

旗多様体上のあるベクトル束に現れる 正則 Poisson 構造と完全可積分系について

阿部 拓

大阪市立大学 数学研究所

1 序

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の列からなる空間として次のように定義される：

$$Fl(\mathbb{C}^n) = \{V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の線型部分空間で } \dim_{\mathbb{C}} V_i = i \ (1 \leq i \leq n)\}.$$

ヘッセンバーク多様体は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の代数的部分集合であり，Springer fiber や Peterson variety，ルート系に付随するトーリック多様体といった， $Fl(\mathbb{C}^n)$ のよく知られた部分多様体を統一的に記述する．

本稿では，ある特別なヘッセンバーク多様体の族の上に正則なポアソン構造を与え，それが開かつ稠密なシンプレクティック葉をもち，さらに完全可積分系を許容していることを観察する．同時に，重要な可積分系の一つである戸田格子との関係も考察する．本研究は Peter Crooks 氏（Northeastern University 大学）との共同研究である ([1])．ここでは A_{n-1} 型を用いて説明するが，一般型でも同様である ([1])．

2 戸田格子

戸田格子にはいくつかの種類があり，詳しくは [4, 6, 11, 12, 13, 9, 10] などを参照されたい．ここでは，[9, 10] に基づいて戸田格子を復習する¹．まず， $SL_n(\mathbb{C})$ を行列式が 1 の $n \times n$ 複素行列からなる特殊線形群とし ($n \geq 2$)，そのリー環を $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と書く．また， $B, B_- \subseteq SL_n(\mathbb{C})$ をそれぞれ上三角行列，下三角行列からなるボレル部分群とし，それぞれのリー環を $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_- \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と書く．

行列のトレースを用いることで， $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^*$ が $X \mapsto \text{tr}(X \cdot)$ により得られ，このペアリングは $\mathfrak{b}_- \cong \mathfrak{b}^*$ を誘導する．これにより， B の余随伴表現は， B の $\mathfrak{b}_-$ への表現と

¹正確には [9, 10] の設定とは若干異なるが，本質的に同じものである

同一視される．この下で， $\mathfrak{b}_-$ の元

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の B -軌道を $\mathcal{O}_{\text{Toda}}(\subseteq \mathfrak{b}_-)$ と書く．具体的には

$$\mathcal{O}_{\text{Toda}} = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 & & & \\ u_1 & -p_1 + p_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-2} & -p_{n-2} + p_{n-1} \\ & & & u_{n-1} & -p_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \left| \begin{array}{l} p_i \in \mathbb{C}, u_i \in \mathbb{C}^\times \\ (1 \leq i \leq n-1) \end{array} \right. \right\}$$

である．構成より， $\mathcal{O}_{\text{Toda}}$ は B の余随伴軌道を $\mathfrak{b}_-$ の中に実現したものであり，余随伴軌道は Kirillov-Kostant-Souriau 形式によって正則シンプレクティック多様体になっているので， $\mathcal{O}_{\text{Toda}}$ もまた自然に正則シンプレクティック多様体になる．

さて， $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上の $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ -不変な多項式関数からなる環 $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]^{\text{SL}_n(\mathbb{C})}$ は， $n-1$ 個の代数的に独立な斉次多項式によって生成される $\mathbb{C}$ 上の多項式環である (Chevalley の定理)． $f_1, \dots, f_{n-1}$ を $\mathbb{C}$ -代数としての $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]^{\text{SL}_n(\mathbb{C})}$ の生成元とする．つまり， $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]^{\text{SL}_n(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ ．このような関数の構成法としては，例えば， $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の元 x の特性多項式 $\det(tE - x)$ の t のべき展開の係数を読み取ればよい．今，

$$\zeta := \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

とおき， $1 \leq i \leq n-1$ に対して

$$\sigma_i : \mathcal{O}_{\text{Toda}} \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto f_i(x + \zeta)$$

