

数の幾何学と類体論

名大理 久保田 富雄

アーベル拡大体 K/F があるとき, F の因子 f を十分大きくとれば, $\text{mod } f$ で 1 に合同な F のイデアルについては, Artin 記号が 1 になる. これが, いわゆる Artin 型相互法則であって, 類体論の全成果を殆んど完全に集約する命題である. この命題は, 一般の場合には, どの方法によるにしても, 多くの複雑な議論の末に始めて証明されているのであるが, K/F が円分拡大の場合には, 極めて簡明かつ直観的に結論することができる.

一方, F が 1 の n 乗根を含むときには, 古典的なベキ剰余の相互法則というものがあり, そのひとつの形は

$$(1) \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n, \quad (\beta \equiv 1 \pmod{n^2}),$$

とかける. ただし, α, β は F の整数で, $(\alpha\beta, n) = 1$ である. また, (1) と並んで, F の任意の整数 $\alpha (\neq 0)$ について

$$(2) \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n = 1, \quad (\beta \equiv 1 \pmod{n^2\alpha}),$$

という形の相互法則もなりたつ。(1)は(2)を完全にではないが含んでいる。また、今の場合あまり重要なことではないが、(1)、(2)においては、 β がさらに総正という条件が必要となることもある。

ところで、ここで主張したいことは、(2)という命題が、全く拡大体を考えることなく、 F の整数に関する格子点の幾何学と呼ばれるタイプの考察 (linear diophantine geometry) によって、極めて直観的に証明し得るということである。(2)は、 F のクンマー拡大体に関する Artin 型相互法則に他ならないから、(2)を用いて、クンマー拡大 K/F の類体論が直ちに得られ、それを局所化するといったような、すでに十分完成している途を通して (1) に至ることができる。また、一般アーベル体が、内分拡大とクンマー拡大の合成で得られることを用いて、一般の場合の類体論を簡明な形で再構成する途も用けるわけである。

しかし、さらに注意すべきことは、(2)から(1)を出すのは、類体論の方法によらなくとも、本講究録 378 (1980) にごく大まかに述べたとおり、 F におけるフーリエ解析的方法だけで足りるのであり、これによって、拡大体などよりも古い

起原を持つと考えられる (1) のような相互法則が、当初の姿のまま、基礎体自体の性質としてとらえられるようになるというところである。今までは、(1) が逆に全類体論に依存するという不自然な状態であった。

以下、(2) の幾何学的とりあつかい方について説明することにするが、結果を一般の場合に完全にまとめ上げるためには、なお相当の日時を要するので、ここでは、とりあえず手もとに用意してあったノートを呈示して、アイデアの一端を示すに止めたい。従って考察は $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $n = 4$ の場合に限られ、方法そのものも、一般の場合にはもう一段の飛躍をしないと適用困難な、比較的素朴なもの (ノートの中で first method と書いてあるもの) しか説明されないが、現在のところ止むを得ないことである。

ノ — ト

§1. 有理数体における平方剰余

有理数体における平方剰余の相互互列の証明について、簡単な見直しを行う。

実直線を $\frac{1}{2}$ の倍数で区切り、長さ $\frac{1}{2}$ の開区間の集合を作る。 $(0, \frac{1}{2})$ には符号 $+1$ をあたえ、あと交互に $+1, -1$ をあたえる。

$a \neq 0$ を任意の有理整数とし、区間 $(0, \frac{1}{2})$ を a 倍した区間 $(0, \frac{1}{2}a)$ を作ると、これは始めにあたえた長さ $\frac{1}{2}$ の区間の合併になる。ここで、 $\frac{1}{a}$ に短縮する写像をほどこすと、 $(0, \frac{1}{2})$ が長さ $\frac{1}{2|a|}$ の区間の合併となる。実際、区間の符号も、そのまま小さな区間に持ちこまれるものとなる。

$n > 0$ を有理整数で、 $(2n, 2n+1) = 1$ となるものとし、区間 $(0, \frac{1}{2})$ に含まれる $\mathbb{Z}$ の成分を考えると、これらは $(0, \frac{1}{2})$ 内にあたえられている小区間の端点になることはない。

