなかったが, ここ数年, Bedford-Kim, Diller, McMullen 等によって三次曲線を保存する射影平面上の二次双有理写像を考察し, ブローアップで持ち上げることにより自己同型写像を構成している ([1, 3, 4] 参照). それに対して, 我々は三次曲線を保存する二次とは限らない任意次数の双有理写像から構成する. 実際には, orbit data とよばれる概念を導入し, orbit data があるチェック可能な条件を満たすとき, orbit data を実現する自己同型写像が存在することを示す. この方法を用いることで, 従来に比べて大量の自己同型写像を構成できることがわかる.

2 準備

まず, ブローアップの復習から始める. 滑らかな射影曲面 Y の点 $y \in Y$ におけるブローアップ $\pi_y: Y_y \rightarrow Y$ とは, 曲面 Y_y 上の曲線 $E_y \subset Y_y$ が存在して, (i) $E_y \cong \mathbb{P}^1$, (ii) $Y_y \setminus E_y \cong Y \setminus \{y\}$, を満たすものである. 曲線 E_y は例外因子とよばれる. ブローアップを用いると, 射影曲面間の双有理射や双有理写像は次のように表される.

定理 2.1 X, Y を滑らかな射影曲面とする.

*Mathematics Subject Classification: 14E07, 14J50, 37F99.

†北海道大学大学院理学研究院, E-mail addresses: t-uehara@math.sci.hokudai.ac.jp

(1) $f: X \rightarrow Y$ が双有理射であるための必要十分条件は、ブローアップ $\pi_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ の合成

$$f: X = X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = Y$$

で表されることである。

(2) $f: X \rightarrow Y$ が双有理写像であるための必要十分条件は、ある双有理射 $f_1: \tilde{X} \rightarrow X$ と $f_2: \tilde{X} \rightarrow Y$ が存在して、

$$f: X \xrightarrow{f_1^{-1}} \tilde{X} \xrightarrow{f_2} Y$$

と表されることである。

この定理から、ブローアップが基本的な双有理射になっていることがわかる。一般に双有理写像は、有限個の定義できない点、すなわち不確定点が存在する。双有理写像 f の不確定点全体の集合を $I(f)$ で表す。

次に、有理曲面の定義を与える。

定義 2.2 滑らかな射影曲面 X は二次元射影空間 $\mathbb{P}^2$ と双有理同値なとき、すなわち、双有理写像 $X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在するとき、**有理曲面**とよばれる。

X を有理曲面とし、 $F: X \rightarrow X$ を X 上の自己同型写像とする。このとき、Gromov と Yomdin の定理により、 F の位相的エントロピーは、

$$h_{\text{top}}(F) = \log \lambda(F^*)$$

と表される。ただし、 $\lambda(F^*)$ は二次コホモロジー群への作用 $F^*: H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z})$ のスペクトル半径、すなわち、 $\lambda(F^*) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ は } F^*: H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{Z}) \text{ の固有値}\}$ である。エントロピーが正となる自己同型写像、つまり $\lambda(F^*) > 1$ となる自己同型写像 $F: X \rightarrow X$ をもつ有理曲面 X は次のように特徴付けられる ([5] 参照)。

命題 2.3 有理曲面 X は $\lambda(F^*) > 1$ となる自己同型写像 $F: X \rightarrow X$ を許容すると仮定する。このとき、双有理射 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在する。(つまり、 X の極小曲面は $\mathbb{P}^2$ になる。)

以下、双有理射 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ が存在すると仮定する。このとき、

$$\pi: X = X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = \mathbb{P}^2$$

とブローアップ $\pi_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$ の合成で表されることを用いると、 X の二次コホモロジー群は、

$$H^2(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}[E_N]$$

と表すことができる。ここで、 H は $\mathbb{P}^2$ 内の直線 $L \subset \mathbb{P}^2$ の π による全変換 $H = \pi^*(L)$ 、 E_i は π_i の例外因子 $E'_i \subset X_i$ の $\pi_{i+1} \circ \cdots \circ \pi_n$ による全変換 $E_i = (\pi_{i+1} \circ \cdots \circ \pi_n)^*(E'_i)$ である。さらに、 $[D]$ は D の線形同値類を表す。このコホモロジー群の表現は、双有理射 π の取り方に依存することに注意する。さらに、コホモロジー群 $H^2(X; \mathbb{Z})$ の交差形式は、次で与えられる：

$$\begin{cases} ([H], [H]) = 1, \\ ([E_i], [E_j]) = -\delta_{i,j}, & (i, j = 1, \dots, N), \\ ([H], [E_i]) = 0, & (i = 1, \dots, N). \end{cases}$$

これに基づいて, Lorentz 格子を導入する. Lorentz 格子 $\mathbb{Z}^{1,N}$ とは, 以下で与えられる Lorentz 内積をもった格子である:

$$\mathbb{Z}^{1,N} = \bigoplus_{i=0}^N \mathbb{Z} \cdot e_i, \quad (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & (i = j = 0), \\ -1 & (i = j = 1, \dots, N), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

すると, 同型写像 (マーキング) $\phi_\pi : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$,

$$\phi_\pi(e_0) = [H], \quad \phi_\pi(e_i) = [E_i] \quad (i = 1, \dots, N)$$

が定まる. マーキング ϕ_π は, 双有理射 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ に依存して決まる.

さらに, Lorentz 格子に作用する Weyl 群を定義する. $N \geq 3$ に対して, Weyl 群 $W_N \subset O(\mathbb{Z}^{1,N})$ とは, $(\rho_i)_{i=0}^{N-1}$ によって生成される群である. ただし, $O(\mathbb{Z}^{1,N})$ は Lorentz 内積に関する直交群であり, $\rho_i : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow \mathbb{Z}^{1,N}$ は次で定義される鏡映変換である:

$$\rho_i(x) = x + (x, \alpha_i) \cdot \alpha_i, \quad \alpha_i := \begin{cases} e_0 - e_1 - e_2 - e_3 & (i = 0), \\ e_i - e_{i+1} & (i = 1, \dots, N-1). \end{cases}$$

また, $\Phi_N := \bigcup_{i=0}^{N-1} W_N \cdot \alpha_i$ を W_N のルート系といい, Φ_N の元をルートという. Weyl 群 W_N が重要な役割を果たすことは, 次の命題よりわかる (see [6]).

命題 2.4 任意の双有理射 $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ と自己同型写像 $F : X \rightarrow X$ に対して, Weyl 群 W_N の元 $w \in W_N$ が唯一存在して, 次が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{1,N} & \xrightarrow{w} & \mathbb{Z}^{1,N} \\ \phi_\pi \downarrow & & \downarrow \phi_\pi \\ H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{F^*} & H^2(X; \mathbb{Z}). \end{array}$$

このとき, w は (π, F) によって実現されるということにする. さらに, 自己同型写像 F のエントロピーは, $h_{\text{top}}(F) = \log \lambda(w)$ と表される. そこで,

$$\Lambda := \{\lambda(w) \geq 1 \mid w \in W_N, N \geq 3\}$$

とおくと, 次の命題が成立する.

命題 2.5 有理曲面 X 上の自己同型写像 $F : X \rightarrow X$ のエントロピーは, ある元 $\lambda \in \Lambda$ を用いて $h_{\text{top}}(F) = \log \lambda$ と表される.

ここで興味があるのは逆の問題である. すなわち, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, 有理曲面 X 上の自己同型写像 $F : X \rightarrow X$ で $h_{\text{top}}(F) = \log \lambda$ となるものは存在するか? この問題は肯定的であることが後にわかる (系 7.3 参照).

3 二次双有理写像

まず, infinitely near point の概念について解説する. 今回, ブローアップは曲線上で行われるので, 次のような設定で説明する. C を有理曲面 Y 上の (一般には特異点をもつ) 曲線として, C^* を C の滑らかな点全体の集合とする. 点 $y \in C^*$ を一つ固定して, $(Y_0, C_0, y_0) := (Y, C, y)$ とおく. さらに, $m > 0$ に対して, (Y_m, C_m, y_m) を帰納的に次で決まるものとする.

- (1) Y_m は $y_{m-1} \in C_{m-1}^*$ におけるブローアップ $\pi_m : Y_m \rightarrow Y_{m-1}$ で定まる曲面.
- (2) C_m は C_{m-1} の狭義変換, すなわち, $C_m := \overline{\pi_m^{-1}(C_{m-1} \setminus \{y_{m-1}\})}$.
- (3) $y_m \in C_m^* \cap E_m$. ただし, E_m は π_m の例外因子である. ここで, y_{m-1} は C_{m-1} の滑らかな点であるため, $C_m^* \cap E_m = \{y_m\}$ となることがわかる.

この一意に定まる点 y_m を C^* における y の m -th infinitely near point とよぶことにする. 状況に応じて, infinitely near point と区別するため, Y 上の点を proper point とよぶことがある. 以下, Y 上の点とは, Y 上の proper point もしくは, ある点の infinitely near point のいずれかを意味し, $y_1 = y_2$ は, 共通の点の m -th infinitely near point であることを意味する. また, y_2 が y_1 の infinitely near point であるとき, $y_1 < y_2$ と表し, $y_1 < y_2$ もしくは $y_1 > y_2$ であるとき, $y_1 \approx y_2$ と表すことにする. 一方, 双有理射 $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ を,

$$\pi : \tilde{Y} = Z_n \xrightarrow{\pi_n} Z_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} Z_0 = Y$$

と $z_i \in Z_{i-1}$ におけるブローアップ $\pi_i : Z_i \rightarrow Z_{i-1}$ の合成で表したとき, $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ を Y の n 点 $\{z_1, \dots, z_n\}$ におけるブローアップとよび, $E_i = (\pi_{i+1} \circ \cdots \circ \pi_n)^*(E_i')$ を π の z_i 上の例外因子とよぶことにする. ただし, $E_i' \subset X_i$ は π_i の例外因子である.

