

Phantom Homologies

吉野雄二 (名大・理)

(Yuji Yoshino)

以下は Hochster-Huneke [1] の第 9 章の紹介である。概ね原論文通りに紹介するので、分かりにくいところは [1] を参照してほしい。なお以下での定理の番号などは全て [1] のものである。

今までと同様、 R は標数 $p > 0$ の環で、整数 e に対して $q = p^e$ と書く。

英和辞典を引いてみると、

phantom = 幻、幽霊、お化け、幻影、錯覚、妄想、(形容詞的に) 見せかけの

ということがわかる。題名の phantom homology は多分この最後の意味で使われているものと思う。(すなわち、殆ど homology が見えない!) 正確に定義をすると、

定義. 有限生成自由 R -加群からなる鎖複体:

$$G. : \dots \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow 0$$

が与えられたとする。 i 番目の項における cycles、boundaries をそれぞれ Z_i 、 B_i と書くことにする。homology $H_i(G.)$ が phantom であるとは、 $Z_i \subset (B_i)_{G_i}^*$ と定義される。 $H_0(G.)$ 以外の全ての homologies が phantom であるとき、鎖複体 $G.$ は phantom homology を持つと言う。さらに、cycle $z \in Z_i$ について、その homology class $[z]$ が phantom であるとは、 $z \in (B_i)_{G_i}^*$ となるときである。

R が weakly F-regular のときには、定義によって $G.$ が phantom homology を持つことは acyclic ということと同値である。(だから phantom なのだ。) 次の定理が成立する。

定理. $h: R \rightarrow S$ が環準同型で $h(R^\circ) \subset S^\circ$ をみたすと仮定する。 $G.$ を R 上の有限生成自由加群の鎖複体、 $G'.$ を S 上の有限生成自由加群の鎖複体とする。 R 上の鎖複体としての準同型 $\phi: G. \rightarrow G'.$ があるとき、次が成立する。

$[z] \in H_i(G.)$ が phantom ならば $H_i(\phi)([z]) \in H_i(G'.)$ もまた phantom である。

特に、 $H_i(G.)$ が phantom で、 S が weakly F-regular ならば、 $H_i(G.) \rightarrow H_i(G'.)$ は零写像である。(phantom homology はすぐ消える。)

証明: $z \in Z_i$ とする。定義によって、 $c \in R^\circ$ があって、任意の $q \gg 1$ に対して $cz^q \in B_i^{[q]}$ となる。よって、 $h(c)\phi(z)^q \in (B_i')^{[q]}$ for $\forall q \gg 1$ となる。結局、 $\phi(z) \in (B_i')^*$ が出る。■

記号. 以下では、次のような記号を使う。

(1) G . は R 上の有限生成自由加群からなる長さ有限の鎖複体で、次のように書けているとする。

$$G. : 0 \longrightarrow G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_0 \longrightarrow 0$$

このとき、

$n = \text{the length of } G.$

$b_i = \text{rank}(G_i)$

$$r_i = \sum_{t=i}^n (-1)^{t-i} b_t$$

とおく。

(2) $\alpha : G \rightarrow G'$ が R -自由加群の間の準同型であるとき、次のように定義する。

$$\text{rank}(\alpha) = \max\{r \mid \wedge^r \alpha \neq 0\}$$

$$I_t(\alpha) = \text{the ideal generated by } t\text{-minors of } \alpha \quad (t \in \mathbb{N})$$

定義. 鎖複体 G . が rank 、 depth 、 height に関する標準的条件 (Standard Condition) を満たすとは、それぞれ次の条件が満たされる時を言う。

$$(\text{SCrank}) \quad \text{rank}(\alpha_i) = r_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$(\text{SCdepth}) \quad \text{depth}(I_{r_i}(\alpha_i)) \geq i \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$(\text{SCheight}) \quad \text{ht}(I_{r_i}(\alpha_i)) \geq i \quad (1 \leq i \leq n)$$

(但し、 $\text{ht}(R) = \text{depth}(R) = \infty$ とする。)

Buchsbaum-Eisenbud による acyclicity criterion を思い出しておこう。

補題. G . が acyclic であるための必要十分条件は G . が (SCrank) と (SCdepth) を満たすことである。

また、次の定義をする。

定義. 鎖複体 G . が phantom acyclicity criterion (phAC) を満たすとは、 $G.^{\text{red}} = G. \otimes_R R_{\text{red}}$ が (SCrank) と (SCheight) を満足することと定義する。

