

## 平衡プラズマの形状に関する分岐現象の数値解析

筑波大学・電子情報工学系 今井 仁司(Hitoshi IMAI)

千葉大学・工学部 河原田 秀夫(Hideo KAWARADA)

### 1. 序

自由境界問題を解くのにホドグラフ変換を用いて固定境界問題に直して解く方法がしばしば有効である。以下図1の様な $z$ 方向に一様な表面電流を持つプラズマ平衡のモデルを考える。そして図の様な1塊プラズマと2塊プラズマを考える。ここで、プラズマが対称、非対称であるとは、自由境界 $\gamma$ が $y$ 軸に関して対称、非対称であることをいう。このプラズマ平衡の問題は自由境界問題であり、ホドグラフ変換を用いて、1塊の対称、非対称プラズマの分岐と2塊対称プラズマ解の存在領域が既に計算されている[1-4]。そこで用いられているホドグラフ変換は単に問題を自由境界問題から固定境界問題に直すだけでなく、分岐図を書くのに適切な空間を自然に導入する。従って、元の問題を直接数値計算することよりより系統的な分岐の解析を可能にする。また、固定境界問題に直ったことにより厳密解が求まるために精度の良い数値計算も可能にする。

本報告では、2塊非対称プラズマ解の存在領域を数値計算をして、1塊と2塊のプラズマの総合的な分岐現象を明らかにすることが目的である。いまの場合、これまでに用いられてきたホドグラフ変換以外にある等角写像を導入することが必要になる。図1の2塊非対称プラズマに対応する問題はつぎのようになる。

問題 1

つぎを満たす曲線  $\gamma_2$  と関数  $u(x, y)$  を求めよ;

$$(1.1) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_{\gamma_2, a},$$

$$(1.2) \quad u = 0 \quad \text{on } \gamma_2,$$

$$(1.3) \quad u = \kappa \quad \text{on } \Gamma a,$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{4}{l_{\gamma_2}} \quad \text{on } \gamma_2.$$

ここで、 $\Delta$  はラプラス作用素であり、 $\kappa$  は与えられた正定数である。正の実数  $l_{\gamma_2}$  は境界  $\gamma_2$  の長さである。領域  $\Omega_{\gamma_2, a}$  は境界  $\Gamma a$  と  $\gamma_2$  ではさまれた領域である。ベクトル  $\nu$  は境界  $\gamma_2$  上の単位内法線ベクトルである。境界  $\Gamma a$  は図 1 の様に  $a(1/2 < a \leq 1)$  でパラメトライズされた固定境界であり、区分的に滑らかで  $x$  軸  $y$  軸対称であるとする。境界  $\gamma_2$  は自由境界で固定境界  $\Gamma a$  の内側にあり、 $x$  軸対称であるとする。

この問題の分岐パラメータは  $a$  と  $\kappa$  である。

2. 無限級数による厳密解の構成

領域  $\Omega_{\gamma_2, a}$  を  $\Omega_{\gamma_2, a}$  の  $y > 0$  である部分とする。問題の対称性から  $\Omega_{\gamma_2, a}$  で考えれば十分である。

文献[1-4]に従ってつぎのホドグラフ変換を考える。問題 1 の解  $u(x, y)$  に調和共役な関数  $v(x, y)$  を図 1 の辺  $AB$  上で  $v = 0$  となるようにとり、

$$(2.1) \quad w(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z = x + i y$$

とおく。そして、関数  $A(u, v)$  と  $B(u, v)$  を

$$(2.2) \quad \frac{dz}{dw} = e^{A(u, v) + i B(u, v)}$$

で定義すると、(1.4) から

$$(2.3) \quad A(0, v) = \text{const} = A_0,$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} V_{FG} &= V_{AB} + \int_{\gamma_{2, AJ} + \gamma_{2, HG}} \frac{\partial v}{\partial l} dl = \int_{\gamma_{2, AJ} + \gamma_{2, HG}} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\ell \\ &= \frac{4}{\ell} \frac{\ell}{\gamma_2} \frac{\gamma_2}{2} = 2. \end{aligned}$$

ここでパラメータ  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varepsilon, \delta$  を図 1 にある様に導入する。それらは  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < 2, 0 < \varepsilon < 2, 0 < \delta < \kappa$  を満たしていなければならない。

関数  $w(z)$  は可逆で、 $\omega_{\gamma_{2, a}}$  から長方形領域  $G_2 = \{(u, v); 0 < u < \kappa, 0 < v < 2,$

$u \notin [0, \delta] \text{ if } v = \varepsilon\}$  への等角写像となっているのは明らかである。ここで、 $\delta = 0$  なら問題は 1 塊プラズマのときと同じになることから、パラメータ  $\delta$  が 2 塊プラズマの特徴的なものであることがわかる。もし写像関数  $A(u, v)$  と  $B(u, v)$  を見つけることができれば問題 1 が解けたことになる。関数  $A(u, v)$  は  $B(u, v)$  に調和共役であるために  $A_0$  と  $B(u, v)$  を求めればよい。(2.3) から、

$$(2.5) \quad \frac{\partial B}{\partial u}(0, v) = 0, \quad 0 < v < \varepsilon, \quad \varepsilon < v < 2.$$