以下の議論では, $Y = \mathbb{P}^2$ とし, C を $\mathbb{P}^2$ 上の尖点をもつ三次曲線とする. 具体的には, $\mathbb{P}^2$ の座標をうまく選ぶことで, $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid yz^2 = x^3\} \subset \mathbb{P}^2$ と表される. このとき, 尖点は $[0 : 1 : 0]$ である. また, 滑らかな点の集合 $C^* = C \setminus \{[0 : 1 : 0]\}$ は, $\mathbb{C} \ni t \mapsto [t : t^3 : 1] \in C^*$ とパラメータ付けられる.

次に, $\mathbb{P}^2$ 上の双有理写像について考察する. 集合 $B(C)$ を $\mathbb{P}^2$ 上の双有理写像 f であって, $f(C) := \overline{f(C \setminus I(f))} = C$ と $[0 : 1 : 0] \notin I(f^{\pm 1})$ を満たすもの全体として, $Q(C) \subset B(C)$ を $B(C)$ 内の二次双有理写像全体とする. 写像 $f \in B(C)$ を C^* に制限すると, C^* 上の自己同型写像になり, $\delta(f) \in \mathbb{C}^\times$ と $c(f) \in \mathbb{C}$ を用いて,

$$f|_{C^*} : C^* \ni [t : t^3 : 1] \mapsto [\delta(f) \cdot t + c(f) : (\delta(f) \cdot t + c(f))^3 : 1] \in C^*$$

と表される. $\delta(f)$ は $\mathbb{P}^2$ の座標の取り方にはよらず定まり, f の determinant とよばれる. また, 二次写像 $f \in Q(C)$ は逆写像 f^{-1} も $Q(C)$ に属し, 不確定点集合 $I(f^{\pm 1})$ は C^* 上の 3 点からなる. さらに, $\delta(f)$ と $I(f^{\pm 1})$ の配置から $f \in Q(C)$ は一意に決まることがわかる.

補題 3.1 双有理写像 f が $Q(C)$ に属するための必要十分条件は, $d \in \mathbb{C}^\times$ と $b \in \{b = (b_\ell)_{\ell=1}^3 \in \mathbb{C}^3 \mid b_1 + b_2 + b_3 \neq 0\}$ が存在して, $f = f_{d,b}$ と表されることである. ただし, $f_{d,b} \in Q(C)$ は $\delta(f_{d,b}) = d$ および $c(f_{d,b}) = -\frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3) \in \mathbb{C}^\times$ を満たし, $I(f_{d,b}^{\pm 1}) = \{p_1^\pm, p_2^\pm, p_3^\pm\}$ として

$$b_\ell^+ := \frac{1}{d} \left\{ b_\ell - \frac{2}{3}(b_1 + b_2 + b_3) \right\}, \quad b_\ell^- := b_\ell, \quad (\ell \in \{1, 2, 3\})$$

とおくと, 次の場合に応じて $p_\ell^\pm$ が与えられる唯一の二次双有理写像である:

Case 1 $b_i \neq b_j$, ($i \neq j \in \{1, 2, 3\}$) の場合: $\cdot p_\ell^\pm = [b_\ell^\pm : (b_\ell^\pm)^3 : 1] \in C^*$, ($\ell \in \{1, 2, 3\}$).

Case 2 $b_i = b_j \neq b_k$, ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) の場合: $\begin{cases} \cdot p_\ell^\pm = [b_\ell^\pm : (b_\ell^\pm)^3 : 1] \in C^*, (\ell \in \{i, k\}) \\ \cdot p_j^\pm : p_i^\pm \text{の first infinitely near point.} \end{cases}$

Case 3 $b_i = b_j = b_k$, ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) の場合: $\begin{cases} \cdot p_i^\pm = [b_i^\pm : (b_i^\pm)^3 : 1] \in C^* \\ \cdot p_j^\pm : p_i^\pm \text{の first infinitely near point} \\ \cdot p_k^\pm : p_i^\pm \text{の second infinitely near point.} \end{cases}$

補題 3.1 の各場合に応じて, 二次写像による推移を記述していくことにする. そこで, $\pi^\pm : X^\pm \rightarrow \mathbb{P}^2$ をそれぞれ 3 点 $\{p_1^\pm, p_2^\pm, p_3^\pm\}$ におけるブローアップ, $H^\pm \subset X^\pm$ を $\mathbb{P}^2$ 内の直線の $\pi^\pm$ による全変換, $E_i^\pm \subset X^\pm$ を $p_i^\pm$ 上の例外因子, $L_i^\pm$ を $p_j^\pm$ と $p_k^\pm$ を通る直線 $l_i^\pm := \{((b_j^\pm)^2 + b_j^\pm b_k^\pm + (b_k^\pm)^2)x - y - (b_j^\pm + b_k^\pm)b_j^\pm b_k^\pm z = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ (ただし, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) の狭義変換とする. このとき, 双有理写像 f は双正則写像 $\tilde{f} : X^+ \rightarrow X^-$ に持ち上がり, 補題 3.1 の各場合に応じて次のように曲線が推移する (図 1-3 参照):

Case 1 $\tilde{f} : E_\ell^+ \rightarrow L_\ell^-$ ($\ell \in \{1, 2, 3\}$), $E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm$ は既約な曲線.

Case 2 $\tilde{f} : \begin{cases} E_i^+ - E_j^+ \rightarrow E_i^- - E_j^- \\ E_\ell^+ \rightarrow L_\ell^- \end{cases}$ ($\ell \in \{j, k\}$), $E_i^\pm - E_j^\pm, E_j^\pm, E_k^\pm$ は既約な曲線.

Case 3 $\tilde{f} : \begin{cases} E_i^+ - E_j^+ \rightarrow E_i^- - E_j^- \\ E_j^+ - E_k^+ \rightarrow E_j^- - E_k^- \\ E_k^+ \rightarrow L_k^- \end{cases}$, $E_i^\pm - E_j^\pm, E_j^\pm - E_k^\pm, E_k^\pm$ は既約な曲線.

曲線 $L_i^\pm$ は $H^\pm - E_j^\pm - E_k^\pm$ と線形同値である. また, f は generic な直線を 3 点 p_1^-, p_2^-, p_3^- を通る二次曲線にうつす. これら事実と, 空間 $X^\pm$ のコホモロジー群が $H^2(X^\pm; \mathbb{Z}) \cong \text{Pic}(X^\pm) = \mathbb{Z}[H^\pm] \oplus \mathbb{Z}[E_1^\pm] \oplus \mathbb{Z}[E_2^\pm] \oplus \mathbb{Z}[E_3^\pm]$ と表されることに注意すると, コホモロジー群への誘導写像 $\tilde{f}^* : H^2(X^-; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X^+; \mathbb{Z})$ が計算できる.

一般にブローアップする点の数を増やしても計算可能である. 二次双有理写像 $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ に対して, 異なる n 点 $\{p_1^\pm, p_2^\pm, \dots, p_n^\pm\}$ を,

条件 1 $I(f^{\pm 1}) = \{p_{\ell_1}^\pm, p_{\ell_2}^\pm, p_{\ell_3}^\pm\}$, ($\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$)

条件 2 $f(p_\ell^+) = p_\ell^-$, ($\ell \notin \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$)

となるようにとる. $\pi^\pm : X^\pm \rightarrow \mathbb{P}^2$ をそれぞれ n 点 $\{p_1^\pm, p_2^\pm, \dots, p_n^\pm\}$ におけるブローアップ, $H^\pm \subset X^\pm$ を $\mathbb{P}^2$ 内の直線の $\pi^\pm$ による全変換, $E_i^\pm \subset X^\pm$ を $p_i^\pm$ 上の例外因子とする. 双有理写像 f は双正則写像 $\tilde{f} : X^+ \rightarrow X^-$ に持ち上がる. このとき, コホモロジー群 $H^2(X^\pm; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H^\pm] \oplus \mathbb{Z}[E_1^\pm] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[E_n^\pm]$ への作用 $\tilde{f}^* : H^2(X^-; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X^+; \mathbb{Z})$ は次で与えられる:

$$\tilde{f}^* : \begin{cases} [H^-] \mapsto 2[H^+] - \sum_{i=1}^3 [E_{\ell_i}^+] \\ [E_{\ell_i}^-] \mapsto [H^+] - [E_{\ell_j}^+] - [E_{\ell_k}^+] & (\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}) \\ [E_\ell^-] \mapsto [E_\ell^+] & (\ell \notin \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}). \end{cases} \quad (1)$$