本節の最終目標は次の定理を示すことにある。

定理 9.8. 次の二つの条件を考える。

(1) G は (phAC) を満たす。

(2) 任意の $e(\geq 0)$ について、 $F^e G$. は phantom homology をもつ。

このとき、(2) $\Rightarrow$ (1) が常に成立する。もし、 R が CM 環の準同型像で locally equidimensional のときには、(1) $\Rightarrow$ (2) も成立する。

定義と記号. $\phi: R \rightarrow R$ を環準同型とする。(ただし、以下では殆どの場合、 ϕ は Frobenius 写像のべき、または、恒等写像のどちらかである。)

$\Phi^n(R) = {}_1R_{\phi^n}$ と置く。すなわち、左 R -加群としては普通の R の作用で、右 R -加群としては ϕ^n を通して見たものである。左 R -加群 M に対して、 $\Phi^n(M) = \Phi^n(R) \otimes_R M$ と置いてこれを左 R -加群と見なす。自然な写像 $M \rightarrow \Phi^n(M)$; $x \mapsto 1 \otimes x$ は ϕ^n -linear である (i.e. $x \mapsto \xi$ ならば $cx \mapsto \phi^n(c)\xi$)、しかし、 R -linear ではないことに注意しよう。

$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_i\}$ を R の元の列であるとする。この時、整数 t に対して、 $\mathbf{x}^t = \{x_1^t, \dots, x_i^t\}$ と書く。 $K(\mathbf{x}^t; M)$ をこの列についての Koszul complex とする。自然な写像:

$$K(\mathbf{x}^t; M) \rightarrow \Phi^n(R) \otimes_R K(\mathbf{x}^t; M) = K(\phi(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M))$$

によって、 ϕ^n -linear な写像:

$$\rho: H(\mathbf{x}^t; M) \rightarrow H(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M))$$

が導かれる。

R の元 c に対して、 $c\Phi^n$ kills $H_j(\mathbf{x}^t; R)$ とは、次の合成射が 0 の時を言う。

$$H_j(\mathbf{x}^t; M) \xrightarrow{\rho_j} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M)) \xrightarrow{c} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(M))$$

もっと一般に、 R 上の鎖複体 G について、 ϕ^n -linear な写像 $\rho: H(G) \rightarrow \Phi^n(G) = \Phi^n(R) \otimes_R G$ が導かれる。このときにも、 $c\Phi^n$ kills $H_j(G)$ ということを写像の合成:

$$H_j(\mathbf{x}^t; G) \xrightarrow{\rho_j} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(G)) \xrightarrow{c} H_j(\phi^n(\mathbf{x})^t; \Phi^n(G))$$

が 0 であることと定義する。

定義. イデアル $I \subset R$ 、 R -加群 M と $c \in R$ について、 $(\phi, c) - \text{depth}_I(M)$ を次によって定義する。

$$(\phi, c) - \text{depth}_I(M) \geq n$$

$$\iff 1 \leq \forall i \leq n, \exists \{x_1, \dots, x_i\} \subset I \text{ such that } c\Phi \text{ kills } H_j(\mathbf{x}^t; M) \text{ for } \forall j \geq 1, \forall t \geq 1$$

例.

(1) $\phi = 1$ 、 $c = 1$ のとき、 $(\phi, c) - \text{depth}_I(M) = \text{depth}_I(M)$ である。

(2) $\phi = 1$ 、 $c \in R$ のとき、

$$\begin{aligned} (\phi, c) - \text{depth}_I(M) \geq n &\iff cH_j(\mathbf{x}^t; M) = 0 \quad (\forall j \geq 1, \forall t \geq 1) \\ &\implies \text{depth}_{Ic}(M_c) \geq n \end{aligned}$$

である。

(3) $\phi = F^e$ 、 $c = 1$ のとき、 $\text{depth}_I(R) \geq n$ または $\text{depth}_{IR_{red}}(R_{red}) \geq n$ ならば、 $(F^e, 1) - \text{depth}_I(M) \geq n$ ($\forall e \gg 0$) である。

定義.