そして、これらの b 分位の属する小区間の符号をすべてかき足すものが、Gauss の lemma によって $\left(\frac{a}{b}\right)$ に等しい。

今、 v 個の小区間 $\left(\frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}\right)$, $(0 \leq k < |a|)$,

をとり、この中に含まれる b 分位の個数を考察する。この

ためには、この区間を b 倍し、この中に入る $\mathbb{Z}$ の元の

個数をしらべればよい。 $b \neq 1$ とし、 $b = b_0 + 1$ と

おくと、

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{2a}b, \frac{k+1}{2a}b\right) &= \left(\frac{k}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k}{2a} + \frac{1}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{k}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}\right] \\ &\quad \cup \left(\frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k}{2a}, \frac{k+1}{2a}b_0 + \frac{k+1}{2a}\right) \end{aligned}$$

であるから、もし b_0 が $2a$ の倍数ならば、最後の式の

第1の区間には丁度 $\frac{b_0}{2a}$ 個の $\mathbb{Z}$ の元が入り、第2の区間には

はひとつも入らない。従ってさらに b_0 が $4a$ の倍数ならば、

区間 $\left(\frac{k}{2a}b, \frac{k+1}{2a}b\right)$ に入る有理整数の個数は

k に無関係に偶数であり、ひとつひとつの区間について

符号の積が 1 になるから、もちろん $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$ ということになる。

上記の区間の式は、 $a < 0$ の時は、必ずしも右側にある数が入ると思えずに読めばよい。しかし、 $a > 0$ という条件は本質的である。これがないと、区間が合併しでかけられない。

ともかく、これで任意の有理整数 $a \neq 0$ について、 $h \in \mathbb{Z}$, $h \equiv 1 \pmod{4a}$ ならば、 $\left(\frac{a}{h}\right) = 1$ であることが示された。

区間 $(0, \frac{1}{2})$ は、実直線の変換 $x \rightarrow x+1$ と $x \rightarrow -x$ で生成される非可換な群、基本領域という意味をもっている。

§2. Gauss 数体による 4 乗剰余 (first method)

Gauss 数体の 4 乗剰余についても、前 § で説明した方法は原則として適用できる。であるが、通常のように整数の加群の基本領域として正方形を用いるといった考え方はよく行かない。 $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4$ をあつかうためには、 α にも β にも depend する基本領域をとる必要がある。まず、比較的

直観的であつたやうな方法について述べる。これから問題となるのは $\mathbb{C}/\mathfrak{o}$ に相当する基本領域ではないかと、 $z \rightarrow z + \delta$, $(\delta \in \mathfrak{o})$, と、 $z \rightarrow iz$ とで生成される群の基本領域である。

複素平面から $\frac{1}{2}$ の倍数をすべてとり除き、3角形を $\operatorname{Re} z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ および $\operatorname{Im} z \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ で仕切られた正方形の合併にやる。但し、正方形 $0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2}, \frac{i}{2}$ については、 $(0, \frac{1}{2})$ と $(\frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ との二辺だけが境界として属するものとし、0のまわりの4つの正方形については、 i による回転で対応する辺をそれぞれ属させる。次に $\mathfrak{o}$ の元による平行移動ですべての正方形について辺の所屬を定める。

一般に、 $\mathbb{C}$ 上の平行四辺形で、 a, b, c を3頂点とし、 $[a, b), [a, c)$ だけが境界を含むものを (c, a, b) と書く。今問題の基本領域として、 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ をとったわけである。

$\frac{1}{2}$ の倍数は、基本領域というものの性格等を考慮して、便宜上除いておくのであるが、実際にはそのようなものが重要になることはないので、個々の議論については、

いちいち注意しなくても、誤りを生じることはない。しかし、たとえば $(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ といったときも、 $\frac{1}{2}$ は除かれているのである。

正方形 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ に符号 $+1$ をあたえ、これを $i, -1, -i$ で回転した正方形にはそれぞれ別の符号をあたえる。次にこれらの正方形と $\bmod \psi$ で合同な正方形にはすべて同じ符号をあたえる。このようにして、 $\mathbb{C}$ を分割して作ったすべての正方形に符号があたえられる。