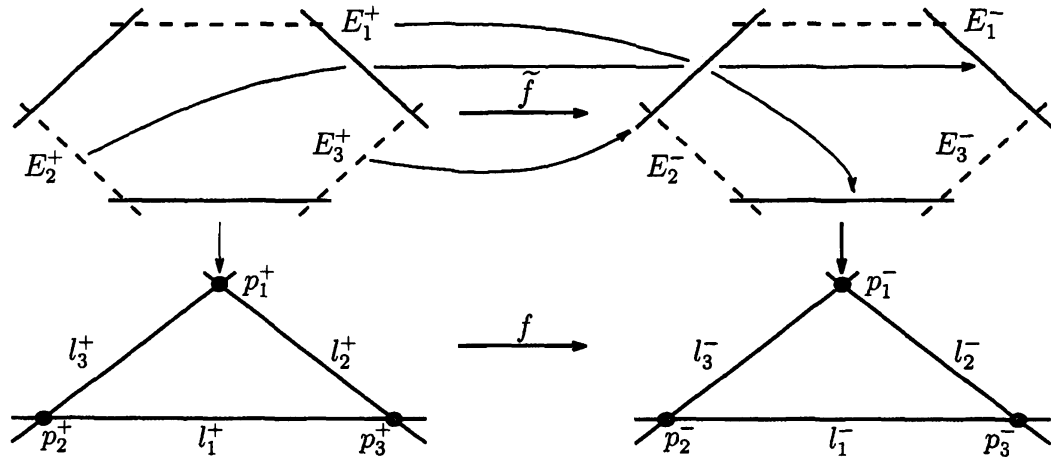


図 1: Case 1 における曲線の推移

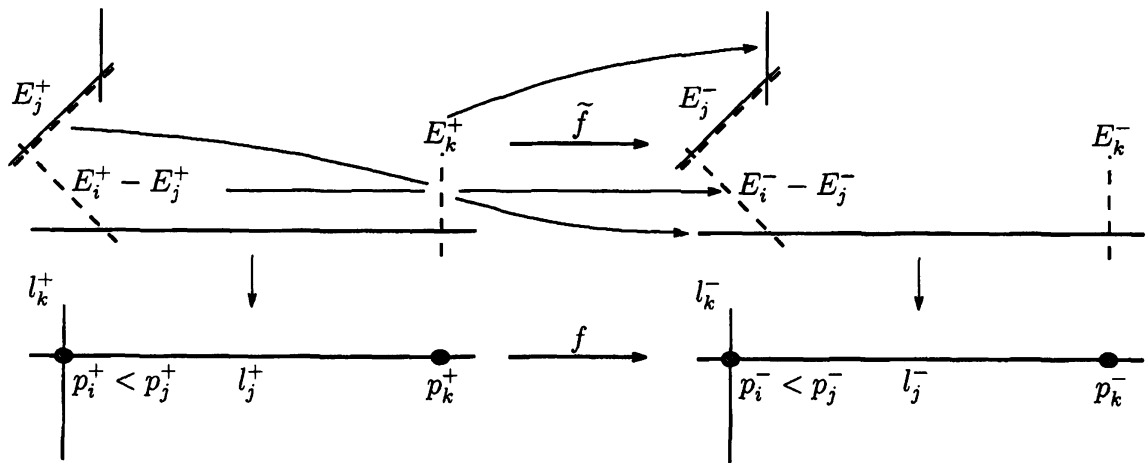


図 2: Case 2 における曲線の推移

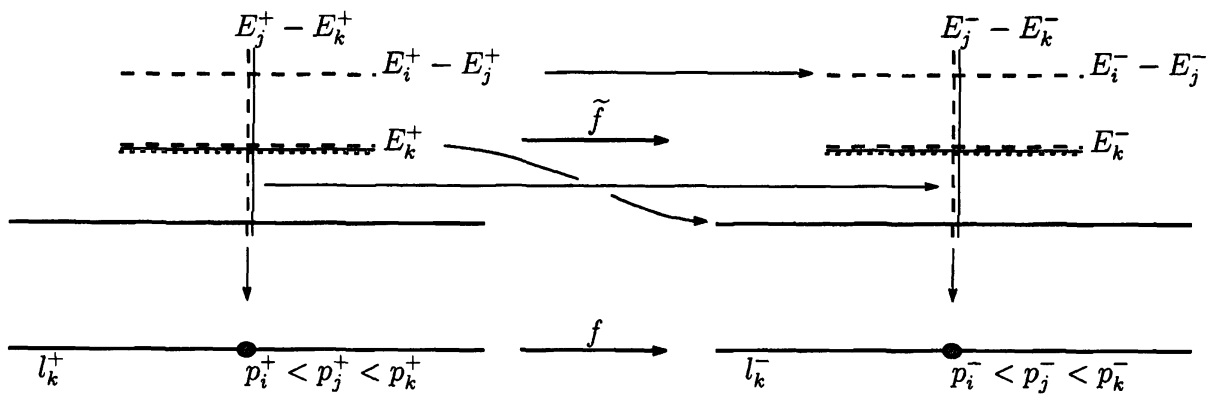


図 3: Case 3 における曲線の推移

4 自己同型写像の構成

本節では、自己同型写像の構成方法について述べる。ここで用いられるのは、二次双有理写像 $f_\ell \in \mathcal{Q}(C)$ の n 個の組 $\bar{f} := (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{Q}(C)^n$ である。都合上、空間に添え字をつけて、 $f_\ell : \mathbb{P}_{\ell-1}^2 \rightarrow \mathbb{P}_\ell^2$ と表し、 $\mathbb{P}_0^2 = \mathbb{P}_n^2$ とする。また、 $f_\ell^{\pm 1}$ の不確定点集合を、 $I(f_\ell) = \{p_{\ell,1}^+, p_{\ell,2}^+, p_{\ell,3}^+\} \subset \mathbb{P}_{\ell-1}^2$ および $I(f_\ell^{-1}) = \{p_{\ell,1}^-, p_{\ell,2}^-, p_{\ell,3}^-\} \subset \mathbb{P}_\ell^2$ と表し、不確定点の添え字の集合を $\mathcal{K}(n) := \{(\iota_1, \iota_2) \mid \iota_1 = 1, \dots, n, \iota_2 = 1, 2, 3\}$ とおく。不確定点の推移をみるため、 $m \geq 0$ と $\iota \in \mathcal{K}(n)$ に対して、帰納的に、

$$p_\iota^0 := p_\iota^- \in \mathbb{P}_{\iota_1}^2, \quad p_\iota^m := f_\ell(p_\iota^{m-1}) \in \mathbb{P}_\ell^2 \quad (\ell \equiv \iota_1 + m \bmod n)$$

とおく。もし $p_\iota^{m-1} \notin I(f_\ell)$ であれば、 p_ι^m は well-defined であることに注意する。さらに、 $\mathcal{K}(n)$ の置換 $\sigma : \mathcal{K}(n) \rightarrow \mathcal{K}(n)$ と関数 $\mu : \mathcal{K}(n) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて、

$$p_\iota^m \neq p_{\iota'}^+ \quad (0 \leq m < \mu(\iota), \iota' \in \mathcal{K}(n)), \quad p_\iota^{\mu(\iota)} = p_{\sigma(\iota)}^+ \quad (2)$$

がすべての $\iota \in \mathcal{K}(n)$ について成り立つと仮定する。また、写像の構成には空間 $\mathbb{P}_n^2$ での情報が重要になるため、 $\kappa(\iota)$ を軌道 $p_\iota^0, p_\iota^1, \dots, p_\iota^{\mu(\iota)}$ の中で $\mathbb{P}_n^2$ にある点の数とする。具体的には、 $\kappa(\iota) = (\mu(\iota) + \iota_1 - \sigma(\iota)_1 + 1)/n$ となる。ただし、 $\sigma^m(\iota) = (\sigma^m(\iota)_1, \sigma^m(\iota)_2)$ である。もし $\sigma(\iota)_1 \leq \iota_1$ ならば $\kappa(\iota) \geq 1$ となることが容易にわかる。

定義 4.1 三つ組 $\tau = (n, \sigma, \kappa)$ を orbit data とよぶ。ただし、

- n は正の整数,
- σ は $\mathcal{K}(n)$ 上の置換,
- $\kappa : \mathcal{K}(n) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は関数で、 $\sigma(\iota)_1 \leq \iota_1$ ならば $\kappa(\iota) \geq 1$ を満たす。

この orbit data τ から、関数

$$\mu : \mathcal{K}(n) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \mu(\iota) = \kappa(\iota) \cdot n + \sigma(\iota)_1 - \iota_1 - 1 = \theta_{\iota_1, \sigma(\iota)_1 - 1}(\kappa(\iota))$$

を再現できることに注意する。ただし、 $\theta_{i,i'}(k)$ は次で与えられる：

$$\theta_{i,i'}(k) := k \cdot n + i' - i. \quad (3)$$

定義 4.2 二次双有理写像の組 $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{Q}(C)^n$ は、すべての $\iota \in \mathcal{K}(n)$ に対して条件 (2) を満たすとき、orbit data τ の realization とよぶ。

orbit data τ の realization $\bar{f}$ を用いて、自己同型写像を構成する。そのため、 $Y_\ell := \mathbb{P}_\ell^2$, $\mathcal{K} := \mathcal{K}(n)$ とおく。すべての $\iota \in \mathcal{K}$ について条件 (2) が成り立つとき、軌道 $p_\iota^- = p_\iota^0, p_\iota^1, \dots, p_\iota^{\mu(\iota)} = p_{\sigma(\iota)}^+$ がすべて proper point となる $\bar{\iota} = (\bar{\iota}_1, \bar{\iota}_2) \in \mathcal{K}$ が存在することがわかる。そこで、 $Y'_\ell \rightarrow Y_\ell$ を Y_ℓ の proper points $\{p_\ell^m \in Y_\ell \mid 0 \leq m \leq \mu(\bar{\iota}), \bar{\iota}_1 + m \equiv \ell \bmod n\}$ におけるプローアップとすると、写像 $f_\ell : Y_{\ell-1} \rightarrow Y_\ell$ は、 $f'_\ell : Y'_{\ell-1} \rightarrow Y'_\ell$ に持ち上がる (図 4 参照)。点 $p_\ell^0 = p_\ell^-$ は、 $Y_{\bar{\iota}_1-1}$ 内の $\mathbb{P}^1$ と同型な曲線が $f_{\bar{\iota}_1} : Y_{\bar{\iota}_1-1} \rightarrow Y_{\bar{\iota}_1}$ により写される点であり、点 $p_\ell^{\mu(\bar{\iota})} = p_{\sigma(\bar{\iota})}^+$ は、 $Y_{\sigma(\bar{\iota})_1-1}$ 内の $\mathbb{P}^1$ と同

