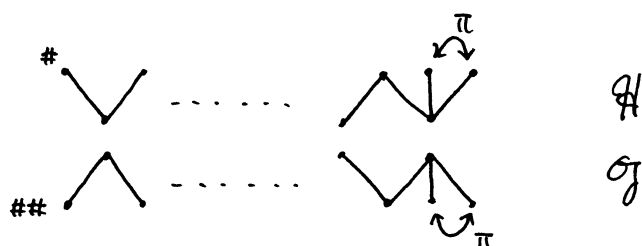


Graph の持つ symmetry より構成される subfactor

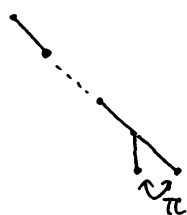
九州大学教養部 幸崎秀樹 (Hideki Kosaki)

§1 Introduction

AFD II_1 factor の index 有限な対が有限群の作用を持つ場合を考える。たとえば Dynkin 図形 D_{2n} ($n \geq 2$) に対応する coupling system



は $\mathbb{Z}_2$ -作用 (上図の symmetry π) を持つ。 π は connection 等を保存するので、上の H, G より決まる AFD II_1 factor の対 $A \geq B$ は周期 2 の自己同型 $\pi \in \text{Aut}(A)$, $\pi(B) = B$ を持つ。 $B \subseteq A \subseteq A_1 \subseteq A_2 \cdots$ を Jones tower とし、 $\pi \in \pi(e_i) = e_i$ ($i=0,1,\dots$) を満たすように一意的に A_k へ拡張する。構成法より (拡張した) π の $\{A_k \cap B\}_k$ への作用は



となる。

上の事実の応用として、次の2つの事を §2, §3 で示す。

(i) 次の条件を満たす AFD III₀ factor M が構成できる。

M は下の条件を満たす非可算無限個の subfactor N を含む。

- (a) M, N は同じ flow of weights を持つ。
- (b) $M \supseteq N$ の principal graph は A_{4n-3} ($\text{Ind} = 4\cos^2(\pi/(4n-2))$)。

(ii) AFD II₁ factor に関するよく知られた結果 " $A_5 = S_3/S_2$ " の一般化。

§2 AFD III₀ factor

$M_0 \rtimes_{\theta_0} \mathbb{Z} \in \text{AFD III}_0 \text{ factor}$ の discrete 分解とる。 $\mathcal{Z}(M_0) = L^\infty(X) \in \text{AFD type II}_\infty \text{ algebra } M_0$ の center とし、以下簡単の為に $\alpha \circ \theta_0 = \alpha(e^{-\alpha} \cdot)$ ($\alpha > 0$ 定数) とする。 $(\theta_0, \mathcal{Z}(M_0))$ に対応する ergodic な変換を (X, T) とし、 M_0 の central decomposition を

$$M_0 = \int_X^{\oplus} M_0(\omega) d\omega$$

とる。まず (X, T) の 2 対 1 ergodic extension $(\tilde{X}, \tilde{T})$ を用意する。つまり $\tilde{X} = X \times \{0, 1\}$ で

$$\tilde{T}^n(\omega, i) = (T^n \omega, \varphi_{\omega, n}(i))$$

と表示できる。但し $\varphi: (\omega, n) \in X \times \mathbb{Z} \rightarrow \varphi_{\omega, n} \in \Sigma_2 (\cong \mathbb{Z}_2)$ は cocycle equation $\varphi_{T\omega, m} \varphi_{\omega, n} = \varphi_{\omega, n+m}$ を満たす。

まず §1 の A, π を利用し, $A \otimes M_0$ の自己同型 θ を

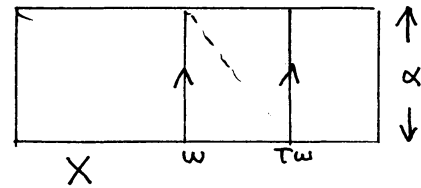
$$(\theta(x))(\omega) = (\pi^{\varphi_{T\omega, 1}} \otimes (\theta_0)_{T^{-1}\omega})(x(T\omega))$$