逆に、(2.4) と (2.5) から (1.4) がでることから、(2.4) と (2.5) が (1.4) に対応することがわかる。

以下の関数を導入する。

$$(2.6) \quad \begin{aligned} I(a, b) &= e^{-A_0} [v(0, b) - v(0, a)] \\ &= \int_a^b \cos B(0, \eta) d\eta, \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad s(v) = \int_0^v \exp [A(\kappa, \eta)] d\eta.$$

ここで、 $s(v)$ は $\Gamma_a$ に沿った長さを表す。数 $A_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varepsilon, \delta$ は

$$(2.8) \quad I(0, \varepsilon) = 0,$$

$$(2.9) \quad I(\varepsilon, 2) = 0,$$

$$(2.10) \quad I(0, v) \geq 0, \quad 0 \leq v \leq \varepsilon, \quad I(\varepsilon, v) \geq 0, \quad \varepsilon \leq v \leq 2,$$

$$(2.11) \quad \overline{BC} = s(\sigma_1) = \overline{EF} = s(2) - s(\sigma_3) = a,$$

$$(2.12) \quad \overline{CD} = s(\sigma_3) - s(\sigma_2) = \overline{DE} = s(\sigma_2) - s(\sigma_1),$$

$$(2.13) \quad \overline{BC} + \overline{CD} = s(\sigma_2) = 1$$

を満足しなくてはならない。

これらの関数を使うと、問題1に対応する固定領域 $G_2$ で定義されたつぎの問題を考えることができる。

### 問題 2.1

つぎを満たすパラメータ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < 2$ ),  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 2$ ),  $\delta$  ( $0 < \delta < \kappa$ )と関数 $B(u, v)$ 、そしてそれに調和共役な $A(u, v)$ を求めよ；

$$(2.14) \quad \Delta B(u, v) = 0 \quad \text{in } G_2,$$

$$(2.15) \quad B \text{ の境界条件は図 3,}$$

$$(2.16) \quad I(0, \varepsilon) = 0,$$

$$(2.17) \quad I(\varepsilon, 2) = 0,$$

$$(2.18) \quad I(0, v) \geq 0, \quad 0 \leq v \leq \varepsilon, \quad I(\varepsilon, v) \geq 0, \quad \varepsilon \leq v \leq 2,$$

$$(2.19) \quad s(2) = 2,$$

$$(2.20) \quad s(\sigma_1) = s(2) - s(\sigma_3) (= a).$$

ここで、 $\kappa$ は与えられた正定数である。（そして $a$ は $\Gamma_a$ を表すパラメータであ

る。)

問題 1 と問題 2.1 における定数  $a$  と  $\kappa$  が同じとき、両問題は等価になる。

領域  $G_2$  にあるスリットのためにいまのままでは問題 2.1 を解いて  $A(u, v)$  と  $B(u, v)$  の具体的な表現を得ることは困難である。そこで新しい直交座標系  $(s, t)$  を導入し、 $A(u, v)$  と  $B(u, v)$  の表現を  $s$  と  $t$  を用いて求めることにする。

領域  $\widetilde{G}_2$  を  $y$  軸対称で、 $u > 0$  では  $G_2$  に一致するようにとる。新しい直交座標系  $(s, t)$  とパラメータ  $\alpha, \tau, \eta_i$  ( $i=0-4$ ) を図 2 にある様に導入する。パラメータは、 $0 < \tau < \alpha, 0 < \eta_i < \eta_j < \alpha$  ( $i < j$ ) を満たしていなければならない。

$$(2.21) \quad r(w) = s(u, v) + i t(u, v), \quad w = u + i v$$

とおいて関数  $r(w)$  を導入し、つぎに関数  $C(s, t)$  と  $D(s, t)$  を

$$(2.22) \quad \frac{dw}{dr} = e^{C(s, t) + i D(s, t)}$$

で定義する。すると関数  $r(w)$  は可逆で、 $\widetilde{G}_2$  から長方形領域  $H = \{(s, t); 0 < s < 1, -\alpha < t < \alpha\}$  への等角写像になっているため、関数  $A(u(s, t), v(s, t))$  と  $B(u(s, t), v(s, t))$  は領域  $H$  でも調和関数である。

つぎの関数を導入する。

$$(2.23) \quad J(s, t) = y(s, t) - y(0, t)$$

$$= \int_0^s \exp[ A(\xi, t) + C(\xi, t) ] \cos[ B(\xi, t) + D(\xi, t) ] d\xi,$$

$$(2.24) \quad s_{CD}(s, t) = \int_0^t \exp[ C(s, \eta) ] d\eta,$$

$$(2.25) \quad s_{CD}^{AB}(s, t) = \int_0^t \exp[ A(s, \eta) + C(s, \eta) ] d\eta.$$