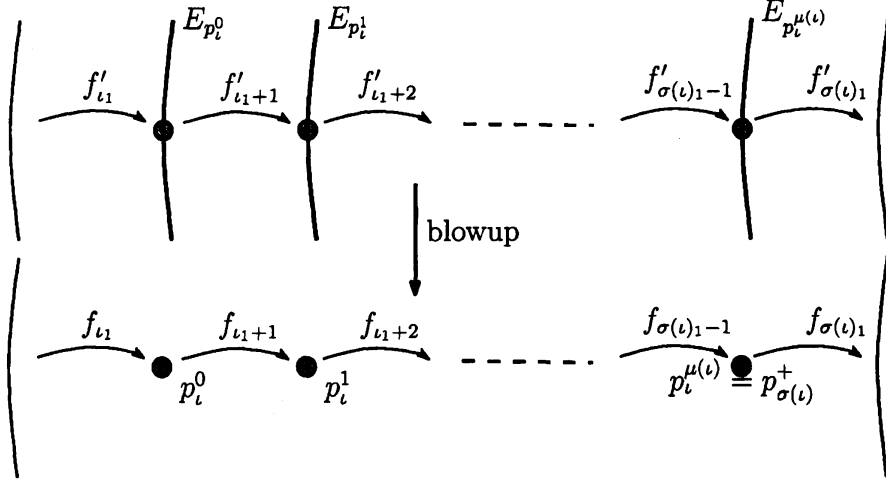


図 4: 不確定点のブローアップ

型な曲線が $f_{\sigma(\bar{l})_1}^{-1} : Y_{\sigma(\bar{l})_1} \rightarrow Y_{\sigma(\bar{l})_1-1}$ により写される点であることに注意すると, このブローアップにより $f_{\bar{l}_1}^{-1}$ の不確定点 $p_{\bar{l}}^-$ と $f_{\sigma(\bar{l})_1}$ の不確定点 $p_{\sigma(\bar{l})}^+$ が取り除かれる. つまり,

$$I(f'_\ell) = \begin{cases} I(f_{\sigma(\bar{l})_1}) \setminus \{p_{\sigma(\bar{l})}^+\} & (\ell = \sigma(\bar{l})_1) \\ I(f_\ell) & (\ell \neq \sigma(\bar{l})_1), \end{cases} \quad I((f'_\ell)^{-1}) = \begin{cases} I(f_{\bar{l}_1}^{-1}) \setminus \{p_{\bar{l}}^-\} & (\ell = \bar{l}_1) \\ I(f_\ell^{-1}) & (\ell \neq \bar{l}_1) \end{cases} \quad (4)$$

が成り立つ. ここで, Y'_ℓ を Y_ℓ に, f'_ℓ を f_ℓ に, $\mathcal{K} \setminus \{\bar{l}\}$ を $\mathcal{K}$ に置き換えると, 再びすべての $\iota \in \mathcal{K}$ について条件 (2) が成り立つ. そこで, 上記の議論を $3n$ 回繰り返し用いると, 最終的には (4) により不確定点がすべて取り除かれ, 自己同型写像が構成できる. つまり, $\pi_\ell : X_\ell \rightarrow \mathbb{P}_\ell^2$ を上記のブローアップの合成, すなわち, $N = \sum_{\iota \in \mathcal{K}(n)} \kappa(\iota)$ 点 $P_\ell := \{p_\ell^m \in \mathbb{P}_\ell^2 \mid \iota \in \mathcal{K}(n), 0 \leq m \leq \mu(\iota), \iota_1 + m \equiv \ell \pmod{n}\}$ におけるブローアップとすると, $f_\ell : \mathbb{P}_{\ell-1}^2 \rightarrow \mathbb{P}_\ell^2$ は, 双正則写像 $F_\ell : X_{\ell-1} \rightarrow X_\ell$ に持ち上がる:

$$\begin{array}{ccc} X_{\ell-1} & \xrightarrow{F_\ell} & X_\ell \\ \pi_{\ell-1} \downarrow & & \downarrow \pi_\ell \\ \mathbb{P}_{\ell-1}^2 & \xrightarrow{f_\ell} & \mathbb{P}_\ell^2. \end{array}$$

さらに, $X_\tau := X_0 = X_n$ とおくと, 双有理写像 $f := f_n \circ \cdots \circ f_1 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ は, $\pi_\tau := \pi_n : X_\tau \rightarrow \mathbb{P}^2$ により自己同型写像 $F_\tau := F_n \circ \cdots \circ F_1 : X_\tau \rightarrow X_\tau$ に持ち上がる. このように, orbit data τ の realization $\bar{f}$ を用いると, 自己同型写像 F_τ が構成できるのである.

ここで, 二次双有理写像 $f_\ell : \mathbb{P}_{\ell-1}^2 \rightarrow \mathbb{P}_\ell^2$ は, N 点 $P_{\ell-1}$ と P_ℓ に対して, 前節の条件 1 と条件 2 が成り立つことに注意する. そこで, $F_\ell : X_{\ell-1} \rightarrow X_\ell$ のコホモロジー群への作用 $F_\ell^* : H^2(X_\ell; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_{\ell-1}; \mathbb{Z})$ への作用は, 式 (1) の形で表される. さらに, 自己同型写像 F_τ のコホモロジー群への作用 $F_\tau^* : H^2(X_\tau; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_\tau; \mathbb{Z})$ は, 合成 $F_\tau^* = F_1^* \circ \cdots \circ F_n^*$ を用いて計算できる. 作用 F_τ^* に対応する具体的な Weyl 群の元は次のように表される.

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の直線の π_τ による全変換を H , π_τ の p_τ^m 上の例外因子を E_τ^m とすると, X_τ のコホモロジー群は, $H^2(X_\tau; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[H] \oplus (\oplus_{\iota \in \mathcal{K}(n)} \oplus_{k=1}^{\kappa(\iota)} [E_\tau^{k-1}])$ と表される. そこで, 格子

$$\mathbb{Z}^\tau := \mathbb{Z}e_0 \oplus (\oplus_{\iota \in \mathcal{K}(n)} \oplus_{k=1}^{\kappa(\iota)} \mathbb{Z}e_\iota^k) \cong \mathbb{Z}^{1,N} \quad (N = \sum_{\iota \in \mathcal{K}(n)} \kappa(\iota))$$

と, この上の内積

$$\begin{cases} (e_0, e_0) = 1 \\ (e_\iota^k, e_\iota^k) = -1 & (\iota \in \mathcal{K}(n), \quad 1 \leq k \leq \kappa(\iota)) \\ (e_0, e_\iota^k) = (e_\iota^k, e_{\iota'}^{k'}) = 0 & ((\iota, k) \neq (\iota', k')) \end{cases}$$

を考える. 写像 $\phi_{\pi_\tau} : \mathbb{Z}^\tau \rightarrow H^2(X_\tau; \mathbb{Z})$, $\phi_{\pi_\tau}(e_0) = [H]$, $\phi_{\pi_\tau}(e_\iota^k) = [E_\tau^{k-1}]$ は, π_τ に対応するマーキングになる. また, $\iota \in \mathcal{K}(n)$ と $m \geq 0$ 対し, $\sigma_m(\iota) := \sigma^k(\iota)$ とおく. ただし, $k \geq m$ は, $\kappa(\sigma^\ell(\iota)) = 0$ ($m \leq \ell < k$) および $\kappa(\sigma^k(\iota)) \geq 1$ を満たす整数である. そこで, 写像 $r_\tau : \mathbb{Z}^\tau \rightarrow \mathbb{Z}^\tau$ を

$$r_\tau : \begin{cases} e_0 & \mapsto e_0 \\ e_{\sigma_1(\iota)}^1 & \mapsto e_\iota^{\kappa(\iota)} \\ e_\iota^k & \mapsto e_\iota^{k-1} \quad (2 \leq k \leq \kappa(\iota)) \end{cases}$$

により定義する. ここで, σ_1 は $\{\iota \in \mathcal{K}(n) \mid \kappa(\iota) \geq 1\}$ の置換になっているため, $e_{\sigma_1(\iota)}^1$ は well-defined になっていることに注意する. 写像 r_τ は, 鏡映変換 $\rho_1, \dots, \rho_{N-1}$ により生成される W_N の部分群 $\langle \rho_1, \dots, \rho_{N-1} \rangle$ の元になっている. 一方, $1 \leq j \leq n$ に対して, 写像 $q_j : \mathbb{Z}^\tau \rightarrow \mathbb{Z}^\tau$ を

$$q_j : \begin{cases} e_0 & \mapsto 2e_0 - \sum_{\ell=1}^3 e_{\sigma_0(j, \ell)}^1 \\ e_{\sigma_0(j, \ell_1)}^1 & \mapsto e_0 - e_{\sigma_0(j, \ell_2)}^1 - e_{\sigma_0(j, \ell_3)}^1 \quad (\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \{1, 2, 3\}) \\ e_\iota^k & \mapsto e_\iota^k \quad (\text{otherwise}) \end{cases}$$

により定義する. orbit data の定義から, $\ell_1 \neq \ell_2$ に対して, $\sigma_0(j, \ell_1) \neq \sigma_0(j, \ell_2)$ となることがわかる. そのため, 写像 q_j は $\langle \rho_1, \dots, \rho_{N-1} \rangle$ の作用による ρ_0 と共役な元になる.