(1) $\square : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を次で定義する。

$$\square 0 = 1, \quad \square n = \square(n-1) + \sum_{t=0}^{n-1} \square t + n + 1$$

(2) $q, n \in \mathbb{N}$ について、

$$q < n > = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

と置く。

注意. 前のように、 $\phi : R \rightarrow R$ 、 $c \in R$ とするとき、鎖複体 G に対して、写像 $c\Phi^n : G \rightarrow \Phi^n(G)$ は $x \mapsto c \otimes x$ によって定義される。

$\phi = F^e$ で $q = p^e$ のとき定義によって、

$$(c\Phi)^n = c^{q < n >} \Phi^n$$

である。

以上のような記号のもとで次の定理が成立する。

定理 (FREE ACYCLICITY THEOREM 9.13). $\phi : R \rightarrow R$ は前のように $\phi = 1$ または $\phi = F^e$ としておく。 R 上の鎖複体 G に対して、 $I_i = I_{r_i}(\alpha_i)$ と書く。もし、 G が $(SCrank)$ を満たし、更に、 $(\phi, c) - \text{depth}_{I_i}(R) \geq i$ ($1 \leq i \leq n$) を満足するならば、任意の t ($0 \leq t \leq n-1$) に対して、 $(c\Phi)^{\square t}$ kills $H_{n-t}(G)$ である。

証明: $n = \text{length}(G)$ についての帰納法で証明する。 $n = 0$ のときには自明である。 $n = 1$ のとき、 G を $0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_0 \rightarrow 0$ と書いておく。 $(\phi, c) - \text{depth}_{I_1}(R) \geq 1$ より、 $x \in I$ があって $c\Phi$ kills $H_1(x; R)$ となる。 $\text{rank}(G_1) = \text{rank}(\alpha_1) \leq \text{rank}(G_0)$ であるから、

$$H_1(G) = \text{Ker}(\alpha_1) \subset (0 :_{G_1} I_1) \subset \oplus H_1(x; R)$$

である。よって、 $c\Phi$ kills $H_1(G)$ となる。

以下 $n \geq 2$ とする。鎖複体

$$G'' : 0 \rightarrow G_n \xrightarrow{\alpha_n} G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_1 \rightarrow 0$$

には帰納法の仮定が使えることに注意する。したがって、

(*) $(c\Phi)^{\square t}$ kills $H_{n-t}(G)$ for $0 \leq \forall t \leq n-2$

特に、 $H_1(G.)$ 以外のホモロジーについては定理は OK である。したがって、 $(c\Phi)^{\square(n-1)}$ kills $H_1(G.)$ となることのみ証明すればよい。反例があるとして局所化して考えれば良いので、初めから $(R, \mathfrak{m})$ は局所環として良い。次の事は容易に分かる。

(**) If $I_n = R$, then $H_n(G.) = 0$ and $(c\Phi)^{\square t}$ kills $H_{n-t-1}(G.)$ for all $0 \leq t \leq n-2$.

実際、 $G.' = (0 \rightarrow G_{n-1}/\alpha_n(G_n) \rightarrow G_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow 0)$ と置いて、この G' に帰納法の仮定を使えば良い。

いま、 $(\phi, c) - \text{depth}_{I_n}(R) \geq n$ より、

$$\exists \{x_1, \dots, x_n\} \subset I_n \text{ such that } c\Phi \text{ kills } H_j(\mathbf{x}^t; R) \text{ for } \forall t, j \geq 1$$

となる。さて、任意に $z \in Z_1(G.)$ を一つ取って固定して置く。

$$(c\Phi)^{\square(n-1)}([z]) = 0 \quad \text{in } H_1(\Phi^{\square(n-1)}(G.))$$

を言えば良い。 $(G.)_{x_i}$ に (**) を適用して、 $\exists \nu \geq 1$ such that

$$x_i^\nu (c\Phi)^{\square(n-2)}(z) \in B_1(\Phi^{\square(n-2)}(G.)) \quad (1 \leq i \leq n)$$

が言えるので、 x_i の代わりに x_i^ν を考えて最初から $\nu = 1$ として良い。そこで、次のような写像が定義できる。

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{x}; R) = R/\mathbf{x}R &\longrightarrow M := \Phi^{\square(n-2)}(G_1)/B_1(\Phi^{\square(n-2)}(G.)) \\ 1 &\mapsto z' := (c\Phi)^{\square(n-2)}(z) \end{aligned}$$

すると、次のような R -linear map f_0, f_1 が誘導される。

$$\begin{array}{ccccccc} K_2 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & H_0(\mathbf{x}; R) \longrightarrow 0 \\ & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & (c\Phi)^{\square(n-2)}(z) \downarrow \\ \Phi^{\square(n-2)}(G_3) & \longrightarrow & \Phi^{\square(n-2)}(G_2) & \longrightarrow & \Phi^{\square(n-2)}(G_1) & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