$\alpha \in \psi$ を $\alpha \neq 0, \alpha \equiv 0 \pmod{2}$ とおき、 $z \rightarrow \frac{z}{\alpha}$ という変換を行うと、今まで考えていた一辺 $\frac{1}{2}$ の正方形による $\mathbb{C}$ の分割が、一辺 $\frac{1}{2\alpha}$ の小正方形による分割に変換される。このとき、小正方形にも前の符号をひきつらばあたえ、 ψ の 2α 分は考察から除く。

Prop. $z \equiv z' \pmod{\frac{1}{2}}$ なら、 z の属する小正方形の符号と z' のそれは一致する。一方が辺上にあれば他方もある。

証. $\alpha z \equiv \alpha z' \pmod{\frac{\alpha}{2}}$ で、 $\frac{\alpha}{2} \in \psi$ (q.e.d.)

ここで $\beta \in \mathbb{C}$ を $\beta \neq 0$ かつ $\beta_0 = \beta - 1 \neq 0$ である

ようにとる. β_0 は 後にいろいろな数で割り切れるように

する. であるが, ここでまず, 有向線分の β 変形という

ものを定義する. これは, a から b に向いた, 南南を

向かう線分, たとえば (a, b) について, これを

$= \frac{\beta_0 + 1}{\beta}$ に対応する折線 $\frac{\beta_0}{\beta} \vec{ab} \cup \frac{1}{\beta} \vec{ab}$ に

おきかえることである. かくく書けばこの折線

は, $(a, a + \frac{\beta_0}{\beta}(b-a)] \cup (a + \frac{\beta_0}{\beta}(b-a), b)$ と

いうことになる.

$\operatorname{Re} \alpha$ と $\operatorname{Im} \alpha$ の最小公倍数を $A(>0)$ とする. もし,

$\operatorname{Re} \alpha$ か $\operatorname{Im} \alpha$ の一方が 0 のときは他方の絶対値を A と

する. 正方形 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ の辺 $(0, \frac{1}{2})$ を A 等分し,

各部分を正の方向に β 変形する. 次に辺 $(\frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$

を同様に A 等分し, $+i$ 方向に各部分を β 変形する.

残りの 2 辺も同じように, それぞれ対辺と同じ方向に

変形する. このよゝにして得られた折線でかゝれた領域を D_0 とする. 但し境界は $(0, \frac{1}{2})$ と $(\frac{1}{2}, \frac{1+i}{2})$ からできた部分だけが D_0 に属するものとする. $\pm D_0, \pm i D_0$ および $\{ \frac{1}{2} \}$ の元による平行移動で $\mathbb{C}$ ($\frac{1}{2}$ の倍数を除く) は覆われる.

Prop. $\mathbb{C}$ 上に $\operatorname{Re} z \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}, \operatorname{Im} z \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}$ で定まる網を作り, この網を A に縮小した網を作ると, 大小の網の交点の $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ はいずれも $\frac{1}{A}$ の倍数である.

証. $\operatorname{Re} \alpha$ か $\operatorname{Im} \alpha$ が 0 のときは明らかであるから, $\operatorname{Re} \alpha \neq 0, \operatorname{Im} \alpha \neq 0$ とする. 大小の網の交点は

$$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z = a \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Re} \alpha z, \operatorname{Im} \alpha z = b \in \mathbb{Z}$$

を 4 つの組合わせて連立にしてできる方程式から得られる.

$$z = x + iy \text{ とおけば, } \operatorname{Re} \alpha z = \operatorname{Re} \alpha \cdot x - \operatorname{Im} \alpha \cdot y, \quad \operatorname{Im} \alpha z = \operatorname{Im} \alpha \cdot x + \operatorname{Re} \alpha \cdot y. \quad \text{これにより, 得られる角の分母}$$

は $\Im \alpha$ と $\operatorname{Re} \alpha$ である. (q. e. d.)