定義 4.3 orbit data $\tau = (n, \sigma, \kappa)$ に対して, 写像 $w_\tau : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow \mathbb{Z}^{1,N}$ を,

$$w_\tau := r_\tau \circ q_1 \circ \dots \circ q_n : \mathbb{Z}^\tau \cong \mathbb{Z}^{1,N} \hookrightarrow$$

により定義する.

実際 w_τ は W_N の元になっている. さらに, w_τ は (π_τ, F_τ) によって実現されることがわかる. つまり, マーキング $\phi_{\pi_\tau} : \mathbb{Z}^\tau \cong \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow H^2(X_\tau; \mathbb{Z})$ に対して, $\phi_{\pi_\tau} \circ w_\tau = F_\tau^* \circ \phi_{\pi_\tau} : \mathbb{Z}^{1,N} \rightarrow H^2(X_\tau; \mathbb{Z})$ が成り立つのである. ここまでの議論をまとめて命題としておく.

命題 4.4 二次双有理写像の組 $\bar{f}$ を orbit data τ の realization とする. このとき, $N = \sum_{\iota \in \mathcal{K}(n)} \kappa(\iota)$ 点 $\{p_\iota^m \mid \iota \in \mathcal{K}(n), m = \theta_{\iota,0}(k), 1 \leq k \leq \kappa(\iota)\}$ におけるブローアップ $\pi_\tau : X_\tau \rightarrow \mathbb{P}^2$ により, 双有理写像 $f = f_n \circ \dots \circ f_1 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ は自己同型写像 $F_\tau : X_\tau \rightarrow X_\tau$ に持ち上がる. また, w_τ は (π_τ, F_τ) によって実現され, F_τ のエントロピーは $h_{\text{top}}(F_\tau) = \log \lambda(w_\tau) > 0$ によって与えられる.

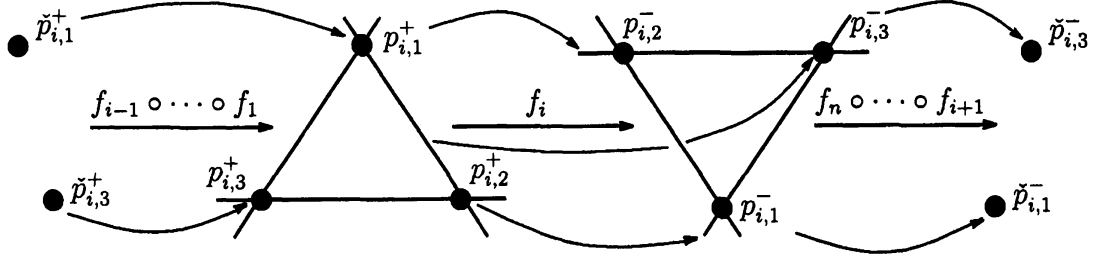


図 5: The points $p_{i,\ell}^+ \in I(f)$ and $p_{i,\ell}^- \in I(f^{-1})$

さらに、次の命題に述べられるように、すべての Weyl 群の元 $w \in W_N$ は、ある orbit data τ を用いて $w = w_\tau$ と表されることもわかる。

命題 4.5 任意の元 $w \in W_N$ に対して、 $\sum_{\iota \in \mathcal{K}(n)} \kappa(\iota) = N$ となる orbit data τ が存在して、適当な同一視 $\{e_j \mid j = 1, \dots, N\} = \{e_i^k \mid i \in \mathcal{K}(n), k = 1, \dots, \kappa(i)\}$ のもとで、 $w = w_\tau$ が成り立つ。

5 Tentative Realizability

前節で述べたように、orbit data τ に対して、その realization $\bar{f}$ が存在すれば、 w_τ を実現する (π_τ, F_τ) を構成できる。そこで realization $\bar{f}$ の存在が問題になる。本節と次節において realization を構成する。本節では、realization の前段階として tentative realization の概念を導入して、次節において tentative realization が実際 realization になるか議論する。

定義 5.1 二次双有理写像の組 $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{Q}(C)^n$ が orbit data $\tau = (n, \sigma, \kappa)$ の tentative realization とは、すべての $\iota \in \mathcal{K}(n)$ に対して、 $p_{i,\iota}^{\mu(\iota)} \approx p_{\sigma(\iota)}^+$ が成り立つことである。

$\bar{f}$ が τ の realization となるには、関係式 $p_{i,\iota}^{\mu(\iota)} \approx p_{\sigma(\iota)}^+$ が等式 $p_{i,\iota}^{\mu(\iota)} = p_{\sigma(\iota)}^+$ になる必要があるが、まずは tentative realization を構成する。そのため、 $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{Q}(C)^n$ に対して、 $f_i^{\pm 1}$ の不確定点集合を $I(f_i^{\pm 1}) = \{p_{i,1}^\pm, p_{i,2}^\pm, p_{i,3}^\pm\}$ とおき、さらに、

$$\check{p}_{i,j}^+ := f_1^{-1}|_C \circ \dots \circ f_{i-1}^{-1}|_C(p_{i,j}^+), \quad \check{p}_{i,j}^- := f_n|_C \circ \dots \circ f_{i+1}|_C(p_{i,j}^-)$$

とおく (図 5 参照)。このとき、合成 $f = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ について、 $I(f^{\pm 1}) \subset \{\check{p}_{i,j}^\pm \mid (i,j) \in \mathcal{K}(n)\}$ が成り立つことがわかる。また、 $\bar{f}$ の determinant を $\delta(\bar{f}) = \prod_{i=1}^n \delta(f_i)$ 、言い換えると、 $\delta(\bar{f}) = \delta(f)$ で定義する。すると、補題 3.1 を用いて次の命題が得られる。

命題 5.2 $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{Q}(C)^n$ に対して、 $d = \delta(\bar{f}) \neq 1$ を仮定する。このとき、

$$v_{i,1} + v_{i,2} + v_{i,3} = - \sum_{k=1}^{i-1} s_k + (d-2) \cdot s_i - d \sum_{k=i+1}^n s_k, \quad (1 \leq i \leq n) \quad (5)$$

を満たす $v = (v_i)_{i \in \mathcal{K}(n)} \in \mathbb{C}^{3n}$ と $s = (s_i)_{i=1}^n \in (\mathbb{C}^\times)^n$ の組 (v, s) が唯一存在して、

$$k(s) := \sum_{k=1}^n s_k,$$

$$v_{i,j}^+ := \frac{1}{d} \{v_{i,j} - (d-1) \cdot s_i\}, \quad v_{i,j}^- := v_{i,j}$$

とおくと、次の (1), (2) が成り立つ.

$$(1) f|_{C^*} : C^* \ni [t + \frac{1}{3}k(s) : (t + \frac{1}{3}k(s))^3 : 1] \mapsto [d \cdot t + \frac{1}{3}k(s) : (d \cdot t + \frac{1}{3}k(s))^3 : 1] \in C^*.$$

(2) $m = 1, \dots, n$ に対して次が成り立つ.

Case 1 $v_{m,i} \neq v_{m,j}$, ($i \neq j \in \{1, 2, 3\}$) の場合:

$$\cdot \check{p}_{m,\ell}^\pm = [v_{m,\ell}^\pm + \frac{1}{3}k(s) : (v_{m,\ell}^\pm + \frac{1}{3}k(s))^3 : 1] \in C^*, (\ell \in \{1, 2, 3\}).$$

Case 2 $v_{m,i} = v_{m,j} \neq v_{m,k}$, ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) の場合:

$$\begin{cases} \cdot \check{p}_{m,\ell}^\pm = [v_{m,\ell}^\pm + \frac{1}{3}k(s) : (v_{m,\ell}^\pm + \frac{1}{3}k(s))^3 : 1] \in C^*, (\ell \in \{i, k\}), \\ \cdot \check{p}_{m,j}^\pm : \check{p}_{m,i}^\pm \text{ の first infinitely near point.} \end{cases}$$

Case 3 $v_{m,i} = v_{m,j} = v_{m,k}$, ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) の場合:

$$\begin{cases} \cdot \check{p}_{m,i}^\pm = [v_{m,i}^\pm + \frac{1}{3}k(s) : (v_{m,i}^\pm + \frac{1}{3}k(s))^3 : 1] \in C^*, \\ \cdot \check{p}_{m,j}^\pm(\check{p}_{m,k}^\pm) : \check{p}_{m,i}^\pm \text{ の first (second) infinitely near point.} \end{cases}$$