を考える．次の定理については例えば [9, 10] を参照されたい．

定理 2.1. $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ は $\mathcal{O}_{\text{Toda}}$ 上の完全可積分系をなす．

3 正則軌道の Slodowy スライス

リー環 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の元は，その随伴軌道が最大次元をもつとき，正則元であるという． $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の正則元全体の集合は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の稠密な開集合であり，各正則元の軌道を正則軌道と呼ぶ．

$X, H, Y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ が $\mathfrak{sl}_2$ -三つ組であるとは,

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y$$

を満たすことをいう. このとき, X と Y は同じ随伴軌道に属する. X (または Y) が正則元のとき, (X, H, Y) は正則 $\mathfrak{sl}_2$ -三つ組であるという. 今, (X, H, Y) を正則 $\mathfrak{sl}_2$ -三つ組とするとき,

$$S_{\text{reg}} := X + \ker(\text{ad}_Y) \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$$

は各正則軌道との交わりが 1 点のみでかつ横断的であることが知られている ([8, Lemma 13, Theorem 8]). この意味で, S_{reg} は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の正則軌道たちのスライスである.

以下, 積空間 $\text{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\text{reg}}$ が自然な正則シンプレクティック構造をもつことを説明する. ここで, $Z \subseteq \text{SL}_n(\mathbb{C})$ は群としての中心である.

$\text{SL}_n(\mathbb{C})$ の左作用を用いて $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ の余接束 $T^*\text{SL}_n(\mathbb{C})$ を $\text{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^*$ と同一視し, さらに 2 節と同様に行列のトレースを用いて $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^*$ を同一視すると, $T^*\text{SL}_n(\mathbb{C}) \cong \text{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ が得られる. 余接束 $T^*\text{SL}_n(\mathbb{C})$ は標準的な正則シンプレクティック形式をもっており, これを上記の同一視で移植することで $\text{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上に正則シンプレクティック形式が定まる. このとき, $\text{SL}_n(\mathbb{C}) \times S_{\text{reg}} \subseteq \text{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ はシンプレクティック部分多様体であり (例えば [5] の (1.19) より従う), さらに $\text{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\text{reg}}$ 上のシンプレクティック形式を自然に誘導する. この様にして, $\text{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\text{reg}}$ を正則シンプレクティック多様体とみなす.

さて, 2 節で考察した $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上の $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ -不変多項式 $f_1, \dots, f_{n-1}$ を思い出し, $d_i := \deg(f_i)$ ($1 \leq i \leq n-1$) とおく. $\zeta \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ を (1) 式で定めた元とし, $f_i(x + t\zeta)$ をパラメーター t に関してテイラー展開したときの t^j の係数を $f_{i,j}^\zeta(x) \in \mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]$ と書くと, $f_{i,0}^\zeta(x) = f_i(x)$ および $f_{i,d_i}^\zeta(x) = 0$ であり, 分解

$$f_i(x + \zeta) = f_{i,0}^\zeta(x) + f_{i,1}^\zeta(x) + \dots + f_{i,d_i-1}^\zeta(x)$$

が得られる. これら $f_{i,j}^\zeta$ ($0 \leq j \leq d_i - 1$) は全部で $\dim B$ 個あるので, これらの多項式を一斉に並べたものを改めて $f_1^\zeta, \dots, f_{\dim B}^\zeta$ と書き,

$$\tau_i : \text{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\text{reg}} \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad (gZ, x) \mapsto f_i^\zeta(gxg^{-1})$$

を考える.

定理 3.1. (Crooks-Rayan [2]) 関数 $\tau_1, \dots, \tau_{\dim B}$ は $\text{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\text{reg}}$ 上の完全可積分系をなす².

²正確には, [2] は $\text{SL}_n(\mathbb{C}) \times S_{\text{reg}}$ 上で考えている.