ここで、 $s_{CD}(s, t)$  と  $s_{CD}^{AB}(s, t)$  は  $w$  平面、 $z$  平面における距離を表す。これを使う

と、上で導入されたパラメータ  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\eta_i$  ( $i=0-4$ ) はつぎを満たさなければならぬ。

$$(2.26) \quad J(1,0) = 0,$$

$$(2.27) \quad J(1,\alpha) = 0,$$

$$(2.28) \quad J(s,0) \geq 0, \quad J(s,\alpha) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(2.29) \quad \overline{J^*T^*} = \text{sc}_D(0,\tau) = \overline{H^*T^*} = \text{sc}_D(0,\alpha) - \text{sc}_D(0,\tau) (= \delta),$$

$$(2.30) \quad \overline{E^*G^*} = \text{sc}_D(1,\eta_4) - \text{sc}_D(1,\eta_0) = 2,$$

$$(2.31) \quad \overline{A^*B^*} = \text{sc}_D(1,\eta_0) = \kappa,$$

$$(2.32) \quad \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} = \overset{AB}{\text{sc}_D}(1,\eta_4) - \overset{AB}{\text{sc}_D}(1,\eta_0) = 2,$$

$$(2.33) \quad \overline{BC} = \overset{AB}{\text{sc}_D}(1,\eta_1) - \overset{AB}{\text{sc}_D}(1,\eta_0) = \overline{EF} = \overset{AB}{\text{sc}_D}(1,\eta_4) - \overset{AB}{\text{sc}_D}(1,\eta_3) = a.$$

以上で、領域  $H$  で定義された問題 2.1 に対応するつぎの問題を考えることができる。

## 問題 2.2

つぎを満たすパラメータ  $\alpha$ ,  $\tau$  ( $0 < \tau < \alpha$ ),  $\eta_i$  ( $i=0-4$ ) ( $0 < \eta_i < \eta_j < \alpha$ ,  $i < j$ ) と関数  $B(s,t)$ ,  $D(s,t)$ 、そしてそれに調和共役な関数  $\Lambda(s,t)$  と  $C(s,t)$  を求めよ；

$$(2.34) \quad \Delta D(s,t) = 0, \quad \text{in } H,$$

$$(2.35) \quad D \text{ の境界条件は図 3,}$$

$$(2.36) \quad \text{sc}_D(0,\tau) = \text{sc}_D(0,\alpha) - \text{sc}_D(0,\tau) (= \delta),$$

$$(2.37) \quad \text{sc}_D(1,\eta_4) - \text{sc}_D(1,\eta_0) = 2,$$

$$(2.38) \quad \text{sc}_D(1,\eta_0) = \kappa,$$

$$(2.39) \quad \Delta B(s,t) = 0 \quad \text{in } H,$$

$$(2.40) \quad B \text{ の境界条件は図 3,}$$

$$(2.41) \quad J(1,0) = 0,$$

$$(2.42) \quad J(1,\alpha) = 0,$$

$$(2.43) \quad J(s,0) \geq 0, \quad J(s,\alpha) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(2.44) \quad {}^{AB}sc_D(1, \eta_4) - {}^{AB}sc_D(1, \eta_0) = 2,$$

$$(2.45) \quad {}^{AB}sc_D(1, \eta_1) - {}^{AB}sc_D(1, \eta_0) = {}^{AB}sc_D(1, \eta_4) - {}^{AB}sc_D(1, \eta_3) (= a).$$

問題 2.1 と問題 2.2 における定数  $a$  と  $\kappa$  が同じとき、両問題は等価になる。

問題 2.1 と問題 2.2 におけるパラメータの対応をつぎに示す。

$$(2.46) \quad a = {}^{AB}sc_D(1, \eta_1) - {}^{AB}sc_D(1, \eta_0),$$

$$(2.47) \quad \delta = sc_D(0, \tau),$$

$$(2.48) \quad \varepsilon = sc_D(1, \eta_0),$$

$$(2.49) \quad \sigma_i = sc_D(1, \eta_i) - sc_D(1, \eta_0) \quad (i=1-3).$$

(2.34)-(2.35), (2.39)-(2.40)を解くと  $A(s,t)$ ,  $B(s,t)$ ,  $C(s,t)$ ,  $D(s,t)$  の具体的な表現が得られる。

$$(2.50) \quad A(s,t) = A_0 - \frac{b_1'}{2} t - \sum_{n \geq 1} \left[ \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \left\{ a_n \sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + b_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right],$$

$$(2.51) \quad B(s,t) = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left[ \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \left\{ a_n \cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right],$$

$$(2.52) \quad C(s,t) = C_0 + \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left[ \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \left\{ c_n \sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + d_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right],$$

$$(2.53) \quad D(s, t) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left[ \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \left\{ c_n \cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + d_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right].$$

