

## フィルタリングの手法の多変量への拡張とその応用<sup>1</sup>

広島大学・大学院理学研究科 井上 昭彦 (Akihiko Inoue)  
Graduate School of Science, Hiroshima University

北海道大学・大学院理学研究院 笠原 雪夫 (Yukio Kasahara)  
Graduate School of Science, Hokkaido University

Mohsen Pourahmadi, Department of Statistics, Texas A&M University

### 1 イントロダクション

次の形の連続時間定常過程  $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$  を考える:

$$U(t) = \int_{-\infty}^t c(t-s) dW(s), \quad t \in \mathbb{R}.$$

ここで,  $(W(t))_{t \in \mathbb{R}}$  は 1 次元のブラウン運動である. 定常増分過程  $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$  を次により定義する:

$$Y(t) = W(t) - \int_0^t U(s) ds = W(t) - \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^s c(s-u) dW(u) \right\} ds. \quad (1.1)$$

次のフィルトレーションを考える:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t &:= \sigma(W(u) : -\infty < u \leq t), \\ \mathcal{F}_t &:= \sigma(Y(u) : 0 \leq u \leq t) \end{aligned}$$

ブラウン運動でなく  $(Y(t))$  で drive される記憶を持つ (ファイナンス等の) モデルを考えると, 我々はフィルトレーションとしては,  $\{\mathcal{F}_t\}$  を取りたい. しかし,  $(W(t))$  と  $(U(t))$  のいずれも ( $\{\mathcal{G}_t\}$ -適合ではあるが)  $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合ではない. 特に, (1.1) は  $\{\mathcal{F}_t\}$  に関してセミマルチンゲール表現ではないので, 確率解析をそのまま適用することはできない. これが新生過程とよばれる別のブラウン運動  $(B(t))_{t \geq 0}$  を考える理由である. 結果として  $\{\mathcal{F}_t\}$  に関し,  $(B(t))$  と  $(Y(t))$  はともにセミマルチンゲールになる.

より正確には次のタイプの定理が成り立つ (細かい条件等は省略する):

**定理 1.1**  $(B(t))$  を次により定める:

$$B(t) = Y(t) + \int_0^t E[U(s) | \mathcal{F}_s] ds.$$

すると,  $(B(t))_{t \geq 0}$  は  $\{\mathcal{F}_t\}$ -ブラウン運動であり, 次の形の表現が成り立つ:

$$\begin{aligned} Y(t) &= B(t) - \int_0^t \left\{ \int_0^s k(s,u) dY(s) \right\} ds, \\ Y(t) &= B(t) - \int_0^t \left\{ \int_0^s l(s,u) dB(s) \right\} ds. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>これは著者たちの結果の announcement である. 証明を含む詳細は, 他所で発表予定である

上の定理を含むフィルタリングの理論については, [10] を参照せよ. しかしながら, [10] 等にある一般論は,  $k(s, u)$  と  $l(s, u)$  を  $c(s)$  から計算する方法は与えていない. 第 1 および第 2 の著者たちは, [2] において予測理論に基づくこの計算法を開発した. 例えば,

$$c(t) = pe^{-(p+q)t}, \quad p > 0, \quad q > -p$$

のときには, 次のようになる ([8] も参照せよ):

$$k(t, s) = p(2q + p) \frac{(2q + p)e^{qs} - pe^{-qs}}{(2q + p)^2 e^{qt} - p^2 e^{-qt}},$$

$$l(t, s) = pe^{-(p+q)(t-s)} \left\{ 1 - \frac{2pq}{(2q + p)^2 e^{2qs} - p^2} \right\}.$$

この結果のファイナンスのモデルへの応用については, [2, 7, 8] 等を見よ.

我々は, これらの結果を (信用リスクのモデル等に応用するために) 本質的に多変量の場合に拡張したいと考えているが, 今のところ, この目的は達成できていない. しかし, 最近, 著者たちは離散時間の過程に対する類似の問題に対して突破口を見出した. すなわち, [4, 5, 6, 3, 9] 等の離散時間モデルに対する結果を多変量の過程に拡張する方法を見出した. 我々のここでの目的は, この離散時間のモデルに対する新しい数学上の手法・結果を紹介することである. 実は [2] の連続時間のモデルに対する手法・結果は, [4, 5, 6, 3, 9] 等で開発した手法を連続時間モデルに移植することにより得られたものであるので, この多変量離散時間モデルに対する手法も同様に多変量連続時間モデルに移植されて上記の目的の達成に寄与することが期待される.