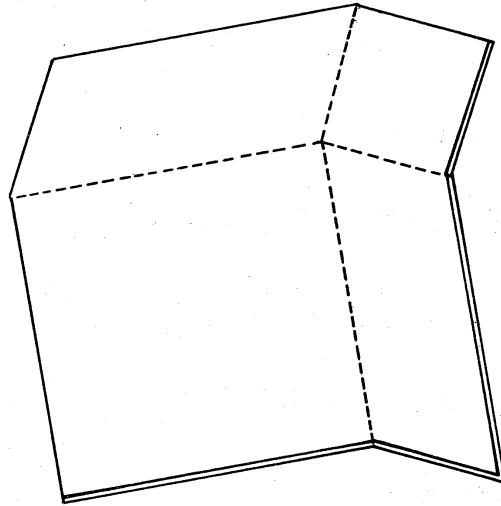
この Prop. 1により, 大きな網の各正方形を D_0 またはその i のべきによる回転と $\bmod \alpha$ で合同なように変形してから $\frac{1}{\alpha}$ にしても, 入小の網の交差は不変である.

以後 $\mathbb{C}$ はこのような変形された小さな網の構造が入れられ, 各区画には変形する前の正方形と同じ符号があたえられ, すべての $A\alpha$ 分度 α は $\mathbb{C}$ から除かれてしまうとする.

D_0 に属す α の β 分度 ($\neq 0$) につき, それに属す小さな変形された網の区画をなす小領域の符号を対応させ, それらすべてをかければ, Gauss の lemma によって $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4$ が得られる. 符号をひとつの小領域に属す β 分度 α についてかけあわせたものを調べるには, $\alpha \rightarrow \beta\alpha$ によって $\mathbb{C} - \{A\alpha \text{ 分度}\}$ を $\mathbb{C}$ に写し, 小領域の像の中にどのくらい α の元が入るかを見ればよい.

以下 $\beta = \beta_0 + 1$, $\operatorname{Re} \beta_0 > 0$ とする. このようにすれば, 線分 α を β 変形した時に生じる 2 つの線分の

各角は鈍角となり, D_0 は図のような領域および



これを右と上と

へ平行移動し

A^2 個の領域の
で覆われる。(2重線
は境界の所屬)

これから, C を

(むしろは $C - (A\alpha)$ を)

覆う $\frac{1}{\alpha} D_0$ と合同 ($\text{mod } \frac{1}{\alpha}$) な

小領域と D_0 との共通部分に, 何個の β 分復が
入るかということについて考える.

まず, どのような小領域が全く D_0 に含まれてしまう
場合とあつかう. このときは, 上図の説明において示された
ように, 問題はさらに小さな領域

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{A\alpha} + \frac{i^c}{A\alpha} \left[\left(0, \frac{\beta_0}{\beta}, \frac{\beta_0}{\beta}(1+i) \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{\beta}, 1, 1 + \frac{\beta_0}{\beta}i \right) \right. \\ & \left. \cup \left(\frac{\beta_0}{\beta}i, \frac{\beta_0}{\beta}(1+i), i + \frac{\beta_0}{\beta} \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{\beta}(1+i), 1 + \frac{\beta_0}{\beta}i, 1+i \right) \right] \end{aligned}$$

に帰着する. $\mu \in \mathfrak{o}$ である. ここで, $\beta_0 \equiv 0 \pmod{A\alpha}$

と仮定して, この領域を β 倍し, 全平面 $\mathbb{C}$ の中へ写すと,

その像は $\text{mod } \mathfrak{o}$ で

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{A\alpha} + i^c \left[\left(0, \frac{\beta_0}{A\alpha}, \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i) \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha}, \frac{\beta_0+1}{A\alpha}, \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i) + \frac{1}{A\alpha} \right) \right. \\ & \left. \cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha}i, \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i), \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i) + \frac{i}{A\alpha} \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i), \frac{\beta_0}{A\alpha}(1+i) + \frac{1}{A\alpha}, \frac{\beta_0+1}{A\alpha}(1+i) \right) \right] \end{aligned}$$

となる. この式の最後に現われている正方形は, さらに $\text{mod } \mathfrak{o}$ で

$$\frac{\mu}{A\alpha} + i^c \left(0, \frac{1}{A\alpha}, \frac{1+i}{A\alpha} \right)$$

に合同であるが, この正方形は となりあう 4 つ, $A\alpha$ 分だけ変位

とされる変形されていくものであり, これを変形して領域は D_0 に

入っている. なぜなら, 最初のとり方がこのようになっているからである.