次の定理は本研究で得られた結果の一つであり、可積分系としての埋め込み $\mathcal{O}_{\text{Toda}} \hookrightarrow \text{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\text{reg}}$ が存在するということを主張するものである。

定理 3.2. ([1]) シンプレクティック多様体としての埋め込み $\mathcal{O}_{\text{Toda}} \hookrightarrow \text{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\text{reg}}$ が存在し、 τ_j ($1 \leq j \leq \dim B$) を $\mathcal{O}_{\text{Toda}}$ に制限して得られる関数たちの $\mathbb{C}$ 上の一次結合をとることで全ての σ_i が得られる。

4 ヘッセンバーグ多様体とその族

[3] や [14] に基づいて、Hessenberg variety の定義を復習しておく³。リー環の元 $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と B -安定な線形部分空間 $\mathfrak{b} \subseteq H \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ に対して、これらに付随するヘッセンバーグ多様体 $X(x, H)$ は

$$X(x, H) := \{gB \in \text{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H\}$$

で定義される。

定義より、 H に付随するヘッセンバーグ多様体の族は、

$$\mathcal{X}(H) := \{(gB, x) \in \text{SL}_n(\mathbb{C})/B \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid g^{-1}xg \in H\}$$

で与えられる。今、 $H \subseteq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は B -安定なので、 $\text{SL}_n(\mathbb{C})/B$ 上のベクトル束

$$X(H) := \text{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H$$

が自然に定まる。ここで、右辺は直積 $\text{SL}_n(\mathbb{C}) \times H$ を B 作用が定める同値関係

$$(g, x) \sim (gb^{-1}, bxb^{-1}) \quad (g \in \text{SL}_n(\mathbb{C}), x \in H, b \in B)$$

で割って得られる空間である。この下で、同型

$$\mathcal{X}(H) \xrightarrow{\cong} X(H) \quad ; \quad (gB, x) \mapsto [g, x]$$

があるので、本稿ではむしろ $X(H) = \text{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H$ をヘッセンバーグ多様体の族と見なす。

以下では、 H として

$$H_0 := \{x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid x_{ij} = 0 \ (i - j \geq 2)\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & * \\ & & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

を考え、 H_0 に付随するヘッセンバーグ多様体の族 $X(H_0) = \text{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0$ について考察する。

³ここでは A_{n-1} 型での定義のみを述べる。

以下, $X(H_0)$ がポアソン多様体であることを概説する. 3節で得られた正則シンプレクティック多様体 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は自然なポアソン構造を持っている. 詳細は [1] に譲るが, 運動量写像を用いて考えることで, このポアソン構造はその商空間 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ にポアソン構造を誘導し, 部分多様体 $X(H_0) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ はポアソン部分多様体であることが従う.

ここで,

$$H_0^\times := \{x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \mid x_{i,j} = 0 \ (i - j \geq 2), x_{i+1,i} \neq 0\} \subseteq H_0 \quad (2)$$

とおくと, やはり詳細は [1] に譲るが, ザリスキー開集合 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0^\times \subseteq X(H_0)$ は開かつ稠密なシンプレクティック葉である.

定理 4.1. ([1]) 写像 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X(H_0)$; $(gB, x) \mapsto [g, x]$ は開埋め込みであり, シンプレクティック葉 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0^\times \subseteq X(H_0)$ へのシンプレクティック同相写像である.

ポアソン多様体 $X(H_0)$ 上に完全可積分系を与えるために写像

$$\mu_0 : X(H_0) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \quad ; \quad [g, x] \mapsto gxg^{-1}$$

を考え, 3節で定義した $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 上の関数 $f_i^\zeta(x) \in \mathbb{C}[\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})]$ ($1 \leq i \leq \dim B$) をこの写像 μ_0 によって引き戻したものを $\tilde{\tau}_i := f_i^\zeta \circ \mu_0$ と書く.

定理 4.2. ([1]) 関数 $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_{\dim B}$ はポアソン多様体 $X(H_0)$ 上の完全可積分系をなし, 各 $\tilde{\tau}_i$ の $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}}$ への制限は τ_i と一致する.