と定義する。ここで $x = \sum_{\omega} x(\omega) d\omega$ ($x(\omega) \in A \otimes M_0(\omega)$) 且つ $\theta_0 = \{(\theta_0)_{\omega}\}$ ($(\theta_0)_{\omega}: M_0(\omega) \xrightarrow{\cong} M_0(T\omega)$) とする。 θ は部分環 $B \otimes M_0$ を (globally) invariant にする事に注意して

$$M = (A \otimes M_0) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z} \supseteq N = (B \otimes M_0) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$$

と置く。 $A \otimes M_0$ 上の $\pi_A \otimes \pi$ の θ による scale の±れ方は、 A, B, π と無関係である。従って

M, N (及び $M_0 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$) は同じ flow of weights を持つ。(右図)



“II型部分” $A \otimes M_0 \supseteq B \otimes M_0$ は principal graph の (constant) field $\{(A_k \cap B') \otimes L^{\infty}(X)\}_k$ を与える。

たとえば $n=3$ (つまり D_6) の時、

θ の定義より $\langle (1-e_0, ve_1, ve_2) \cdot$

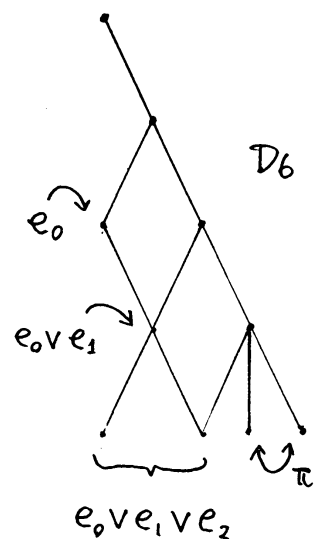
$\{(A_3 \cap B') \otimes L^{\infty}(X)\}, \theta \rangle$ の定める

(X, T) の 2対1 extension が始めに

与えられた $(\tilde{X}, \tilde{T}) \rightarrow (X, T)$ となる。

$(\tilde{X}, \tilde{T})$ のエルゴード性より $M \supseteq N$ の

principal graph $\{((A_k \cap B') \otimes L^{\infty}(X))_{\theta}\}_k$



は $\{(A_n \cap B')_0\}_k$ と同じで. Dynkin 図形 A_{n-3} となる。

始めの extension $(\tilde{X}, \tilde{T}) \rightarrow (X, T)$ が $M \geq N$ の inclusion data のみで書いた事に注目しよう。非可算無限個の非同型 (extension として) な 2 対 1 ergodic extension を持つ (X, T) から出発しよう。非同型の $(\tilde{X}, \tilde{T})$ 及び $(\tilde{X}_1, \tilde{T}_1)$ から生じる 2 つの inclusion $M \geq N, M_1 \geq N_1$ は上の事より non-conjugate である。

AFD III_0 factor の index 3 の subfactor の分類 ([K]) は. 特に graph が A_5 で同じ flow of weights を持つ subfactor は一般に非可算無限個ある事を示している。同じ現象が A_{n-3} でも起きている訳である。ここでの構成法は [L], [K-L] の例の作りの一般化である。

§3 AFD II_1 factor

以下の結果は II_1 -factor の結果として self-contained な形に書け, しかも一般化可能である。([C-K]) しかし, ここでは III 型 factor を経由して説明する。

§2 の構成法は III_λ ($0 < \lambda < 1$) の場合でも可能である。

([L]) 但しこの場合には $M_0 = R_0$, $\alpha_0 \theta_0 = \lambda \alpha$ となり。

(X, T) は trivial になる。この 2 対 1 extension

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}: & \{ \tilde{X} \\ & \cdot \quad \times \end{array}$$

より決まる $\theta \in \text{Aut}(A \otimes R_{01}, B \otimes R_{01})$ は単に

$$\theta(a \otimes x) = \pi(a) \otimes \theta_0(x)$$

である。これより III_λ factor の (1' かつ A_{4n-3} の) 対

$$M = (A \otimes R_{01}) \rtimes_{\pi \otimes \theta_0} \mathbb{Z} \supseteq N = (B \otimes R_{01}) \rtimes_{\pi \otimes \theta_0} \mathbb{Z}$$