故に, 上式の正方形には, 0 以外の整数点は D_0 の位置

から入り得ず, 0 も境界の所属から見て入り得ない.

ここで, さらに $\beta_0 \equiv 0 \pmod{4A\alpha}$ と仮定すると,

上で合併をとった 4 つの平行四辺形のうち最初の 3 つは,

いずれも, ひとつの平行四辺形を 4 の倍数回平行移動

したものの (disjoint な) 合併としてあらわされる. 故に

これらに含まれる α の元の個数は 4 の倍数である。従って
fig. 11 以降考察してきた, $\frac{1}{\alpha}D_0$ と $\text{mod } \frac{1}{\alpha}$ で合同な小領域
域に入る整数点の個数は, β の領域が D_0 に含ま
れる場合には 4 の倍数である。

次に, 領域が D_0 に含まれない場合を考える
ために, 領域と D_0 との共通部分を, $\frac{1}{\alpha}$ または $\frac{1}{2\alpha}$ だけ
上下左右に平行移動したとき, 中の整数点の個数が
どのように変化するかを調べる。 $\beta_0 \equiv 0 \pmod{4A\alpha}$ は
常に仮定する。証明したい結果は個数の変化が
4 の倍数になるということである。

この問題は, たとえば上下の移動についてと,
結局 $(\frac{\mu}{A}, \frac{\mu+1}{A}, \frac{\mu+1}{A} + \frac{i}{2\alpha})$, または $(\frac{\mu}{A\alpha}, \frac{\mu+i}{A\alpha}, \frac{\mu+i}{A\alpha} \pm \frac{i}{2\alpha})$
という平行四辺形の辺を, 並んだ順の方向に β 変形
して得られる領域の中の β 分点を数えることに帰する。
前者は D_0 の $0, \frac{1}{\alpha}$ と結ぶ境界線に属するもの,
後者はこれにひたかる小領域の境界に属するもの

であり、後者における複号±において、—をとるのは、

$\frac{\mu}{A\alpha}$ を D_0 の $\frac{i}{2}$, $\frac{i}{2} + \frac{1}{2}$ を経て境界に近くすると

いうことで、小領域の境界においてこれに属する

ものの移動力については μ をこのようにとるのである。(1番目の Prop. 参照)

また移動させる小折線の小領域への所属、非所属は、 $A\alpha$ 分度を通じて変化しないことに注意)

さて、 $(\frac{\mu}{A\alpha}, \frac{\mu+ic}{A\alpha}, \frac{\mu+ic}{A\alpha} \pm \frac{i}{2})$ の β 変形は

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{A\alpha} + \frac{1}{A\alpha} \left[\left(0, \frac{\beta_0}{\beta} ic, \frac{\beta_0}{\beta} ic \pm \frac{\beta_0}{\beta} \frac{A\alpha i}{2} \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{\beta} ic, ic, ic \pm \frac{\beta_0}{\beta} \frac{A\alpha i}{2} \right) \right. \\ & \left. \cup \left(\pm \frac{\beta_0}{\beta} \frac{A\alpha i}{2}, \frac{\beta_0}{\beta} ic \pm \frac{\beta_0}{\beta} \frac{A\alpha i}{2}, \frac{\beta_0}{\beta} ic \pm \frac{A\alpha i}{2} \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{\beta} ic \pm \frac{\beta_0}{\beta} \frac{A\alpha i}{2}, ic \pm \frac{\beta_0}{\beta} \frac{A\alpha i}{2}, ic \pm \frac{A\alpha i}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