逆に、式 (5) を満たす任意の $(d, v, s) \in (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{C}^{3n} \times (\mathbb{C}^\times)^n$ に対して、上記 (1), (2) を満たす $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{Q}(C)^n$ が存在する. さらに、 (d, v, s) に対して $\bar{f}$ は次の意味で一意的に定まる: もし、 $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ と $\bar{f}' = (f'_1, \dots, f'_n)$ が (d, v, s) によって定まると仮定すると、ある $B(C)$ 内の線形写像 $g_1, \dots, g_{n-1}$ が存在して、次が可換になる:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}_0^2 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{P}_1^2 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_{n-1}} & \mathbb{P}_{n-1}^2 \xrightarrow{f_n} \mathbb{P}_n^2 \\ \parallel & & g_1 \downarrow & & & & g_{n-1} \downarrow & \parallel \\ \mathbb{P}_0^2 & \xrightarrow{f'_1} & \mathbb{P}_1^2 & \xrightarrow{f'_2} & \dots & \xrightarrow{f'_{n-1}} & \mathbb{P}_{n-1}^2 \xrightarrow{f'_n} \mathbb{P}_n^2 \end{array}$$

写像の組 $\bar{f} \in \mathcal{Q}(C)^n$ を τ の tentative realization と仮定すると、任意の $\iota \in \mathcal{K}(n)$ に対して、 $p_{\sigma(\iota)}^{\mu(\iota)} \approx p_{\sigma(\iota)}^+$ が成り立つが、これは $f|_C^{\kappa(\iota)-1}(\check{p}_\iota^-) \approx \check{p}_{\sigma(\iota)}^+$ と同値であることがわかる. ここで、命題 5.2 の記号を用いると、 $d^{\kappa(\iota)-1}v_\iota = v_{\sigma(\iota)}^+$ が成り立ち、さらに関係式 $v_\iota^+ = \{v_\iota - (d-1) \cdot s_{\iota_1}\}/d$ より、

$$v_{\sigma(\iota)} = d^{\kappa(\iota)} \cdot v_\iota + (d-1) \cdot s_{\sigma(\iota)_1} \quad (\iota \in \mathcal{K}(n)) \quad (6)$$

が成り立つ. 逆に、方程式 (5), (6) を満たす $(d, v, s) \in (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}) \times \mathbb{C}^{3n} \times (\mathbb{C}^\times)^n$ が存在すると、命題 5.2 より τ の tentative realization $\bar{f} \in \mathcal{Q}(C)^n$ が存在する. そこで、方程式 (5), (6) を満たす解の存在が問題となる. この問題については、Weyl 群の元の固有値と深い関わりがある.

Weyl 群の元 $w \in W_N$ をとる. このとき、 w の特性多項式 $\chi_w(t)$ は、

$$\chi_w(t) = \begin{cases} R_w(t) & (\lambda(w) = 1) \\ R_w(t)S_w(t) & (\lambda(w) > 1) \end{cases}$$

と表されることが知られている. ただし、 $R_w(t)$ は円分多項式の積であり、 $S_w(t)$ は Salem 多項式である. ここで、多項式 $f \in \mathbb{Z}[t]$ が Salem 多項式であるとは、次を満たす既約でモニックな整数係数の多項式である: (1) ある $\delta > 1$ が存在して $f(\delta) = f(\delta^{-1}) = 0$, (2) $\delta^{\pm 1}$ 以外の f の根

はすべて絶対値が1である。Salem 多項式 f の根 $\delta > 1$ を Salem 数とよぶ。もし、 $w \in W_N$ が $\lambda(w) > 1$ を満たし、 d が Salem 多項式 $S_w(t)$ の根であるならば、 w の固有値 d に対応する固有ベクトルは定数倍を除いて一意である。また、 $|d| > 1$ となる w の固有値は唯一であり、それは Salem 数 $d = \lambda(w) > 1$ となる。

orbit data τ に対する方程式 (5), (6) の解は、 w_τ の固有ベクトルを用いて表される。

命題 5.3 orbit data τ を固定して、 $d \neq 0$ を1の冪根でないと仮定する。このとき、

$$v_0 \cdot e_0 + \sum v_i^k \cdot e_i^k \in \mathbb{Z}^\tau \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

が、 d に対応する w_τ の固有ベクトルとなるための必要十分条件は、方程式 (5), (6) を満たす $(v, s) \in (\mathbb{C}^{3n} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ が存在して、次が成立することである：

- (1) $v_i^k = d^{k-1} \cdot v_i$ がすべての $i \in K(n)$ と $1 \leq k \leq \kappa(i)$ について成り立つ。
- (2) $v_0 = k(s)$ 。

命題 5.3 から、1の冪根でない $d \neq 0$ に対して、 $(v, s) \in (\mathbb{C}^{3n} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ が方程式 (5), (6) を満たせば、 d は Salem 多項式 $S_{w_\tau}(t)$ の根でなくてはならない。逆に、 d が $S_{w_\tau}(t)$ の根であれば、 d に対応する w_τ の固有ベクトルが (定数倍を除いて) 一意に存在するため、方程式 (5), (6) を満たす (v, s) が一意に存在することがわかる。さらに、 $s \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ が $s \in (\mathbb{C}^\times)^n$ となる場合、命題 5.2 より τ の tentative realization $\bar{f} \in \mathcal{Q}(C)^n$ が存在する。ここまでの議論をまとめておく。

定理 5.4 orbit data τ は $\lambda(w_\tau) > 1$ を満たすと仮定し、 d を $S_{w_\tau}(t)$ の根とする。このとき、方程式 (5), (6) の唯一の解 $s \neq 0$ が $s \in (\mathbb{C}^\times)^n$ となるための必要十分条件は、 $\delta(\bar{f}) = d$ となる τ の tentative realization $\bar{f} \in \mathcal{Q}(C)^n$ が存在することである。また、 $\bar{f}$ は次の意味で一意に決まる：もし、 $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ と $\bar{f}' = (f'_1, \dots, f'_n)$ が $\delta(\bar{f}) = \delta(\bar{f}') = d$ となる τ の tentative realization であると仮定すると、ある $B(C)$ 内の線形写像 $g_1, \dots, g_n$ が存在して、次が可換になる：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}_0^2 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{P}_1^2 & \xrightarrow{f_2} & \dots & \xrightarrow{f_{n-1}} & \mathbb{P}_{n-1}^2 & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{P}_n^2 \\ g_0 \downarrow & & g_1 \downarrow & & & & g_{n-1} \downarrow & & g_n \downarrow \\ \mathbb{P}_0^2 & \xrightarrow{f'_1} & \mathbb{P}_1^2 & \xrightarrow{f'_2} & \dots & \xrightarrow{f'_{n-1}} & \mathbb{P}_{n-1}^2 & \xrightarrow{f'_n} & \mathbb{P}_n^2 \end{array}$$

ただし、 $g_0 := g_n$ である。

定理 5.4 において、 $s \neq 0$ が $s \in (\mathbb{C}^\times)^n$ となるかどうかは、Weyl 群のルートが周期的か否かで判定できる。今、ルート

$$\alpha_j^c := q_n \circ \dots \circ q_{j+1}(e_0 - e_{\sigma_0(j,1)}^1 - e_{\sigma_0(j,2)}^1 - e_{\sigma_0(j,3)}^1) \in \Phi_N$$

の集合として

$$\Gamma_\tau^{(1)} := \{\alpha_j^c \mid j = 1, \dots, n\} \subset \Phi_N$$

とおく。さらに、 ℓ_τ を円分多項式 $R_{w_\tau}(t) = 0$ の根 x に対して $x^{\ell_\tau} = 1$ となる最小の整数として、

$$P(\tau) := \{\alpha \in \Phi_N \mid w_\tau^{\ell_\tau}(\alpha) = \alpha\}$$

とおく。

命題 5.5 orbit data τ は $\lambda(w_\tau) > 1$ を満たすと仮定し, d を $S_{w_\tau}(t)$ の根, $s \neq 0$ を方程式 (5), (6) の唯一の解とする. このとき, $s_j = 0$ となる必要十分条件は, $\alpha_j^c \in P(\tau)$ となることである. 特に, $\delta(\bar{f}) = d$ となる τ の tentative realization $\bar{f} \in \mathcal{Q}(C)^n$ が存在するための必要十分条件は,

$$\Gamma_\tau^{(1)} \cap P(\tau) = \emptyset \quad (7)$$

が成り立つことである.

また, 方程式 (5), (6) を考察すれば, 条件 (7) が成り立たない場合でも, 同じスペクトル半径をもち条件 (7) を満たす orbit data に取り換えられることがわかる.

命題 5.6 $\lambda(w_\tau) > 1$ を満たす orbit data τ に対して, $\lambda(w_\tau) = \lambda(w_{\tilde{\tau}})$ かつ条件 (7) を満たす orbit data $\tilde{\tau} = (\tilde{n}, \tilde{\sigma}, \tilde{\kappa})$ が存在する.

6 Realizability

前節では, orbit data τ の tentative realization $\bar{f} \in \mathcal{Q}(C)^n$ を構成した. $\bar{f}$ は, すべての $\iota \in \mathcal{K}(n)$ に対して, 関係式 $p_\iota^{\mu(\iota)} \approx p_{\sigma(\iota)}^+$ を満たすものであった. しかし, 一般に等式 $p_\iota^{\mu(\iota)} = p_{\sigma(\iota)}^+$ は成り立たない. 次の補題を述べた後に, realization にならない例をあげる. そのため, $\iota = (\iota_1, \iota_2), \iota' = (\iota'_1, \iota'_2) \in \mathcal{K}(n)$ に対して, ルート

$$\alpha_{\iota, \iota'}^k := q_n \circ \cdots \circ q_{\iota'_1+1}(e_{\sigma_0(\iota)}^{k+1} - e_{\sigma_0(\iota')}^1) \in \Phi_N$$

を定義しておく.

