

2 円柱を横切る流れの不安定性と遷移

同志社大学工学部 秋永 剛 (Takeshi Akinaga)

同志社大学工学部 関 勇祐 (Yusuke Seki)

同志社大学工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)

1. はじめに

流れの中に円柱がおかれているとき、かなり低いレイノルズ数において定常流から振動流への遷移がみられる。流れが振動流となると、円柱が長期にわたり周期的な力を受けて破断に至る現象も報告されており、流れの振動を制御する技術が研究されてきた。Jackson[1] は1本の円柱を過ぎる流れの安定性解析を行い、円柱を過ぎる流れはレイノルズ数が45.4以上のとき不安定となり対称な定常流から周期流へと遷移することを明らかにした。

流れと直角に並べられた2本の円柱を過ぎる流れにおいて、2本の円柱間隔がおおよそ円柱直径を超える場合、2円柱の後流は一對の特徴的な流れとなることが実験的に確認された。また、その流れはレイノルズ数や円柱間隔の大きさによって数種類に分類されることが示された。

円柱間隔が円柱直径程度よりも小さい場合、高いレイノルズ数 ($Re = 10^3 \sim 10^4$) において2本の円柱間の流れは対称でなく一方に偏ることが確認されている [2]。Xu, Zhou and So[3] はこのような狭い円柱間隔の場合について、熱線流速計やPIVを用いた実験を行い、円柱間隔の大きさが流れ構造へ与える影響を詳しく調べた。その結果、レイノルズ数が低いときは、円柱の下流では1つの渦列を形成するのに対し、ある値を超えると円柱下流で2つの異なる周期の渦列が発生することを発見し、臨界レイノルズ数と円柱間隔について整理を行った。

円柱間隔が広い場合についても研究が行われている。Williamson[4] は比較的低いレイノルズ数 ($Re = 50 \sim 200$) で円柱間距離がおおよそ円柱半径から円柱直径の5倍の範囲で可視化実験を行い、円柱間隔が円柱の直径を超えると、2つの円柱の後流は同期して同位相と逆位相の2つの流れパターンが発生することを発見した。しかし、彼はこれらの流れの発生の原因を特定することができなかった。

これに対し、Peschard and Le Gal[5] は、2つの後流の振動を表すモデルとして、連立振幅方程式からなる力学系モデルを提案し、このモデルにより数値シミュレーションを行うと、2円柱後方から放出される渦が逆位相モードと同位相モードとなることを示した。また、これら2つのモードの発生は円柱間隔に依存しており、円柱間隔を大きくしていくことにより、同位相モードから逆位相モードへと遷移していくことを明らかにした。

最近の研究では、比較的低いレイノルズ数 ($Re = 40 \sim 160$) において、流れはレイノルズ数や円柱間隔および初期条件などに依存して、6つに分類できるという数値シミュレーションの結果も報告されている [6]。

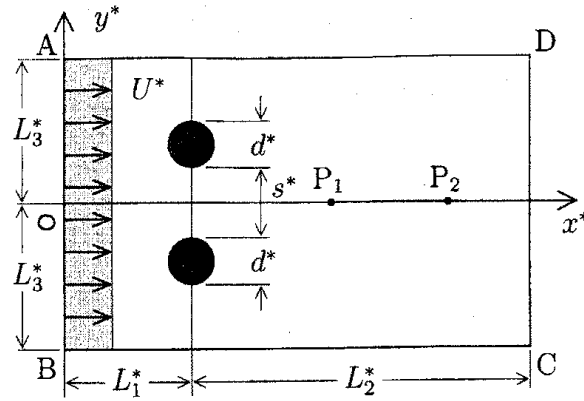


図 1: 2 円柱を横切る流れ (実際の長さに比例していない模式図). d^* : 円柱直径, s^* : 円柱間隔.

しかし, いずれの研究においても, 流れの分類は瞬時の流れ場のもつ特徴や形に基づいて行われており, 流れの起こる原因については詳しく調べられていない. また, それらが遷移するときの臨界レイノルズ数や遷移構造も明らかになっていない. 流れの遷移が起こると流れはより複雑なものとなる. したがって, 遷移したあとの流れがもとの流れからどのように変わったかという観点から分類を行うことが, 最も重要な方法であると考えられる.

本研究では, 一様流中に流れと垂直に並べられた 2 本の円柱を過ぎる流れについて, 数値シミュレーションと流れの安定性解析および PIV (Particle Image Velocimetry) 装置を用いた実験を行い, 流れの遷移について詳しく調べ, これまで報告されているそれぞれの流れパターンが生じる物理的機構を明らかにする.