ここで、

$$(2.54) \quad b_0' = 2\pi\tau/\alpha,$$

$$(2.55) \quad b_1' = \frac{\pi}{2\alpha} (-\eta_0 - 2\eta_1 + 2\eta_2 - 2\eta_3 - \eta_4 + 4\alpha - 4\tau),$$

$$(2.56) \quad a_n = \frac{2}{n} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{\alpha}\right),$$

$$(2.57) \quad b_n = \beta_n - a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right),$$

$$(2.58) \quad c_n = \frac{2}{n} \cos\left(\frac{n\pi\tau}{\alpha}\right),$$

$$(2.59) \quad d_n = \gamma_n - c_n \cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right),$$

$$(2.60) \quad \beta_n = \frac{1}{2n} \left\{ -\sin\left(\frac{n\pi\eta_0}{\alpha}\right) - 2\sin\left(\frac{n\pi\eta_1}{\alpha}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi\eta_2}{\alpha}\right) - 2\sin\left(\frac{n\pi\eta_3}{\alpha}\right) - \sin\left(\frac{n\pi\eta_4}{\alpha}\right) \right\},$$

$$(2.61) \quad \gamma_n = \frac{1}{n} \left\{ \cos\left(\frac{n\pi\eta_0}{\alpha}\right) + \cos\left(\frac{n\pi\eta_4}{\alpha}\right) \right\}.$$

$A_0$  と  $C_0$  は定数である。あとは、パラメータ  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\eta_i$  ( $i=0-4$ ) を (2.36)-(2.38), (2.41)-(2.45) を満たすように求めればよい。

### 3. 厳密解の無限級数の変形

2. で解の具体的な表現が無限級数の形で得られた。しかし、それは収束の遅

い項を含んでいるために、そのままの形を用いてパラメータ  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\eta_i$  ( $i=0-4$ ) を決める数値計算を行っても誤差が大きくて役には立たない。収束の遅い項は写像関数の特異性を表していて実は境界が角を持っていることに対応する[4]。そこでつぎの様な変形を行う。公式

$$(3.1) \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1)$$

$$(3.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(ny)\cos(nx) = -\frac{1}{2} \log |2(\cos(x) - \cos(y))| \quad (x \pm y \neq 2m\pi),$$

$$(3.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(ny)\sin(nx) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin(\frac{x+y}{2})}{\sin(\frac{x-y}{2})} \right| \quad (x \pm y \neq 2m\pi)$$

を使うと、

$$\begin{aligned} (3.4) \quad C(s,0) - C_0 &= \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + d_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \\ &= \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right. \\ &\quad \left. - c_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi(s-1)}{\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right)}{2 \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \\ &= \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{n\pi(1+s)}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\ &\quad \left. - c_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{n\pi(2-s)}{\alpha}\right)}{f_n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{g_n(s)}{f_n} \right\} \\
&\quad + \sum_{n \geq 1} \left\{ \gamma_n \exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right) + c_n \exp\left(-\frac{n\pi s}{\alpha}\right) \right\} \\
&= \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{g_n(s)}{f_n} \right\} + \log\{p_-(s, \tau)\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \log\{p_-(1-s, \eta_0)\} - \frac{1}{2} \log\{p_-(1-s, \eta_4)\},
\end{aligned}$$

$$(3.5) \quad C(s, \alpha) - C_0 = \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left[ (-1)^n \left\{ c_n \sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + d_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{(-1)^n g_n(s)}{f_n} \right\} \\
&\quad + \sum_{n \geq 1} \left[ (-1)^n \left\{ \gamma_n \exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right) + c_n \exp\left(-\frac{n\pi s}{\alpha}\right) \right\} \right] \\
&= \frac{\pi s}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{(-1)^n g_n(s)}{f_n} \right\} + \log\{p_+(s, \tau)\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \log\{p_+(1-s, \eta_0)\} - \frac{1}{2} \log\{p_+(1-s, \eta_4)\},
\end{aligned}$$

$$(3.6) \quad C(0, t) - C_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{d_n}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
&\quad \times \left( -c_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) + \gamma_n \right) \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \Big\} \\
&\quad - \sum_{n \geq 1} c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
&\quad \times \left( -c_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) + \gamma_n \right) \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \} \\
&\quad + \log 4 + \log |s_+(t, \tau) s_-(t, \tau)|, \\
(3.7) \quad C(1, t) - C_0 &= \frac{\pi}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) + d_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \\
&= \frac{\pi}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \gamma_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} - c_n \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \\
&= \frac{\pi}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
&\quad \times \left( -c_n + \gamma_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \} \\
&\quad + \sum_{n \geq 1} \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \\
&= \frac{\pi}{\alpha} + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
&\quad \times \left( -c_n + \gamma_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \log |s_+(t, \eta_0) s_-(t, \eta_0) s_+(t, \eta_4) s_-(t, \eta_4)| - \log 4,
\end{aligned}$$