但し、 $K. = K.(\mathbf{x}; R)$ である。(*) によって、 $(c\Phi)^{\square(n-2)}$ kills $H_2(G.)$ であるから、 $\phi^{\square(n-2)}$ -linear map $K_2 \rightarrow K_1 \xrightarrow{f_1} \Phi^{\square(n-2)}(G_2) \xrightarrow{(c\Phi)^{\square(n-2)}} \Phi^{2\square(n-2)}(G_2)$ は、その像が $\Phi^{2\square(n-2)}(G.)$ の boundary に入る。したがって、写像：

$$\Phi^{\square(n-2)}(K_2) \longrightarrow \Phi^{\square(n-2)}(K_1) \xrightarrow{\Phi^{\square(n-2)}(f_1)} \Phi^{2\square(n-2)}(G_2) \xrightarrow{c^{q' < \square(n-2) >}} \Phi^{2\square(n-2)}(G_2)$$

は R -linear map であって、その像が boundary に含まれることが分かる。よって、次の図式を可換にするような R -linear map f_2 が存在することが分かる。

$$\begin{array}{ccccc} \Phi^{\square(n-2)}(K_2) & \longrightarrow & \Phi^{\square(n-2)}(K_1) & \longrightarrow & \Phi^{\square(n-2)}(K_0) \\ f_2 \downarrow c^{q' \langle \square(n-2) \rangle} \Phi^{\square(n-2)}(f_1) \downarrow c^{q' \langle \square(n-2) \rangle} \Phi^{\square(n-2)}(f_0) \downarrow & & & & \\ \Phi^{2\square(n-2)}(G_3) & \longrightarrow & \Phi^{2\square(n-2)}(G_2) & \longrightarrow & \Phi^{2\square(n-2)}(G_1) \end{array}$$

このような操作を続けていって最終的に次のような R -linear maps からなる可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Phi^l(K_n) & \longrightarrow & \Phi^l(K_{n-1}) \cdots & \longrightarrow & \Phi^l(K_0) \longrightarrow H_0(\phi^l(\mathbf{x}); \Phi^l(R)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_0 \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & \Phi^{l'}(G_n) \cdots & \longrightarrow & \Phi^{l'}(G_1) \longrightarrow & \Phi^{l'}(M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ここで、 $l = \square(n-2) + \square(n-3) + \cdots + \square 2 + \square 1 + \square 0$, $l' = l + \square(n-2) = \square(n-1) - n$ である。また、この図式の右端の縦の写像によって、 $1 \mapsto (c\Phi)^{l'}(z)$ である。 $\Phi^l(K.) = K.(\phi^l(\mathbf{x}); \Phi^l(R))$ であることに注意しておく。 $()' = R$ -dual と書いて、上の鎖複体の双対を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Phi^l(K_0)' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Phi^l(K_{n-1})' \longrightarrow \Phi^l(K_n)' \longrightarrow 0 \\ & & f_0' \uparrow & & & & f_{n-1}' \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \Phi^{l'}(G_1)' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Phi^{l'}(G_n)' \longrightarrow 0 & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$\Phi^l(K.^t) \simeq K.(\mathbf{x}^t; R)$ for some t であることと、 $c\Phi$ kills $H.(\Phi^l(K.))$ であることから、上とまったく同じ議論によって、鎖複体の準同型 $(c\Phi)^n f.^l : \Phi^{l'+n} G' \rightarrow \Phi^{l'+n} K'$ には chain homotopy $\{h_i\}$ が存在することが分かる。これの R -dual を取って、

$$(c\Phi)^{l'+n}(z) = 0 \in H_1(\Phi^{l'+n} G.)$$

であることが分かる。ここで、 $l' + n = \square(n-1)$ だから、 $(c\Phi)^{\square(n-1)}$ kills $H_1(G.)$ である。■

補題 9.14(A). R が CM 環の準同型像であるような locally equidimensional な環であるとする。このとき、 $\exists c \in R^\circ$ and $\exists e' \geq 0$ such that

$$(F^e, c) - \text{depth}_I(R) \geq \text{ht}(I) \quad \text{for } \forall I \subset R, \forall e \geq e'$$