2. 基礎方程式

2.1 基礎方程式および境界条件

流れと垂直に並べておかれた 2 本の円柱を過ぎる流れを考える (図 1). 2 本の円柱間の中心を通り流れと平行に x^* 軸をとり, x^* 軸と垂直に y^* 軸をとる. 上流において流れは速度 U^* の一様流であると仮定する. 2 円柱の直径は等しく d^* であるとし, 円柱表面間の距離を s^* とする. 流れを特徴づける無次元パラメータとして, レイノルズ数 $Re \equiv U^* d^* / \nu^*$ および $\Gamma \equiv s^* / d^*$ を定義する. ただし ν^* は流体の動粘性係数である. ここでは, $Re = 10 \sim 200$ および $\Gamma = 0.3 \sim 5.0$ の範囲で調べることとする.

流れは 2 次元非圧縮であると仮定し, 流れ関数 ψ と渦度 ω を導入する. 流れの

基礎方程式は、渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \mathcal{M}\omega + \mathcal{N}(\psi, \omega) \quad (1)$$

と流れ関数 ψ についてのポアソン方程式

$$\mathcal{M}\psi = -\omega, \quad (2)$$

$$\mathcal{M} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mathcal{N}(\psi, \omega) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (3)$$

である。

流れは計算領域の上流 (図 1, AB) と側面 (図 1, AD および BC) において一様であるとする。円柱上で滑りなし条件を課し、流出口 (図 1, CD) ではゾンマーフェルト放射条件を用いる。

2.2 定常解

流れは低いレイノルズ数のとき対称である。定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ は次の定常渦度輸送方程式および定常ポアソン方程式を満たす。

$$0 = \frac{1}{Re} \mathcal{M}\bar{\omega} + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \bar{\omega}), \quad (4)$$

$$\mathcal{M}\bar{\psi} = -\bar{\omega}. \quad (5)$$

式 (4) と (5) を境界条件のもとに、定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ を数値的に求める。

3. 数値計算法

3.1 一般座標

複数物体を過ぎる流れの数値シミュレーションと定常解の数値計算を行うため、物体に沿った格子を数値的に形成する。このため直交座標系から一般曲線座標系への座標変換 $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ を行う。このとき空間微分は次のように変換する。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right). \quad (6)$$

たとえば、渦度輸送方程式 (1) およびポアソン方程式 (2) に現れるオペレーター $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}(\psi, \omega)$ を一般座標に変換すると、次のようになる。

$$\mathcal{M} = \frac{1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad (7)$$

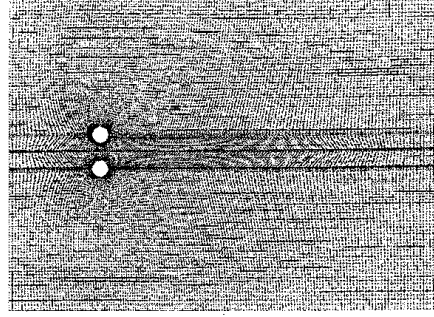


図 2: 数値計算に用いた計算格子例. $\Gamma = 1.0$.

$$\mathcal{N}(\psi, \omega) = -\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right). \quad (8)$$

ここで,

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \\ \beta &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \\ \sigma &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} Dy - \frac{\partial y}{\partial \eta} Dx \right), \quad \tau = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} Dx - \frac{\partial x}{\partial \xi} Dy \right), \\ Dx &= \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}, \quad Dy = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

である.

物体に沿った格子を数値的に形成には, 次のポアソン方程式の解 (ξ, η) を用いる.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta). \quad (9)$$

ここで, 上式の右辺の関数 $P(\xi, \eta)$ と $Q(\xi, \eta)$ を適当に選ぶことにより格子点分布を制御する. この選び方については Steger and Sorensen[7] によって提案された方法を用いる. ξ 線を円柱表面に沿って描き, η 線を ξ 線に直交させる. 今回の計算で主に用いた格子は円柱に近づくほど小さく, 最小格子幅は円柱表面近くで 0.02, 最大格子幅は 0.1 である. 格子点数は ξ 方向に 310 点であり, η 方向には 229~399 点の範囲で Γ に応じて適当な数を選ぶ. このようにして作った計算格子の例を図 2 に示す.