$$(3.8) \quad A(0, t) - A_0 = -\frac{b_1'}{2} t - \sum_{n \geq 1} \left\{ b_n \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{b_1'}{2} t + \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
&\quad \times \left\{ \left( a_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) - \beta_n \right) \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \right\} \\
&\quad \left. + \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \right] \\
&= -\frac{b_1'}{2} t + \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
&\quad \times \left\{ \left( a_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) - \beta_n \right) \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \right\} \right] + \log \left| \frac{s_+(t, \tau)}{s_-(t, \tau)} \right|, \\
(3.9) \quad A(1, t) - A_0 &= -\frac{b_1'}{2} t - \sum_{n \geq 1} \left[ \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \left\{ a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) + b_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right], \\
&= -\frac{b_1'}{2} t - \sum_{n \geq 1} \left\{ \beta_n \frac{\cosh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} - a_n \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \\
&= -\frac{b_1'}{2} t + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
&\quad \times \left( a_n - \beta_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \left. \right\} \\
&\quad - \sum_{n \geq 1} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \\
&= -\frac{b_1'}{2} t + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{2 \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{f_n} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( a_n - \beta_n \exp\left(-\frac{n\pi}{\alpha}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi t}{\alpha}\right) \Big\} \\
& + \frac{1}{4} \log \left| \frac{s_+(t, \eta_0)}{s_-(t, \eta_0)} \right| + \frac{1}{2} \log \left| \frac{s_+(t, \eta_1)}{s_-(t, \eta_1)} \right| \\
& - \frac{1}{2} \log \left| \frac{s_+(t, \eta_2)}{s_-(t, \eta_2)} \right| + \frac{1}{2} \log \left| \frac{s_+(t, \eta_3)}{s_-(t, \eta_3)} \right| \\
& + \frac{1}{4} \log \left| \frac{s_+(t, \eta_4)}{s_-(t, \eta_4)} \right| ,
\end{aligned}$$

$$(3.10) \quad B(s, 0) = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left\{ a_n \cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left\{ \beta_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right. \\
& \quad \left. + a_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi(s-1)}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right)}{2 \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left\{ \beta_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(1+s)}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \\
& \quad \left. + a_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi s}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(2-s)}{\alpha}\right)}{f_n} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{h_n(s)}{f_n} \right\} \\
& \quad + \sum_{n \geq 1} \left\{ \beta_n \exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right) + a_n \exp\left(-\frac{n\pi s}{\alpha}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{h_n(s)}{f_n} \right) + 2 F_-(s, \tau) - \frac{1}{2} G_-(s, \eta_0) \\ - G_-(s, \eta_1) + G_-(s, \eta_2) - G_-(s, \eta_3) - \frac{1}{2} G_-(s, \eta_4),$$

$$(3.11) \quad B(s, \alpha) = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left[ (-1)^n \left\{ a_n \cosh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right) + b_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right] \\ = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left[ (-1)^n \left\{ \beta_n \frac{\sinh\left(\frac{n\pi s}{\alpha}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right. \right. \\ \left. \left. + a_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi(s-1)}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right)}{2 \sinh\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)} \right\} \right] \\ = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left[ (-1)^n \left\{ \beta_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(1+s)}{\alpha}\right)}{f_n} \right. \right. \\ \left. \left. + a_n \frac{\exp\left(-\frac{n\pi s}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(2-s)}{\alpha}\right)}{f_n} \right\} \right] \\ = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left\{ \frac{(-1)^n h_n(s)}{f_n} \right\} \\ + \sum_{n \geq 1} \left[ (-1)^n \left\{ \beta_n \exp\left(-\frac{n\pi(1-s)}{\alpha}\right) + a_n \exp\left(-\frac{n\pi s}{\alpha}\right) \right\} \right] \\ = \frac{b_0'}{2} + \frac{b_1'}{2} s + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{(-1)^n h_n(s)}{f_n} \right) - 2 F_+(s, \tau) + \frac{1}{2} G_+(s, \eta_0) \\ + G_+(s, \eta_1) - G_+(s, \eta_2) + G_+(s, \eta_3) + \frac{1}{2} G_+(s, \eta_4).$$