証明: $\text{Spec}(R)$ は連結であると仮定して構わない。($R \simeq R_1 \times R_2$ ならば成分毎に考えよ。) $R = S/Q$ と書く。但し、 S は CM 環で、 Q は S のイデアルでその極小素イデアルの高さは全部 0 であるように取

る。このとき、 $c_1 \in S - \cup\{P \in \text{Min}(Q)\}$ があって、 $c_1 Q^{[q']} = 0$ for some $q' = p^{e'}$ とできる。 $K_j(\mathbf{x}^t; R)$ の任意の cycle z を取る。これの $K_j(\mathbf{x}^t; S)$ への持ち上げを一つ取ってそれを z' とする。Koszul complex の一部分；

$$\begin{array}{ccc} K_j(\mathbf{x}^t; S) & \xrightarrow{\beta} & K_{j-1}(\mathbf{x}^t; S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_j(\mathbf{x}^t; R) & \xrightarrow{\alpha} & K_{j-1}(\mathbf{x}^t; R) \end{array}$$

を考える。 $\beta(z') \in QK_{j-1}(\mathbf{x}^t; S)$ であるから、 $e \geq e'$ のときには、

$$(F^e \beta)(c_1 z'^{[q]}) \in c_1 Q^{[q]} K_{j-1}(\mathbf{x}^t; S) = 0$$

$F^e K_j(\mathbf{x}^t; S)$ は acyclic なので、 $c_1 z'^{[q]} \in B_j(F^e K_j(\mathbf{x}^t; S))$ となり、 $cz^{[q]} \in B_j(F^e K_j(\mathbf{x}^t; R))$ が出る。これは、 cF^e kills $H_j(\mathbf{x}^t; R)$ を意味する。■

さて、 R が CM 環の準同型像であるような locally equidimensional な環の時に、定理 9.8 (1) $\Rightarrow$ (2) の証明をしよう。

そのために、鎖複体 G は (phAC) を満足すると仮定する。このときに、任意の $e \geq 0$ に対して $F^e G$ が phantom homology を持つことを証明したい。十分大きな $e \gg 0$ について、これを証明すれば十分である。 $F^e G$ もまた (phAC) を満たすから、次の事を証明すれば良い。

もし G が (SCrank) と (SCheight) を満たせば、 G は phantom homology を持つ。

前の補題によって、 $\exists c \in R^\circ$ 、 $\exists e' \geq 0$ such that

$$(F^{e'}, c) - \text{depth}_{I_i}(R) \geq \text{ht}(I_i) \geq i$$

となる。すると、 $e \gg 0$ のとき、 $F^e G$ に Free Acyclicity Theorem 9.13 が適用できて、 $(c\Phi^{e'})^{\square t} = c^{q' < \square t >} F^{e' \square t}$ kills $H_{n-t}(F^e G)$ ($0 \leq t \leq n-1$) となる。結局、つぎの殆ど自明な事実から $H_{n-t}(F^e G)$ が phantom になることが分かる。

一般に、 $d \in R^\circ$ と $e_1 \geq 0$ に対して、もし dF^{e_1} kills $H_i(F^e G)$ for all $e \gg 0$ ならば、 $H_i(G)$ は phantom である。■

さて、次に定理 9.8 のもう一方の証明をしよう。

そのために、 $F^e G$ は任意の $e \geq 1$ について、phantom homology を持つものと仮定する。 G^{red} が (SCrank) と (SCheight) を満たすことを証明しなくてはならない。 G に $Q = (R^\circ)^{-1}R$ をテンサーして、 Q が weak F-regular であることから、 $F^e G \otimes Q$ は acyclic になる。このことから、 G^{red} が (SCrank) を満たすことを見るのは容易である。問題は (SCheight) である。これを示すためには、 $(R, \mathfrak{m})$ は完備被約局所環として構わない。 $(R$ の代わりに $\hat{R}_{\text{red}}$ を考える。) 更に、鎖複体 G は minimal として良いことに注意しよう。すなわち、 $I_i \subset \mathfrak{m}$ for all i と仮定して良い。

定理の主張に対する反例が存在すると仮定する。すると、 $\exists d (1 \leq d \leq n)$ such that $ht(I_d) < d$ となる。 I_d の minimal prime で局所化して $ht(I_d) = \dim(R)$ としておく。よって $\dim(R) < d$ であり、 I_d は $\mathfrak{m}$ -primary ideal である。このとき矛盾が導かれることを示そう。