補題 6.1 orbit data τ は $\lambda(w_\tau) > 1$ および条件 (7) を満たすと仮定し, $\bar{f}$ を命題 5.5 で述べた τ の tentative realization とする. このとき, $\alpha_{\iota, \iota'}^k \in P(\tau)$ となるための必要十分条件は, $p_\iota^m \approx p_{\iota'}^m$ となることである. ただし, $m = \theta_{\iota_1, \iota'_1}(k) \geq 0$ であり, $\theta_{\iota, \iota'}(k)$ は (3) で与えられる. さらに, これは $d^k \cdot b_\iota = b_{\iota'}$ と同値である.

例 6.2 orbit data $\tau = (2, \sigma, \kappa)$ を

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma : (1, 1) \mapsto (1, 2) \mapsto (2, 2) \mapsto (2, 1) \mapsto (1, 1), \quad (1, 3) \mapsto (2, 3) \mapsto (1, 3) \\ \kappa(1, 1) = \kappa(2, 2) = 4, \quad \kappa(1, 2) = \kappa(1, 3) = 0, \quad \kappa(2, 1) = 1, \quad \kappa(2, 3) = 3 \\ \mu(1, 1) = \mu(2, 2) = 7, \quad \mu(1, 2) = \mu(1, 3) = 0, \quad \mu(2, 1) = 2, \quad \mu(2, 3) = 4 \end{array} \right.$$

とする. このとき, τ に対する方程式 (5), (6) を解くと, $d \approx 1.582$ (d は方程式 $t^6 - t^4 - 2t^3 - t^2 + 1 = 0$ の $|t| > 1$ における唯一の根), $s = (s_1, s_2) \approx (1, -6.269)$, $b_{1,1} = b_{2,2} = 1$, $b_{1,2} \approx 7.269$, $b_{1,3} \approx 8.048$, $b_{2,1} = 0$, $b_{2,3} \approx 1.779$ となる. 特に $\lambda(w_\tau) = d \approx 1.582$ である. 定理 5.4 より, τ の tentative realization $\bar{f} \in \mathcal{Q}(C)^2$ が存在する ($b_{m,i} \neq b_{m,j}$ ($i \neq j$) より, 写像 $f_1^{\pm 1}, f_2^{\pm 1}$ の不確定点はすべて $\mathbb{P}^2$ 上の proper point である). しかし, $\bar{f}$ は τ の realization になっていない. 実際, $b_{1,1} = b_{2,2}$ と補題 6.1 より, $p_{1,1}^1 \approx p_{2,2}^1$ となるが, これは $p_{1,1}^-$ が f_2 の例外因子上にあり, $p_{1,1}^1 = f_2(p_{1,1}^-)$ は $p_{2,2}^-$ の first infinitely near point になることを意味する (図 6 参照. 図において, $m = \theta_{\iota_1, \iota'_1}(k) = 1$ である). すると, $1 \leq \ell \leq \mu(1, 1)$ に対して, $p_{1,1}^\ell$ は $p_{2,2}^{\ell-1}$ の first infinitely near point となっている. 一方, $p_{1,1}^{\mu(1,1)} \approx p_{\sigma(1,1)}^+ = p_{1,2}^+$ であるが, $p_{1,2}^+$ は proper point であるた

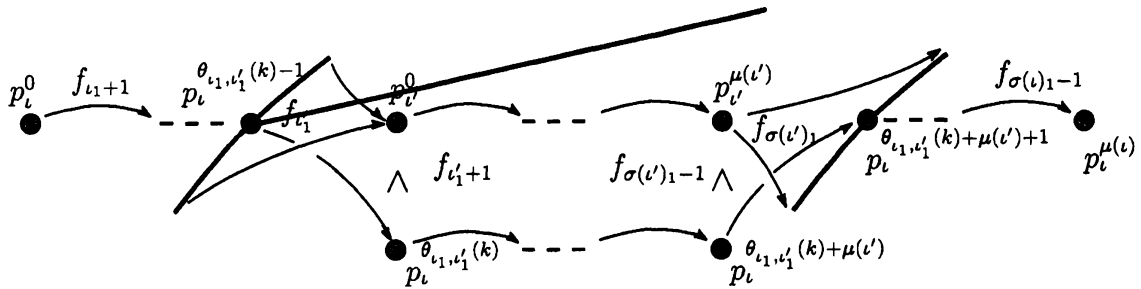


図 6: 不確定点の推移

め, $p_{1,1}^{\mu(1,1)} \neq p_{1,2}^+$, $p_{2,2}^{\mu(1,1)-1} = p_{1,2}^+$ となる. このことから, $\bar{f}$ が τ の realization でないことがわかる. ちなみに, $\bar{\tau} = (2, \bar{\sigma}, \kappa)$,

$$\bar{\sigma} : (1, \ell) \mapsto (2, \ell) \mapsto (1, \ell), \quad (\ell \in \{1, 2, 3\})$$

とにおいて, 方程式 (5), (6) を解くと, τ に対する解と等しく, さらに $\bar{f}$ は $\bar{\tau}$ の realization となっている. 特に, $\lambda(w_{\bar{\tau}}) = \lambda(w_{\tau}) > 1$ である. この議論から, $m = \theta_{l_1, l'_1}(k) > 0$ かつ $\mu(l) < m + \mu(l')$ となる $\alpha_{l, l'}^k \in P(\tau)$ が存在してはならないことがわかる (図 6 参照).

例 6.3 orbit data $\tau = (1, \sigma, \kappa)$ を

$$\begin{cases} \sigma : (1, 1) \mapsto (1, 2) \mapsto (1, 1), & (1, 3) \mapsto (1, 3) \\ \kappa(1, 1) = \kappa(1, 2) = 4, & \kappa(1, 3) = 3 \end{cases}$$

とする. このとき, τ に対する方程式 (5), (6) を解くと, $d \approx 1.582$ (d は方程式 $t^6 - t^4 - 2t^3 - t^2 + 1 = 0$ の $|t| > 1$ における唯一の根), $s_1 = 1$, $b_{1,1} = b_{1,2} \approx -0.190$, $b_{1,3} \approx -0.338$ となる. 特に $\lambda(w_{\tau}) = d \approx 1.582$ である. これより, τ の tentative realization $\bar{f} = (f_1) \in \mathcal{Q}(C)$ は, $p_{1,1}^{\pm} \approx p_{1,2}^{\pm}$ となっている. もし, $p_{1,2}^{\pm}$ が $p_{1,1}^{\pm}$ の first infinitely near point であると仮定すると, $0 \leq \ell \leq 3$ に対して, $p_{1,2}^{\ell}$ は $p_{1,1}^{\ell}$ の first infinitely near point である. 一方, $p_{1,1}^3 \approx p_{1,2}^3 \approx p_{1,1}^+ \approx p_{1,2}^+$ であるが, $p_{1,2}^+$ も $p_{1,1}^+$ の first infinitely near point であるため, $p_{1,1}^3 = p_{1,1}^+$, $p_{1,2}^3 = p_{1,2}^+$ となってしまう. $p_{1,1}^{\pm}$ が $p_{1,2}^{\pm}$ の first infinitely near point であると仮定しても同様である. つまり, $\bar{f}$ は τ の realization にはならないことがわかる. ちなみに, $\bar{\tau} = (1, \bar{\sigma}, \kappa)$,

$$\bar{\sigma} : (1, \ell) \mapsto (1, \ell), \quad (\ell \in \{1, 2, 3\}),$$

とにおいて, 方程式 (5), (6) を解くと, τ に対する解と等しく, さらに $\bar{f}$ は $\bar{\tau}$ の realization となっている. 特に, $\lambda(w_{\bar{\tau}}) = \lambda(w_{\tau}) > 1$ である. この議論から, $\mu(1, i) = \mu(1, j)$ ($i \neq j$) かつ $(1, j) = \sigma(1, i)$ となる $\alpha_{(1,i),(1,j)}^0 \in P(\tau)$ が存在してはならないことがわかる.

これらの例を踏まえて,

$$\Gamma_{\tau}^{(2)} \subset \{\alpha_{l, l'}^k \mid l = (l_1, l_2), l' = (l'_1, l'_2) \in \mathcal{K}(n), 0 \leq \theta_{l_1, l'_1}(k) \leq \mu(l)\} \subset \Phi_N$$

を, 次のいずれかが成り立つルート $\alpha_{l, l'}^k$ の集合とする:

- (1) $\theta_{l_1, l'_1}(k) > 0$, かつ, ある $m \geq 0$ について, $\mu(\sigma^{\ell}(l)) = \mu(\sigma^{\ell}(l')) + \delta_{\ell, 0} \cdot \theta_{l_1, l'_1}(k)$ ($0 \leq \ell < m$) および, $\mu(\sigma^m(l)) < \mu(\sigma^m(l')) + \delta_{m, 0} \cdot \theta_{l_1, l'_1}(k)$ が成り立つ. ただし, $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである.