ここで、

$$(3.12) \quad f_n = 1 - \exp\left(-\frac{2n\pi}{\alpha}\right),$$

$$(3.13) \quad g_n(s) = -c_n \left( \exp\left(-\frac{n\pi(2-s)}{\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{n\pi(2+s)}{\alpha}\right) \right) \\ + \gamma_n \left( \exp\left(-\frac{n\pi(1+s)}{\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{n\pi(3-s)}{\alpha}\right) \right),$$

$$(3.14) \quad h_n(s) = a_n \left( \exp\left(-\frac{n\pi(2+s)}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(2-s)}{\alpha}\right) \right) \\ + \beta_n \left( \exp\left(-\frac{n\pi(3-s)}{\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{n\pi(1+s)}{\alpha}\right) \right),$$

$$(3.15) \quad F_+(s, \tau) = \tan^{-1} \left( \frac{\exp\left(-\frac{\pi s}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{\pi \tau}{\alpha}\right)}{1 \pm \exp\left(-\frac{\pi s}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{\pi \tau}{\alpha}\right)} \right),$$

$$(3.16) \quad G_+(s, \eta) = \tan^{-1} \left( \frac{\exp\left(-\frac{\pi(1-s)}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{\pi \eta}{\alpha}\right)}{1 \pm \exp\left(-\frac{\pi(1-s)}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{\pi \eta}{\alpha}\right)} \right),$$

$$(3.17) \quad s_{+i}(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}(y \pm x)\right) \quad (i=0-4),$$

$$(3.18) \quad p_+(x, y) = 1 + \exp\left(-\frac{2\pi x}{\alpha}\right) \pm 2 \exp\left(-\frac{\pi x}{\alpha}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{\alpha}\right) \geq 0.$$

この形になると、無限級数を有限項で打ち切ったときの誤差評価を行うことができるため、4.で行う数値計算の誤差評価もできることになる。また、この形から直ちに関数の特異性も分かる。

#### 4. 数値解法と誤差評価

ここでは、問題2.2を解くアルゴリズムとそのアルゴリズムによる計算誤

差について述べる。基本的には、(2.23)-(2.25) の右辺の関数の代わりに(3.4)-(3.11)の無限級数を有限項で打ち切ったものを使い、(2.36)-(2.38)、(2.41)-(2.45)を2分法を用いて数値的に解く。ここで、被積分関数が特異的であるために、数値積分には2重指数法[5]を用いる。

#### (1) 数値計算のアルゴリズム

数値計算のためにつぎの関数を定義する。

$$(4.1) \quad s'_{CD,n}(s,t) = \int_0^t \exp[ C_n(s, \eta) - C_0 ] d\eta \quad (s=0,1),$$

$$(4.2) \quad s'^{AB}_{CD,n}(1,t) = \int_0^t \exp[ A_n(1, \eta) + C_n(1, \eta) - A_0 - C_0 ] d\eta,$$

$$(4.3) \quad e^{C_{n0}} = 2 / ( s'_{CD,n}(1, \eta_4) - s'_{CD,n}(1, \eta_0) ),$$

$$(4.4) \quad e^{A_{n0} + C_{n0}} = 2 / ( s'^{AB}_{CD,n}(1, \eta_4) - s'^{AB}_{CD,n}(1, \eta_0) ),$$

$$(4.5) \quad s_{CD,n}(s,t) = e^{C_{n0}} s'_{CD,n}(s,t) \quad (s=0,1),$$

$$(4.6) \quad s^{AB}_{CD,n}(1,t) = e^{A_{n0} + C_{n0}} s'^{AB}_{CD,n}(1,t),$$

$$(4.7) \quad J_n(s,t) = e^{A_{n0} + C_{n0}} \int_0^s \exp[ A_n(\xi, t) + C_n(\xi, t) - A_0 - C_0 ]$$

$$\times \cos[ B_n(\xi, t) + D(\xi, t) ] d\xi \quad (t=0, \alpha).$$

ここで、 $A_n(1,t)$  や  $C_n(0,t)$  等は(3.4)-(3.11)の右辺において和を  $n = 1$  から  $n = \mathbf{n}$  までとったものを表す。 $A_0$ と $C_0$ は 2. と同じものである。

これらの関数を用いて問題2.2を以下のように解く。

(Step 1)  $\kappa$  ( $0 < \kappa$ )の値を選び、級数の和の上限  $\mathbf{n}$  を定める。

(Step 2)  $\alpha$  ( $0 < \alpha$ )の値をいくつか選び、その集合を  $S$  とする。

(Step 3) もし  $S$  の全ての元について調べ終えたら(Step 1)に行く。そうでなけ

ればS 中の新しい $\alpha$ について調べる。

(Step 4)  $\tau$  ( $0 < \tau < \alpha$ ) の値をいくつか選び、その集合をT とする。

(Step 5) もしT の全ての元について調べ終えたら(Step 3)に行く。そうでなければT 中の新しい $\tau$ について調べる。

(Step 6) 2分法を用いて

$$(4.8) \quad \text{scd}_{\mathbf{n}}(0, \tau) = \text{scd}_{\mathbf{n}}(0, \alpha) - \text{scd}_{\mathbf{n}}(0, \tau),$$

$$(4.9) \quad \text{scd}_{\mathbf{n}}(1, \eta_0) = \kappa$$

を満たす $(\eta_0, \eta_4)$  ( $0 < \eta_0 < \eta_4 < \alpha$ )を見つける。もしそういう $(\eta_0, \eta_4)$ が見つければ(Step 7)に行く。そうでなければ(Step 5)に行く。