であるが、これを $\beta \frac{i}{2}$ したものは $\text{mod } \alpha$ で

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{A\alpha} + \left[\left(0, \frac{\beta_0}{A\alpha} ic, \frac{\beta_0}{A\alpha} ic \pm \frac{\beta_0 i}{2} \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha} ic, \frac{\beta}{A\alpha} ic, \frac{\beta}{A\alpha} ic \pm \frac{\beta_0 i}{2} \right) \right. \\ & \left. \cup \left(\pm \frac{\beta_0 i}{2}, \frac{\beta_0}{A\alpha} ic \pm \frac{\beta_0 i}{2}, \frac{\beta_0}{A\alpha} ic \pm \frac{\beta i}{2} \right) \cup \left(\frac{\beta_0}{A\alpha} ic \pm \frac{\beta_0 i}{2}, \frac{\beta}{A\alpha} ic \pm \frac{\beta_0 i}{2}, \frac{\beta}{A\alpha} ic \pm \frac{\beta i}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

となる。この式の最後の平行4辺形は、さらに $\text{mod } \alpha$ で

$$\frac{\mu}{A\alpha} + \left(0, \frac{i}{A\alpha}, \frac{i}{A\alpha} \pm \frac{i}{2} \right)$$

に合同であり、整数を含む。分母は、結局

$(\frac{\mu}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha})$ のとり方から、唯一の可能性である $\mu+i^c=0$

があらわれるからである。他の3つの平行4辺形は、 $\beta_0=$

同じ仮定から、4の倍数個の整数を含む。p.11

にあげた2つの平行4辺形のうち前者は、今の考察のごく一部

を覆っているから、 $\frac{\mu}{A} + (0, \frac{1}{A}, \frac{1}{A} + \frac{i}{2})$ が0を含む

ことを用いて処理される。すなわち、形式的に $\alpha=1$

$c=0$ とした式を書けばよい。左右の移動の場合

には、 $(\frac{\mu}{A}, \frac{\mu+i}{A}, \frac{\mu+i}{A} - \frac{1}{2}), (\frac{\mu}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha}, \frac{\mu+i^c}{A\alpha} \pm \frac{1}{2})$

から出発すればよく、計算は前の対応する場合に形式的

的に i をかき行けばよい。

これより、 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \equiv 0 \pmod{2}$ のとき、

$\operatorname{Re} \alpha$ と $\operatorname{Im} \alpha$ の最小公倍数 A (どちらかが0の場合は他方)

について $\beta \equiv 1 \pmod{4A\alpha}$ ならば、 $(\frac{\alpha}{\beta})_4 = 1$ である

ことが $\operatorname{Re}(\beta-1) > 0$ という技術的な仮定の下で示された。

§3. 注意事項

今までに説明したように, Gauss の数体における 4 乗剰余の相互法則の基礎部分は, 線分の β 変形 といふ考えを用ひさせ, $\frac{\alpha}{\beta} D_0$ と同じ形をした各小領域内の β 分変の個数が 4 でわり切れるといふ, より強い事実の帰結になつてしまつてゐるが, 今までの方法の中にはまだいくつかの不便な点や, 不完全な部分がある. 最も大きな欠点は, 一般代数体への拡張の見とおしがつきにくいことであり, $(\frac{\alpha}{\beta})_4 = 1$ となる β の満足すべき合同条件に, $\text{Re } \alpha$ や $\text{Im } \alpha$ が入るといふところにも, 意味のわからないことがあらわれている. この欠の改良は別の機会にあつたが, ここでは, 主として 領域の境界のとりあつたを, 理論的に smooth なものに改良し, さらに $\text{Re}(\beta-1) > 0$ といった不自然な条件をとり去ることについて注意する.