## 2 有限予測係数の表現定理

$(X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  は, 確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上に定義された,  $\mathbb{C}^q$ -値, 平均 0 の純非決定的な弱定常過程とし, またその rank は  $q$  (full rank) であるとする.  $H$  を,  $X_j, j \in \mathbb{Z}$ , の成分たちが  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  において張る複素ヒルベルト空間とする.  $I \subset \mathbb{Z}$  に対し,  $H_I$  は,  $X_j, j \in I$ , の成分が張る  $H$  の閉部分空間とし,  $P_I$  を  $H$  から  $H_I$  への射影作用素とする. 時系列解析において,  $P_I Y$  は  $\{X_j : j \in I\}$  に基づく  $Y$  の最良線形予測を表す.

我々は, 次の有限予測係数  $\Phi_{n,i}$  に興味がある:

$$P_{[-n, -1]} X_0 = \Phi_{n,1} X_{-1} + \cdots + \Phi_{n,n} X_{-n}. \quad (2.1)$$

ここで,  $P_{[-n, -1]} X_0$  は  $X_0$  の成分ごとの射影である:  $X_0 = {}^t(X_0^1, \dots, X_0^q)$  に対し,

$$P_{[-n, -1]} X_0 := {}^t(P_{[-n, -1]} X_0^1, \dots, P_{[-n, -1]} X_0^q).$$

$\Phi_{n,i}$  は  $q \times q$  の複素行列であることを注意せよ.

$w(\lambda)$  を  $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  の  $q \times q$  スペクトル密度行列とする:

$$E[X_n X_0^*] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\lambda} w(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi}.$$

ここで,  $A^* := {}^t \bar{A}$  である.  $w$  に対し, 次の二つの分解が一意に存在する:

$$w(\lambda) = h(e^{i\lambda}) h(e^{i\lambda})^*, \quad w(-\lambda) = \tilde{h}(e^{i\lambda}) \tilde{h}(e^{i\lambda})^*.$$

ここで,  $h$  と  $\tilde{h}$  は行列値 Hardy 空間  $H_{q \times q}^2$  に属する行列値外関数であり, また,  $h(0)$  と  $\tilde{h}(0)$  は正定値である.

もし  $q = 1$  ならば, 次が成り立つ:

$$h(z) = \exp \left( \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z} \log w(\lambda) d\lambda \right), \quad \tilde{h}(z) = \overline{h(\bar{z})} \quad (|z| < 1).$$

しかし,  $q > 1$  のときには, 上記の  $q = 1$  の場合のような  $h$  と  $\tilde{h}$  の間の簡単な関係式やそれらに対する明示表現定理は知られていない.

前向き MA 係数  $C_n$  と後ろ向き MA 係数  $\tilde{C}_n$  を次により定義する:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n C_n, \quad \tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{C}_n \quad (|z| < 1).$$

また, 前向き AR 係数  $A_n$  と後ろ向き AR 係数  $\tilde{A}_n$  を次により定義する:

$$-h^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A_n, \quad -\tilde{h}^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{A}_n \quad (|z| < 1).$$

我々は, 相係数  $\beta_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , を次により定義する:

$$\beta_j := - \int_0^{2\pi} e^{-in\lambda} h(e^{i\lambda})^{-1} \tilde{h}(e^{-i\lambda}) \frac{d\lambda}{2\pi}.$$

$h(e^{i\lambda})^{-1} \tilde{h}(e^{-i\lambda})$  はユニタリ行列であるので, この積分は存在する. 仮定  $\sum_{j=0}^{\infty} |A_j|^2 < \infty$  (pure minimality) の下では, 次が成り立つ:

$$\beta_n = \sum_{j=0}^{\infty} A_{j+n} \tilde{C}_j.$$

ここで,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq q}$  に対し,

$$|A| := \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2}$$

である.

次は (2.1) の有限予測係数  $\Phi_{n,j}$  に対する明示表現定理である.