(Step 7) 2分法を用いて

$$(4.10) \quad J_{\mathbf{n}}(1, 0) = 0,$$

$$(4.11) \quad J_{\mathbf{n}}(1, \alpha) = 0,$$

$$(4.12) \quad J_{\mathbf{n}}(s, 0) \geq 0, \quad J_{\mathbf{n}}(s, \alpha) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

$$(4.13) \quad \overset{\text{AB}}{\text{scd}}_{\mathbf{n}}(1, \eta_1) - \overset{\text{AB}}{\text{scd}}_{\mathbf{n}}(1, \eta_0) = \overset{\text{AB}}{\text{scd}}_{\mathbf{n}}(1, \eta_4) - \overset{\text{AB}}{\text{scd}}_{\mathbf{n}}(1, \eta_3)$$

を満たす $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  ( $\eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \eta_4$ )を見つける。もしそういう $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ が見つければ(Step 8)に行く。そうでないときは(Step 5)に行く。

(Step 8) ( $\alpha, \tau, \eta_i$  ( $i=0-4$ ))の値を保存する。そして(Step 5)に行く。

## (2) 無限級数の打ち切りによる誤差について

上のアルゴリズムでは、厳密解の無限級数の代わりに有限級数を使うことによって計算誤差が生じるが、それは有限級数の項数を多くとればとるほどいくらでも小さくできる。その証明は[4]にあるのと同様であるから省略する。

## 5. 数値計算結果

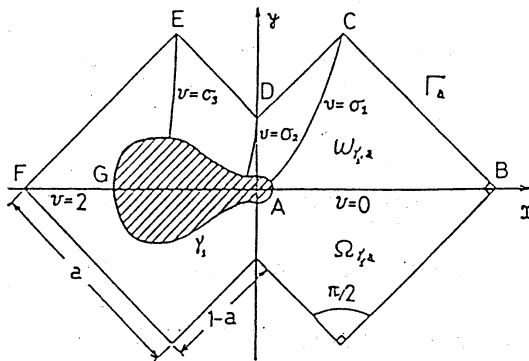
4. にあるアルゴリズムを用いて得られた得られた結果と、いままでに得られている1塊プラズマの結果をまとめて模式的に示したのが図4である。1塊プラズマの存在領域は1次元であるのに対して、2塊プラズマのそれは2次元であることが分かる。パラメータ空間における1塊プラズマと2塊プラズマの分岐の様子もよく分かる。また、分岐の $\kappa$ 依存性もよく分かる。

## 6. まとめ

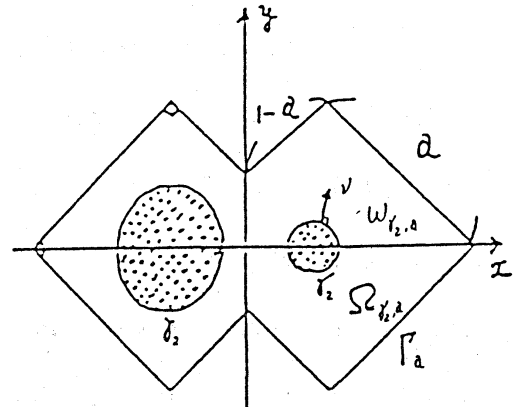
表面電流を持つ2次元プラズマ平衡の問題をホドグラフ変換と等角写像を用いて解析し、プラズマ形状の分岐現象を数値的に明らかにした。問題が簡単であるにもかかわらず、解の構造や分岐の構造が複雑であることが分かった。

## 参考文献

- [1] A. S. Demidov, The form of a steady plasma subject to the skin effect in a tokamak with non-circular cross-section. Nucl. Fusion, 15 (1975), 765-768.
- [2] A. S. Demidov, Sur la perturbation "singulière" dans un problème à frontière libre. Lecture Notes in Mathematics, 594 (eds. A. Dold and B. Eckmann), Springer-Verlag, New York, (1977), 123-130.
- [3] A. S. Demidov, Equilibrium form of a steady plasma, Phys. Fluids, 21(6)(1978), 902-904.
- [4] H. Imai and H. Kawarada, One-component asymmetric plasmas in a symmetric vessel, Japan Journal of Appl. Math., 5(2)(1988), 173-186.
- [5] H. Takahashi and M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyouto Univ., 9(1974), 121-141.