まず, §1 の $\mathbb{Q}$ の場合についていえば, $\mathbb{R}$ を長さ $\frac{1}{2}$ の区間に分ける時, $\frac{1}{2}$ の倍数は, 0 も含めて, これを端点とする区間には $\frac{1}{2}$ 個ずつ別れて属すると考えるのである. このようにすると, $x \rightarrow x+1$ と $x \rightarrow -x$ で生成される群の基本領域が, 不動点も含めてうまく定められたことになる. さらに, $\frac{1}{2}$ の倍数を端点とする長さ $\frac{1}{2}$ の区間を $\frac{a}{2}$ 倍してこの中の整数点を数える場合, $\frac{1}{2}$ の倍数が 0 でなければ, これを $\frac{a}{2}$ 倍しても整数になるから, 新しい数え方によっても整数点の個数は 0 を端点とする区間については変わらず, 0 を端点とする区間については $\frac{1}{2}$ だけ, すなわち 0 のぶんだけ増えることになる.

このようにしてから §1 の議論をくりかえすと, $(0, \frac{1}{2})$ 区間の分割の式において, やはり区間の端点はすべて $\frac{1}{2}$ ずつこの区間に属するものとする: ことにより, $\cup$ の前の区間は長さが

$\frac{b_0}{2a}$ であるから偶数個の整数点を含み、後の区間は $b=0$

のときだけ $\frac{1}{2}$ 個の整数点を含む。しかし、 b 分点から 0 を

除くために、丁度 $\frac{1}{2}$ が 0 から来る $\frac{1}{2}$ と打ち消されて、すべ

ての区間には偶数個の整数点が含まれることになるのである。

複素平面上の場合は、考える領域はすべてある
平行移動の群の基本領域の形をしていて、しかも、異なる
2つの方向に動く折線運動の合成によってこの領域
は書かれている。従って、 n -次元の場合の数え方の

直積をといった形で、平行四辺形の辺上の点は $\frac{1}{2}$ 、頂点は

$\frac{1}{4}$ と常に数えることになる。このようにしても、§2の平行

四辺形の分割の議論によって、我々の考察にあらわれる

どのような小さい、あるいは細長い平行四辺形にあっても、

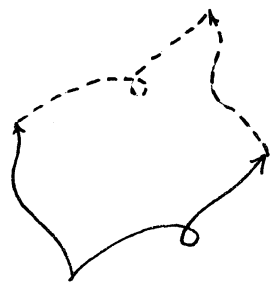
$\mu=0$ の場合を除いて頂点が問題の点、すなわち

β 倍しない前ならば β 分点、した後ならば整数点に

なることはなく、また 辺上には 4 の倍数個しか現われ

ない。従って、少し無駄ではあるが、 $\beta_0 \equiv 0 \pmod{8A\alpha}$ を仮定しておけば、辺上の点を $\frac{1}{2}$ と数えても、なおその総数は 4 の倍数である。 $\mu=0$ の場合には、 β 変形された領域を 4 つの平行四辺形に分割する際、いちばん小さい部分、すなわち β_0 に比例する辺の長部分から $\frac{1}{4}$ が現われるが、これは 0 から来る $\frac{1}{4}$ と消し合う。このようにして、境界の所属や、 $A\alpha$ 分位の除去といったことを繰り返して、§2 の証明が再現されるのである。

この方法の効用は、§2 において仮定した $\operatorname{Re} \beta > 0$ という条件がなくても殆ど同様に適用されるところにある。



すなわち、平面上の 2 つの運動は、たとえ重複度があっても、その合成として、ひとつの 2 重周期群の基本領域を形づくるから、重複した領域を許せば、今まで

の議論における $\operatorname{Re}(\beta-1) > 0$ という仮定は必要でない。
 である。しかし、この場合、領域には符号または
 さらに一般に、正負の重複度が考えられなければならない。
 境界の数え方は上と同様である。§2に
 おける平方4辺形の分割の議論についていえば、§2の
 図の2つの細長い部分は、大きな正方形の部分に重なり、
 符号が-になる場合が現われる。しかし、整数点の
 数が4の倍数という性質は不変で、さらに、右上の小さい
 正方形は、符号が依然 + である。従って $\mu=0$ の
 ときでも $\frac{1}{4}$ という個数は 0 から来る $\frac{1}{4}$ と消えあう。
 Qの場合に類似のことを行えば、小さい区間の符号が
 -になってしまい、このような消し合いが起らない。このような
 形で無限素点の虚・実がはっきり現われるのである。