3.2 数値シミュレーションと定常解の数値計算法

数値計算においては, 計算領域を $L_1^* = 5.5d^*$, $L_2^* = 20.5d^*$, $L_3^* = 9d^* + 0.5s^*$ とする. 数値シミュレーションでは, 空間微分項を 2 次精度の中心差分法により

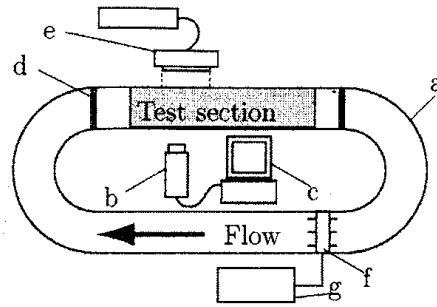


図 3: 実験装置. a: 水槽, b: ハイスピードビデオカメラ, c: パソコン, d: フィルター, e: レーザー, f: ブラシ, g: DC モーター.

差分近似し, 時間積分には 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いる. このとき, 時間刻み幅を $\Delta t = 0.005$ とする.

同様に定常解の数値計算においても, 空間微分項を 2 次精度の中心差分法を用いて差分近似し, SOR 法を用いて計算を行う. SOR 法における緩和係数 w は, $0.1 \sim 1.5$ の範囲で適当な値を選ぶ. 定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ の計算において, x 軸に対して対称な流れ場を求めるためには反対称条件

$$\bar{\psi}(x, y) = -\bar{\psi}(x, -y), \quad \bar{\omega}(x, y) = -\bar{\omega}(x, -y) \quad (10)$$

を課す.

4. 実験装置および方法

4.1 実験装置

実験に用いた循環式水槽の概略図を図 3 に示す. アクリル製の循環式水槽は水平に設置され, その中に水が満たされている. 水温は, 室温を調節することでほぼ 20°C に保つ ($\nu = 1.010 \text{ mm}^2/\text{s}$). 水槽内の流れは, DC モーター (オリエンタルモータ製, AXU590-GU) でロールブラシを回転することにより駆動し制御する. 流れをテストセクション断面内で一様にするため, 測定部の前後にステンレス製の格子フィルターを設置する.

テストセクション (図 3) は幅 200 [mm] , 長さ 450 [mm] , 高さ 100 [mm] であり, その中央部に 2 本の円柱 (真鍮, 直径 2 mm , 長さ 100 mm) を垂直に設置する. これらの円柱の一端 (上端) をアクリル製の角棒に適当な間隔で固定する. 流れを特徴づけるパラメータとして, 間隔比 $\Gamma (= s^*/d^*)$ とレイノルズ数 $Re (= U^*d^*/\nu^*)$ を定義する. ただし d^* は円柱直径, s^* は円柱表面間の距離, U^* は流入口での流速, ν^* は水の動粘性係数である. 実験は $Re = 30 \sim 200$, $\Gamma = 1.0 \sim 5.0$ の範囲で行う.

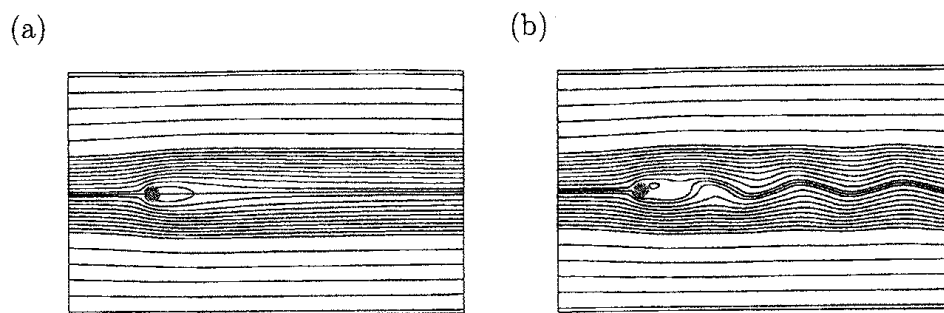


図 4: 1 円柱の流れパターン. (a) $Re = 40$, (b) $Re = 50$.

