

## Branching rules and Hodge cycles

東京電機大・理工 裕 文夫  
(Fumio Hazama)

§ 0. 動機づけ.

もし,  $\Delta$ stably degenerate アーベル多様体を少し統一的に見ようとするのなら, 以下に我々が考察しようとする " $Al_{4n+2}$  型" のアーベル多様体は格好の題材を与えてくれると思われます. すなわち, それらは,

- ① すべての  $n \geq 1$  について実際に構成できる,
  - ② すべての  $n \geq 1$  について,  $\Delta$ stably deg.,
  - ③ Hodge cycle を原理的には計算できる,
- というような利点をもっています. ①, ②については, [H] を見ていただくとして, ③を少しだけ紹介したいと思います. 詳しくは, やはり [H] をごらん下さい.

# § 1. Branching rules

$\Delta l_n$  (以下すべて  $\mathbb{C}$  上の話) の既約表現が, Young 図形で parametrize されることは, よく知られています。しかし, その “代入” にあたる分岐則については, “すなおな” subalgebra 以外には, 統一的な結果がありません。もっときちんと言うと,

## (1.1) Def.

$\Delta l_N$  の既約表現  $(\mu)$ ,  $\Delta l_n$  の既約表現  $(\lambda)$  が与えられ, しかも  $(\lambda)$  の次数が  $N$  に等しいとすると,

$$\Delta l_n \xrightarrow{(\lambda)} \Delta l_N \xrightarrow{(\mu)} \Delta l_z$$

なる合成を考えることができる。それを  $(\lambda) * (\mu)$  と書き,  $(\mu)$  の  $(\lambda)$  にかんする branching rule,  $(\lambda) \times (\mu)$  の plethysm などとよぶ。

たとえば  $\Delta l_n$  の  $\wedge^m(\wedge^l \mathbb{C}^n)$  への自然な作用は,  $(\lambda^l) * (1^m)$  と書かれるわけです。この § では,  $(\lambda) * (\mu)$  の既約分解を recursive に計算することのできる公式を与えます。そのために, 若干の記号を導入します。

(1.2) Def.

Young図形  $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  が  
depth  $m$  で degree  $l$  とは次の式を  
満たすことである:

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > \lambda_{m+1} = \dots = 0, \\ \sum \lambda_i = l \end{cases}$$

また, Young図形全体を基底とする自由アーベル群を  
 $Y$  と書く。

(1.3) Def.

Young図形  $(\lambda)$  に対し,

$$[(\lambda)]_{\leq m} = \begin{cases} (\lambda) & \text{if } \text{depth}(\lambda) \leq m \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

と定義し, これを  $Y$  全体に linear に拡張する。

(1.4) Def.

Young図形  $(\lambda)$  に対し,

$$[(\lambda)]_a = \begin{cases} (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_a - 1) & \text{depth}(\lambda) = a \text{ とき,} \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

と定義し, これを  $Y$  全体に linear に拡張する。

(今まで、暗に、例えば  $(2, 1, 1)$  と  $(2, 1, 1, 0)$  を同一視しています。)

さて、我々の公式は次のものです。

(1.5)

与えられた自然数  $l, m$ , 及び  $1 \leq a \leq m$  なる  $a$  に対し,

$$[(l) * (m)]_a = \left[ \sum_{i=0}^{m-a} (-1)^i \{ (l) * (m-a-i) \} \otimes \{ (l-1) * (a+i) \} \otimes (i) \right]_{\leq a}$$

$$[(l) * (1^m)]_a = \left[ \sum_{i=0}^{m-a} (-1)^i \{ (l) * (1^{m-a-i}) \} \otimes \{ (l-1) * (a+i) \} \otimes (i) \right]_{\leq a}$$

これらの式を,  $\text{depth } (l) * (m) \leq m$ ,  $\text{degree } (l) * (m) = lm$  という事実と いっしょに使えず, 原理的には, いくらでも計算することができます。また, Young 図形の転置 (= 主対角線に関する折り返し) を  $T$  とかくと,

$$\{ (l) * (u) \}^T = \begin{cases} (l)^T * (u)^T & \text{degree}(l) \text{ が奇} \\ (l)^T * (u) & \text{degree}(l) \text{ が偶} \end{cases}$$

なる性質があるので, (1.5) とあわせれば, 横か縦1列

の Young 図形の branching はみなわかることになります。ですから、例えば、よく知られた  $(2) * (n)$  や  $(n) * (2)$  の公式もかんたんに証明できます。また  $[(2) * (1^n)]_1 = 0$  などという式もでてきます。

## § 2. Hodge cycle との関係

§ 0. で述べた " $\mathcal{A}_{4n+2}$  型" のアーベル多様体とは、次のようなものです:

### (2.1) $T_n$ .

与えられた自然数  $n$  に対し、次の性質をもつアーベル多様体  $A_n$  が存在する:

- ①  $A_n$  は単純で、次元は  $(4n+2)/2$ ,
- ②  $A_n$  は虚数乗法をもたない、つまり、 $\text{End } A \cong \mathbb{Z}$ ,
- ③  $\text{Lie}(\text{Hg}(A_n)_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{A}_{4n+2}$ ,
- ④  $H^1(A_n, \mathbb{C}) \cong \wedge^{2n+1} \mathbb{C}^{4n+2}$  (表現として).

(ここに  $\text{Hg}(A_n)$  は  $A_n$  のホッジ群)

そして、Hodge cycle は Hodge 群不変元として求められるので、例えば、 $A_1$  について、Hodge 予想を示そうとするのなら、

$$\dim[\wedge^{2p}(\wedge^3 \mathbb{C}^6)]^{sl_6} = 1 \quad (1 \leq p \leq 10)$$

を示せば十分です。しかも, hard Lefschetz  
により, “真中の”  $p$  が いちばん次元が大きいので,

$$\dim[\wedge^{10}(\wedge^3 \mathbb{C}^6)]^{sl_6} = 1$$

を示せばよいことになります。つまり,  $(1^3) * (1^{10})$   
の分解の中に自明な表現は重複度1であらわれることといえ  
ばよいわけです。そしてこれは  $sl_6$  の公式で, “手で” 示す  
ことができ,  $A_1$  の Hodge 予想ができてしまいます。

さて, こうなると,  $A_2, A_3$  としうべくなるのが人  
情ですが, 残念なことに (むしろ喜ぶべきことに), 次の結果  
が出てしまいます:

(2.2) Prop.

$n \geq 4$  ならば

$$\dim[\wedge^4(\wedge^{2n+1} \mathbb{C}^{4n+2})]^{sl_{4n+2}} \geq 2$$

つまり,  $n \geq 4$  のとき,  $A_n$  は divisor で生成されな  
い Hodge cycle をすでに余次元2でもってし  
まいます。ただ, 実は, 純粹に branching を計算  
する立場でいえば, この命題より詳しく  $(1^{2n+1}) * (1^4)$   
における自明な表現の重複度を求めることもできるので, 少

いは、 $\S 1$ の公式も役に立つことがあるのかもしれません。

参考文献, F. Hazama:

[H] Branching rules and Hodge cycles  
on certain abelian varieties,  
(to appear in Amer. J. Math.)