**定理 2.1**  $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  は purely minimal, すなわち  $w^{-1} \in L^1$  を満たすとする. このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,j} = & C_0 A_j + C_0 \sum_{v_1=0}^{\infty} \beta_{n+1+v_1} \tilde{A}_{v_1+(n+1-j)} \\ & + C_0 \sum_{v_2=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{\infty} \beta_{n+1+v_1} \beta_{n+1+v_1+v_2}^* A_{v_2+j} \\ & + C_0 \sum_{v_3=0}^{\infty} \sum_{v_2=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{\infty} \beta_{n+1+v_1} \beta_{n+1+v_1+v_2}^* \beta_{n+1+v_2+v_3} \tilde{A}_{v_3+(n+1-j)} \\ & + C_0 \sum_{v_4=0}^{\infty} \sum_{v_3=0}^{\infty} \sum_{v_2=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{\infty} \beta_{n+1+v_1} \beta_{n+1+v_1+v_2}^* \beta_{n+1+v_2+v_3} \beta_{n+1+v_3+v_4}^* A_{v_4+j} \\ & + \cdots \end{aligned}$$

定理 2.1 は,  $q = 1$  の場合には pure minimality よりも強い仮定の下で, [6] で証明されている. 従って, 定理 2.1 は多次元  $q > 1$  の場合への拡張であると同時に, 1 次元  $q = 1$  の場合の改良になっている.

### 3 ベクトル値 ARFIMA 過程に対する Baxter の不等式

定理 2.1 はいろいろな応用があるが, ここではそれを用いて得られるベクトル値 ARFIMA 過程に対する Baxter の不等式を紹介する.

弱定常過程  $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  は次のスペクトル密度を持つとする:

$$w(\lambda) = |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} Q(\lambda).$$

ここで,  $d \in (0, 1/2)$  である. また  $Q$  は正定値の  $q \times q$ -行列値関数で, すべての成分が  $e^{i\lambda}$  の有理関数であり, さらに

$$\det Q(\lambda) \neq 0 \quad (\lambda \in [0, 2\pi))$$

を満たすとする. このとき, 弱定常過程  $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  はベクトル値 **ARFIMA (autoregressive, fractionally integrated, moving average) 過程**とよばれ, 長期記憶を持ち,  $H := d + \frac{1}{2}$  が **Hurst 指数**にあたる.

$q \times q$  行列である無限予測係数  $\Phi_i$  を次により定義する:

$$P_{(-\infty, -1]} X_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j X_{-j}.$$

次が成り立つ:  $\Phi_j = C_0 A_j$ . すなわち,  $\Phi_j$  は定理 2.1 の無限級数の第一項に等しい.

次がベクトル値 ARFIMA 過程に対する Baxter の不等式である.

**定理 3.1**  $0 < d < 1/2$  とする. このとき, ある  $M \in (0, \infty)$  があって次が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^n |\Phi_{n,j} - \Phi_j| \leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_k| \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

長期記憶過程に対する Baxter の不等式は,  $q = 1$  の場合に (ARFIMA 過程に対して) [6] において初めて証明された. 定理 3.1 はこれの多次元  $q > 1$  への拡張である.

## References

- [1] V. Anh and A. Inoue, Financial markets with memory I: Dynamic models, *Stoch. Anal. Appl.* **23** (2005), 275–300.
- [2] V. Anh, A. Inoue and Y. Kasahara, Financial markets with memory II: Innovation processes and expected utility maximization, *Stoch. Anal. Appl.* **23** (2005), 301–328.
- [3] N. H. Bingham, A. Inoue and Y. Kasahara, An explicit representation of Verblunsky coefficients, *Statist. Probab. Lett.* **82** (2012), 403–410.
- [4] A. Inoue, Asymptotics for the partial autocorrelation function of a stationary process, *J. Anal. Math.* **81** (2000), 65–109.
- [5] A. Inoue, AR and MA representation of partial autocorrelation functions, with applications, *Probab. Theory Related Fields* **140** (2008), 523–551.
- [6] A. Inoue and Y. Kasahara, Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications, *Ann. Statist.* **34** (2006), 973–993.
- [7] A. Inoue and Y. Nakano, Optimal long-term investment model with memory, *Appl. Math. Optim.* **55** (2007), 93–122.

- [8] A. Inoue, Y. Nakano and V. Anh, Linear filtering of systems with memory and application to finance, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* (2006), Art. ID 53104, 26 pp.
- [9] Y. Kasahara and N. H. Bingham, Verblunsky coefficients and Nehari sequences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [10] R. S. Liptser and A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes I*, Springer, 2001