が得られる訳だが、 N は index 2 の subfactor

$$P = (B \otimes R_{01}) \rtimes_{(\pi \otimes \theta_0)^2} (2\mathbb{Z})$$

を持つ。(P は type III_{λ^2}) $M \supseteq P$ の index は $2 \times 4 \cos^2(\pi/4n-2)$

であるが、直接計算により $M \cap P' = \mathbb{C}1$ は証明出来る。 M

$\supseteq P$ は type III_μ factor ($\log \lambda / \log \mu \notin \mathbb{Q}$) と tensor し type III_1

とし、次に modular action による接合積を考える事により、

AFD II_∞ factor (II_1 と言っても同値) の対が得られる。簡単

な計算により、これらの II_∞ factor は次のように表示出来る事

がわかる。

$$\check{M} = (A \otimes R_{01} \otimes R_{01} \otimes L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt)) \rtimes_f (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

$$\supseteq \check{P} = (B \otimes R_{01} \otimes R_{01} \otimes L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt)) \rtimes_f (2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

但し作用 f は

$$f(a \otimes x \otimes y \otimes f) = \pi^n(a) \otimes \theta_0^n(x) \otimes \theta_\mu^m(y) \otimes f_{-n \log \lambda - m \log \mu}$$

で与えられる。ここで $\theta_\mu \in \text{Aut}(R_{01})$ は $\text{tr} \circ \theta_\mu = \mu \text{tr}$ を満た

し、 f_x は $f \in L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt)$ の x による translation を表わす。

$\check{M} \supseteq \check{P}$ の内には N より生じる II_∞ factor

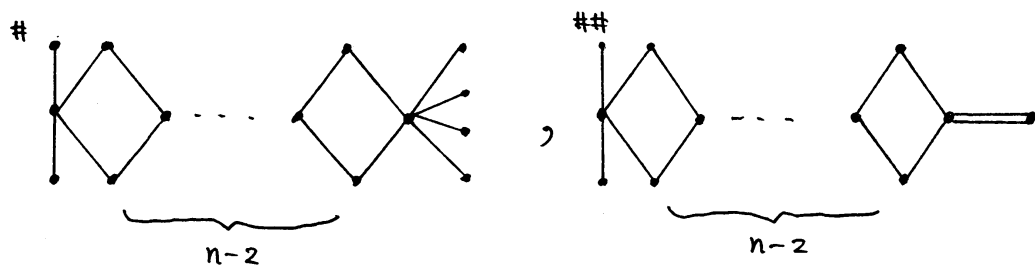
$$\check{N} = (B \otimes R_{01} \otimes R_{01} \otimes L^\infty(\mathbb{R}, e^t dt)) \rtimes_f (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

が与っている。 $\check{M} \supseteq \check{N}$ の principal graph が A_{4n-3} である事、 $\check{M} \cap (\check{P})' = \mathbb{C}1$ 等が直接計算により示せる。 $\check{M} \supseteq \check{P}$ の principal graph を計算する事により次の事がわかる。

$M \supseteq N$ を AFD II_1 factor の対で、その principal graph が A_{4n-3} とする。この時 N の index 2 の subfactor P ($[M:N] = 8 \cos^2(\pi/(4n-2))$) で下の条件を満たす物が取れる。

(i) $M \cap P' = \mathbb{C}1$

(iii) $M \supseteq P$ 及び $J_M P' J_M \supseteq M$ の principal graph は



で与えられる。

Remarks

(i) $n=2$ (A_5 の場合)、上の 2 つの graph は



となる。一番目のグラフより $M = P \rtimes G$ ($\#G = 6$) となり、二番目のグラフより $G = S_3$ が変わる。

(iii) 上の 2 つのグラフが異なるので、 $M \supseteq P$ は $X_1 \otimes X_2$

$\cong X_3 \otimes X_4$ (X_i は II_1 -factor として $[X_1 : X_3] = 4 \cos^2(\pi/4n-2)$,
 $[X_2 : X_4] = 2$) と conjugate である。

References

- [C-K] M. Choda and H. Kosaki, work in progress.
- [K] H. Kosaki, talk at Niigata Univ., Aug., 1991.
- [K-L] H. Kosaki and R. Longo, A remark on the minimal index of subfactors, to appear in J. Funct. Anal.
- [L] P. H. Loi, Automorphisms of subfactors, preprint.