$\dim(R) = 0$ の場合。このとき R は体で、特に F -regular なので $G_\bullet$ は acyclic、よって split exact である。 $\forall I_i = 0$ であるから矛盾。

$\dim(R) = 1$ の時。この時には、test element $c \in R^\circ$ を取ることが出来た。 $H_d(F^e G_\bullet)$ は phantom であったから次が成立する。

$$(*) \quad cH_d(F^e G_\bullet) = 0 \quad (\forall e \geq 0)$$

鎖複体を次のように書いておく。

$$\begin{array}{ccccc} G_d & \xrightarrow{\alpha_d} & G_{d-1} & \xrightarrow{\alpha_{d-1}} & G_{d-2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F^e G_d & \xrightarrow{\beta_d} & F^e G_{d-1} & \xrightarrow{\beta_{d-1}} & F^e G_{d-2} \end{array}$$

$x \in G_d$ を G_d の自由基底の一部になるように取る。 $x^q \in F^e G_d$ もまた自由基底の一部であることに注意しよう。 $\alpha_d(x) \in \mathfrak{m}G_{d-1}$ より、 $e \gg 0$ のときに $\beta_d(x^q) \in c^2 F^e G_{d-1}$ である。よって、 $y \in F^e G_{d-1}$ を取って、 $\beta_d(x^q) = c^2 y$ と書くことが出来る。 $0 = \beta_{d-1}\beta_d(x^q) = c^2 \beta_{d-1}(y)$ であるから、 $\beta_{d-1}(y) = 0$ である。 $(*)$ によれば、 $cy \in \text{Im}(\beta_d)$ だから、 $cy = \beta_d(w)$ を満たす $w \in F^e G_d$ がある。すると、 $\beta_d(x^q) = c^2 y = \beta_d(cw)$ だから、 $x^q - cw \in Z_d(F^e G_\bullet) \subset \mathfrak{m}F^e G_\bullet$ となり、これより $x^q \in \mathfrak{m}F^e G_\bullet$ となってしまふ。これは x を自由基底の一部に取ったことに矛盾する。

最後に $\dim(R) \geq 2$ の場合を考える。 $d > \dim(R) = ht(I_d) \geq 2$ であったことを思いだしておこう。前の場合と同じように test element $c \in R^\circ$ を取っておく。更に $a \in \mathfrak{m} \cap R^\circ$ を $\dim(R/(a, c)R) = \dim(R) - 2$ となるように取る。そして $R' = R/aR$ と置いて、この上の鎖複体；

$$G'_\bullet : 0 \longrightarrow R' \otimes G_n \longrightarrow \dots \longrightarrow R' \otimes G_2 \longrightarrow R' \otimes G_1 \longrightarrow 0$$

を考える。このとき、任意の $e \geq 0$ について、 $F^e G'_\bullet$ もまた phantom homology を持つことが分かる。実際、完全列： $0 \rightarrow F^e G_\bullet \xrightarrow{a} F^e G_\bullet \rightarrow R' \otimes F^e G_\bullet \rightarrow 0$ より次もまた完全である。

$$H_i(F^e G_\bullet) \longrightarrow H_i(R' \otimes F^e G_\bullet) \longrightarrow H_{i-1}(F^e G_\bullet)$$

定義によって、 c は $F^e G'_\bullet$ の homology を消すので、 $i \geq 2$ のとき $c^2 H_i(R' \otimes F^e G_\bullet) = 0$ となることが分かる。0 番目の所以外では、 $R' \otimes F^e G_\bullet$ と $F^e G'_\bullet$ は (次数を一つずらして) 同じなので、 $c^2 H_i(F^e G'_\bullet) = 0 \quad \forall e \geq 0, \forall i \geq 1$ であることが出る。これより $F^e G'_\bullet$ もまた phantom homology を持つことがわかった。

さてそうすると、 G' , R' には帰納法の仮定が使えて、

$$ht(I_{r_d}(\alpha'_d)) \geq d - 1$$

一方で、 $I_{r_d}(\alpha'_d) = (I_d + cR)/cR$ で、 I_d が $\mathfrak{m}$ -primary であることから、 $ht(I_{r_d}(\alpha'_d)) = \dim(R') = \dim(R) - 1$ となる。結局 $\dim(R) \geq d$ が出て、最初の取り方に矛盾する。■

REFERENCE

1. Melvine Hochster and Craig Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, preprint (1989).