- (2) $\iota \neq \iota'$, $\iota_1 = \iota'_1$, かつ, $\mu(\sigma^\ell(\iota)) = \mu(\sigma^\ell(\iota'))$ ($\ell \geq 0$) および, ある $m \geq 0$ について $\iota' = \sigma^m(\iota)$ が成り立つ.

このとき, 次の定理が成り立つ.

命題 6.4 orbit data τ は $\lambda(w_\tau) > 1$ および条件 (7) を満たすと仮定し, $\bar{f}$ を命題 5.5 で述べた τ の tentative realization とする. このとき, $\bar{f}$ が τ の realization となるための必要十分条件は, 条件

$$\Gamma_\tau^{(2)} \cap P(\tau) = \emptyset \quad (8)$$

を満たすことである.

さらに, Example 6.2, 6.3 での議論と同様に, 条件 (8) を満たさない場合でも, 同じスペクトル半径をもつ orbit data で条件 (8) を満たすものが存在することがわかる.

命題 6.5 orbit data τ は $\lambda(w_\tau) > 1$ および条件 (7) を満たすと仮定し, $\bar{f}$ を命題 5.5 で述べた τ の tentative realization とする. このとき, $\lambda(w_\tau) = \lambda(w_{\bar{\tau}})$ となる orbit data $\bar{\tau}$ であって, $\bar{f}$ が $\bar{\tau}$ の realization となるものが存在する. 特に, $\bar{\tau}$ は条件 (8) を満たす.

7 主結果

ルート系 Φ_N の有限部分集合

$$\Gamma_\tau := \Gamma_\tau^{(1)} \cup \Gamma_\tau^{(2)} \subset \Phi_N$$

を用いて, 命題 5.5 と命題 6.4 をまとめておく.

定理 7.1 orbit data τ は, $\lambda(w_\tau) > 1$, および条件

$$\Gamma_\tau \cap P(\tau) = \emptyset \quad (9)$$

を満たすと仮定する. また, d を $S_{w_\tau}(t) = 0$ の根とする. このとき, $\delta(\bar{f}_\tau) = d$ となる τ の realization $\bar{f}_\tau = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{Q}(C)^n$ が一意的に存在する. さらに, C^* 上の $N = \sum \kappa(\iota)$ 点ブローアップ $\pi_\tau : X_\tau \rightarrow \mathbb{P}^2$ が自然に定まり, π_τ は, 合成 $f_\tau := f_n \circ \dots \circ f_1$ を自己同型写像 $F_\tau : X_\tau \rightarrow X_\tau$ に持ち上げる:

$$\begin{array}{ccc} X_\tau & \xrightarrow{F_\tau} & X_\tau \\ \pi_\tau \downarrow & & \downarrow \pi_\tau \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f_\tau} & \mathbb{P}^2. \end{array}$$

最後に, (π_τ, F_τ) は w_τ を実現し, F_τ のエントロピーは $h_{\text{top}}(F_\tau) = \log \lambda(w_\tau) > 0$ となる.

条件 (9) を実現可能条件とよぶことにする. さらに, 命題 5.6 と命題 6.5 を用いると, orbit data τ が実現可能条件を満たさない場合でも, スペクトル半径が同じで実現可能条件を満たす別の orbit data $\bar{\tau}$ が存在することがわかる.

定理 7.2 任意の $\lambda(w_\tau) > 1$ を満たす orbit data τ に対して, $\lambda(w_{\bar{\tau}}) = \lambda(w_\tau)$ かつ実現可能条件 (9) を満たす orbit data $\bar{\tau}$ が存在する.

命題 2.5 を用いると, 有理曲面上の自己同型写像 $F : X \rightarrow X$ のエントロピーは, ある $\lambda \in \Lambda$ を用いて $h_{\text{top}}(F) = \log \lambda$ と表されるが, 定理 7.2 と命題 4.5 を用いるとこの逆も成立する.

系 7.3 任意の元 $\lambda \in \Lambda$ に対して, $h_{\text{top}}(F) = \log \lambda$ となる有理曲面上の自己同型写像 $F : X \rightarrow X$ が存在する. 特に,

$$\{h_{\text{top}}(F) \mid F : X \rightarrow X : \text{有理曲面上の自己同型写像}\} = \{\log \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

が成立する.

さらに, 実現可能条件 (9) が成立するための十分条件を与えて, エントロピーの精密な評価を与えることもできる.

定理 7.4 orbit data $\tau = (n, \sigma, \kappa)$ は次の条件を満たすと仮定する:

- (1) $n \geq 2$,
- (2) 任意の $\iota \in \mathcal{K}(n)$ に対して, $\kappa(\iota) \geq 3$,
- (3) もし, $\iota \neq \iota'$ が, 任意の $m \geq 0$ について, $\sigma^m(\iota)_1 = \sigma^m(\iota')_1$ および $\kappa(\sigma^m(\iota)) = \kappa(\sigma^m(\iota'))$ を満たせば, 任意の $m \geq 0$ について, $\iota' \neq \sigma^m(\iota)$ が成立する.

このとき, orbit data τ は実現可能条件 (9), および, $2^n - 1 < \lambda(w_\tau) < 2^n$ を満たす. 特に, 自己同型写像 F_τ のエントロピーについて, 不等式 $\log(2^n - 1) < h_{\text{top}}(F_\tau) < \log 2^n$ が成り立つ.

この定理から, ほとんどすべての orbit data が実現可能条件を満たすことがわかる. 定理 7.4 では $n \geq 2$ を仮定したが, Diller [3] は, 二次双有理写像を単体で考えることで, orbit data $\hat{\tau} = (1, \hat{\sigma}, \hat{\kappa})$ を実現する自己同型写像 $F_{\hat{\tau}}$ を構成している. 一方, 定理 7.4 の仮定を満たす orbit data τ であって, 得られた写像 F_τ が Diller の構成した写像 $F_{\hat{\tau}}$ の合成とは共役にならない例もみつかった ([7] 参照).

実現可能条件については, McMullen [4] も次の結果を得ている. すなわち, $w \in W_N$ のスペクトル半径は正 $\lambda(w) > 1$ であって, $w^k(\alpha) \neq \alpha$ がすべての $\alpha \in \Phi_N$ と $k \geq 1$ について成り立てば, w はある (π, F) によって実現される. しかし, この判定条件は Φ_N が無限集合であるため判断が難しい. 一方, 命題 4.5 を用いて $w = w_\tau$ となる orbit data τ を固定すると, Γ_τ は有限集合であるため, 定理 7.1 における実現可能条件 (9) は検証が可能である. さらに, McMullen の実現可能条件は満たさないが, 条件 (9) を満たす例もみつかった ([7] 参照).

8 Siegel 円板

最後に, 有理曲面上の自己同型写像の Siegel 円板について述べる.

定義 8.1 S を複素曲面とし, $F : S \rightarrow S$ を自己同型写像とする.

- (1) 2つの複素数 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^\times$ が乗法的独立であるとは, $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$ に対して関係式 $\xi_1^{i_1} \cdot \xi_2^{i_2} = 1$ を満たせば, $(i_1, i_2) = (0, 0)$ となることである.

- (2) 線形写像 $R: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ が無理数回転であるとは、乗法的独立な単位円周上の複素数 $\xi_1, \xi_2 \in \{|z|=1\}$ を用いて、 $R: (z_1, z_2) \mapsto (\xi_1 z_1, \xi_2 z_2)$ と表されることである。
- (3) S 内の開集合 $U \subset S$ が F の Siegel 円板であるとは、 $F(U) = U$ かつ、 $F|_U$ が無理数回転 $R|_{\{|z|<1\}}^2$ と解析的共役となることである。

興味があるのは、エントロピー正で Siegel 円板をもつ自己同型写像 $F: S \rightarrow S$ である。導入でも述べたように、エントロピー正の自己同型写像 $F: S \rightarrow S$ を許容する複素曲面 S は、本質的に、トーラス、K3 曲面、そして有理曲面に限られる。複素曲面 S がトーラスの場合は Siegel 円板が存在しないことが知られており、さらに、 S が K3 曲面の場合、Siegel 円板が存在すれば必然的に S が非射影的になってしまうことが知られている ([4] 参照)。そこで、有理曲面上での Siegel 円板の構成が問題になる。しかし、有理曲面上の Siegel 円板は、McMullen や Bedford-Kim によって限られた写像でみつまっているのみである ([1, 4] 参照)。特に、Siegel 円板をもち、既約な反標準曲線を保存する自己同型写像はみつかっていない。そこで、次の問題を提起して終えることにする。

問題 8.2 定理 7.1 において得られる自己同型写像の中で Siegel 円板をもつものは、どれくらい存在するか？さらに、複数個の Siegel 円板をもつ自己同型写像は存在するか？

参考文献

- [1] E. Bedford and K. Kim, *Dynamics of rational surface automorphisms: linear fractional recurrences*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 3, 553–583.
- [2] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), no. 10, 901–906.
- [3] J. Diller, *Cremona transformations, surface automorphisms and the group law*, , arXiv:0811.3038v1.
- [4] C. McMullen, *Dynamics on blowups of the projective plane*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **105** (2007), 49–89.
- [5] M. Nagata, *On rational surfaces. I. Irreducible curves of arithmetic genus 0 or 1*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **32** (1960), 351–370.
- [6] M. Nagata, *On rational surfaces. II*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. **33** (1961), 271–293.
- [7] T. Uehara, *Rational surface automorphisms with positive entropy*, arXiv:1009.2143 [math.DS] 11 Sep 2010, 38 pages.