1 塊非対称プラズマ



2 塊非対称プラズマ

図1 1 塊プラズマと2 塊プラズマ

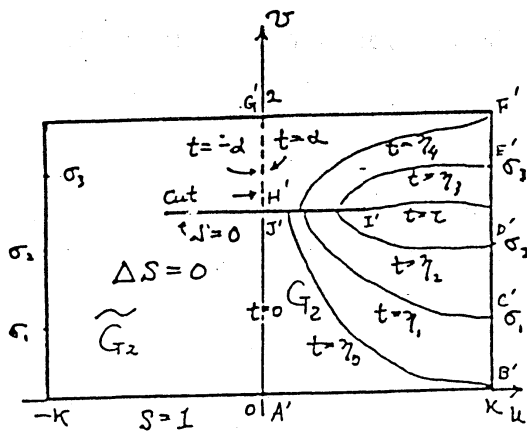
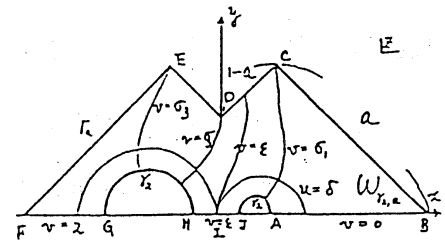


図2 新しい(s, t) 直交座標系

図3 関数  $B(s, t)$ ,  $D(s, t)$  の境界条件

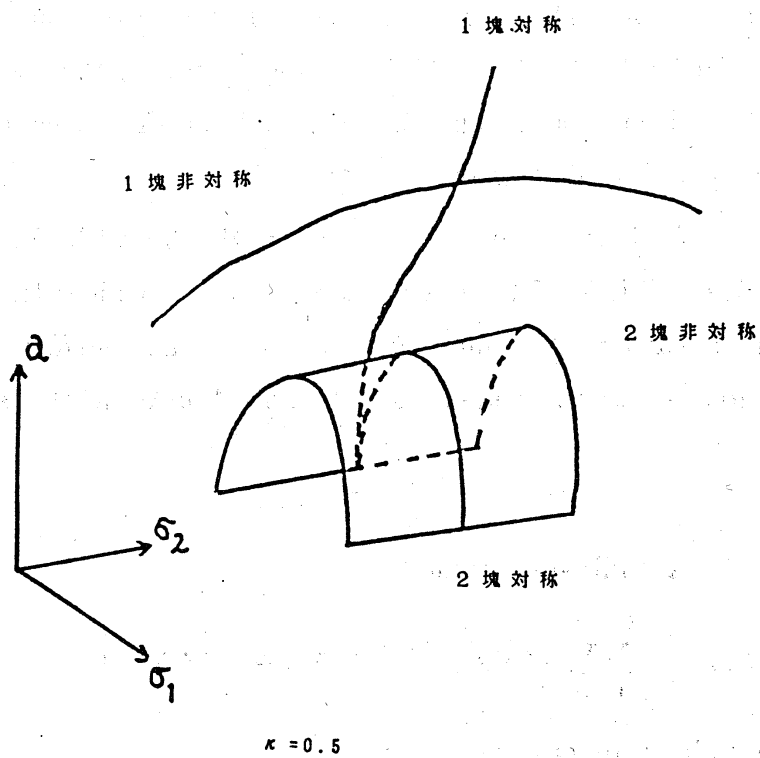
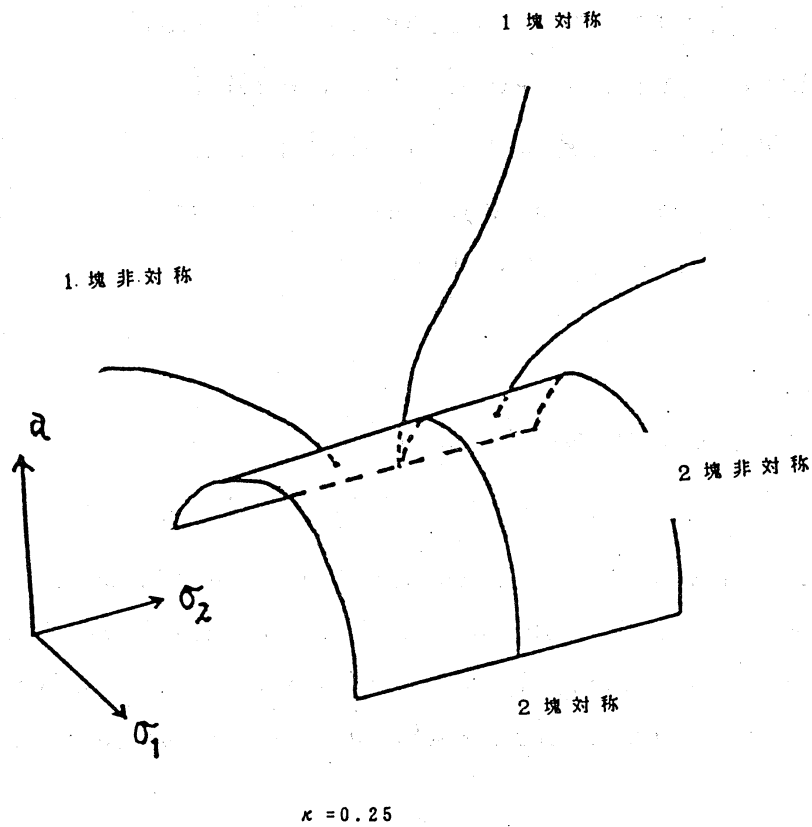


図 4 解の存在領域と分岐図