この意味で, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \times_B H_0$ は完全可積分系としての埋め込みである.

5 応用

$x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ と H_0 に付随するヘッセンバーグ多様体は

$$X(x, H_0) = \{gB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H_0\}$$

であった. (2) 式で定めた開集合 $H_0^\times \subseteq H_0$ を思い出し,

$$X(x, H_0^\times) := \{gB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H_0^\times\}$$

と定めると, $X(x, H_0^\times) \subseteq X(x, H_0)$ はザリスキー開集合である.

定理 4.1 に現れた開埋め込み $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X(H_0)$ は次の可換図式を満たす.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} & \xrightarrow{\quad} & X(H_0) \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu_0 \\ & \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) & \end{array}$$

ただし, $\mu: \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z \times S_{\mathrm{reg}} \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は $\mu(gZ, x) = gxg^{-1}$ ($gZ \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/Z$, $x \in S_{\mathrm{reg}}$) で定まる写像である. μ の像は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の正則元全体のなす部分集合と一致しており, 各正則元のファイバーは非特異である ([2]).

一般に, ヘッセンバーク多様体 $X(x, H_0)$ は特異性を持つ代数多様体であるが, x が正則元のときは, 定理 4.1 の応用として次が得られる.

系 5.1. ([1]) $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ を正則元とする. このとき, $X(x, H_0)$ のザリスキー開集合 $X(x, H_0^\times)$ は非特異である. 特に,

$$\mathrm{sing}(X(x, H_0)) \subseteq \{gB \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})/B \mid g^{-1}xg \in H_0 \setminus H_0^\times\}.$$

ここで, $\mathrm{sing}(X(x, H_0))$ は $X(x, H_0)$ の特異点集合を意味する.

x として冪零な正則元をとるとき, $X(x, H_0)$ は Peterson 多様体と呼ばれている. この場合については, その特異点集合が明示的に決定されている ([7]).

参考文献

- [1] H. Abe and P. Crooks, *Hessenberg varieties, Slodowy slices, and integrable systems*, arXiv:1807.07792.
- [2] P. Crooks and S. Rayan, *Abstract integrable systems on hyperkähler manifolds arising from Slodowy slices*, arxiv:1706.05819. To appear in Math. Res. Lett.
- [3] F. De Mari, C. Procesi and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*. Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529-534.
- [4] H. Flaschka, *On the Toda lattice, I*, Phys. Rev. B **9** (1974), 1924-1925; II, Progr. Theor. Phys. **51** (1974), 703-716.
- [5] V. Guillemin and S. Sternberg, *On collective complete integrability according to the method of Thimm*, Ergodic Theory Dynam. Systems. **3** (1983), no. 2, 219-230.
- [6] R. Hermann, *Toda Lattices, Cosymplectic manifolds, Backlund Transformations, Kinks*; Part A, 15, Part B, 18, “Interdisciplinary Mathematics”, Math. Sci. Press.
- [7] E. Insko and A. Yong, *Patch ideals and Peterson varieties*, Transform. Groups **17** (2012), no. 4, 1011-1036.
- [8] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327-404.
- [9] B. Kostant, *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. in Math. **34** (1979), no. 3, 195-338.

- [10] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight ρ* , Selecta Math. (N.S.) **2** (1996), no. 1, 43-91.
- [11] J. Moser, *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential-an integrable system*, Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974), pp. 467-497. Lecture Notes in Phys., Vol. 38, Springer, Berlin, 1975.
- [12] Toda, Morikazu Studies of a non-linear lattice. Phys. Rep. **18C** (1975), no. 1, 1-123.
- [13] P. van Moerbeke, *The spectrum of Jacobi matrices*, Invent. Math. **37** (1976), no. 1, 45-81.
- [14] J. Tymoczko, *Paving Hessenberg varieties by affines*, Selecta Math. (N.S.) **13** (2007), no. 2, 353-367.