4.2 PIV 測定

速度場を得るためにPIVによる測定を行う。YAG レーザー (Photonics Industries 製, Nd:YLF Q-スイッチレーザー DM10-527, 出力 15 mJ/pulse) を 0.5 mm の厚さで水槽底から 60 mm の高さの位置に水平に入射する。レーザーに照らされたトレーサー粒子 (オルガソル, 密度 1.03 g/cc, 直径 48~52 μm) を水槽の真下からハイスピードビデオカメラ (Vision Research 製, Phantom V5.0, ピクセル数 1632 $\times$ 1024 pixels) で撮影する。測定領域の実寸法は 40.8 mm $\times$ 30.0 mm (0.025 mm/pixel) である。トレーサーが下流に 0.1 mm 移動する時間をパルス間隔 Δt にとり, その 5 分の 1 をパルス幅とする。たとえば $Re = 200$ のとき, パルス間隔は $\Delta t = 1000 \mu\text{s}$ である。

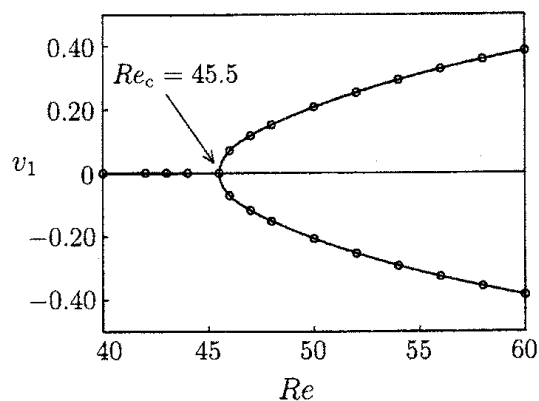


図 5: 1 円柱を過ぎる流れの分岐図.

5. 結果および考察

5.1 1本円柱を過ぎる流れ

1本円柱を過ぎる流れは低いレイノルズ数において対称定常流であり、ある臨界レイノルズ数 Re_c を超えると振動流へ遷移する。ここで用いる数値計算法の正しさを確認するため、1本の円柱を過ぎる流れについて数値シミュレーションおよび線形安定性解析を行い、これまで報告されている結果と比較する。

レイノルズ数が $Re = 40$ および $Re = 50$ のときの1本円柱を過ぎる流れの流れ場を図4に示す。図4(a)において流れは対称定常流であるのに対して、図4(b)では非対称な振動流となっている。円柱から下流へ $1d$ 離れた点 P_1 (図1) を代表点にとり、この点における y 方向速度 v_1 をいろいろなレイノルズ数について計算した。その結果を図5に示す。この図から、流れは臨界レイノルズ数 $Re_c = 45.5$ を超えると定常対称流から振動流へと遷移し、そのときの分岐構造はホップ分岐であることがわかる。対称定常流の線形安定性解析を行ったところ、臨界レイノルズ数は $Re_c = 45.420$ であることがわかった。この値は数値シミュレーションで得られた値とよく一致をしている。また、Jackson[1]の安定性解析によれば、臨界レイノルズ数の値は $Re_c = 45.406$ であり、ここで得られた値とも良く一致している。これより、ここで用いる数値計算法は正しく、かつ精度良い結果を得ることができると結論づける。

5.2 2本円柱を過ぎる流れ

速度場測定 2本円柱を過ぎる流れの速度場を、PIV装置を用いて測定した。測定は間隔比 $\Gamma = [1, 5]$ の範囲において行い、流れ場を分類した。分類にあたっては、各瞬間における速度場を数多く測定してそれらの平均速度場を対称定常速度場と仮定し、各瞬間の速度場から対称定常速度場を差し引いたものを攪乱速度場と呼ぶ。こうして得られた攪乱速度場の性質から流れ場の分類を行う。なお、ここで定義した攪乱速度場は対称定常流の線形安定性解析から得られる攪乱の速度場とほぼ同じであることが示される。PIV測定により得られた瞬間速度場のベクトル図は図6のようになった。図6(a)と6(b)はそれぞれレイノルズ数と間隔比が $(Re, \Gamma) = (130.0, 2.0)$ と $(135, 4.0)$ のときの速度場であり、矢印はそれぞれの位置での速度ベクトルを表している。また色の濃淡は流れの速さを表しており、色が黒に近づくほど遅く、白に近づくほど速い。図6(a)では円柱背後の2つの後流が同位相で振動しており、図6(b)では逆位相で振動している流れのパターンとなっていることが確認できる。それぞれの場合の対称定常流を求めると、図6(c)と6(d)のような速度場が得られる。ここで、対称定常速度場の計算には、時間的に変動する流れ場よりランダムに1000の瞬間流れ場を取り出したものを平均した。それぞれの場合について各瞬間の速度場から対称定常流を差し引いた攪乱速度場を計算

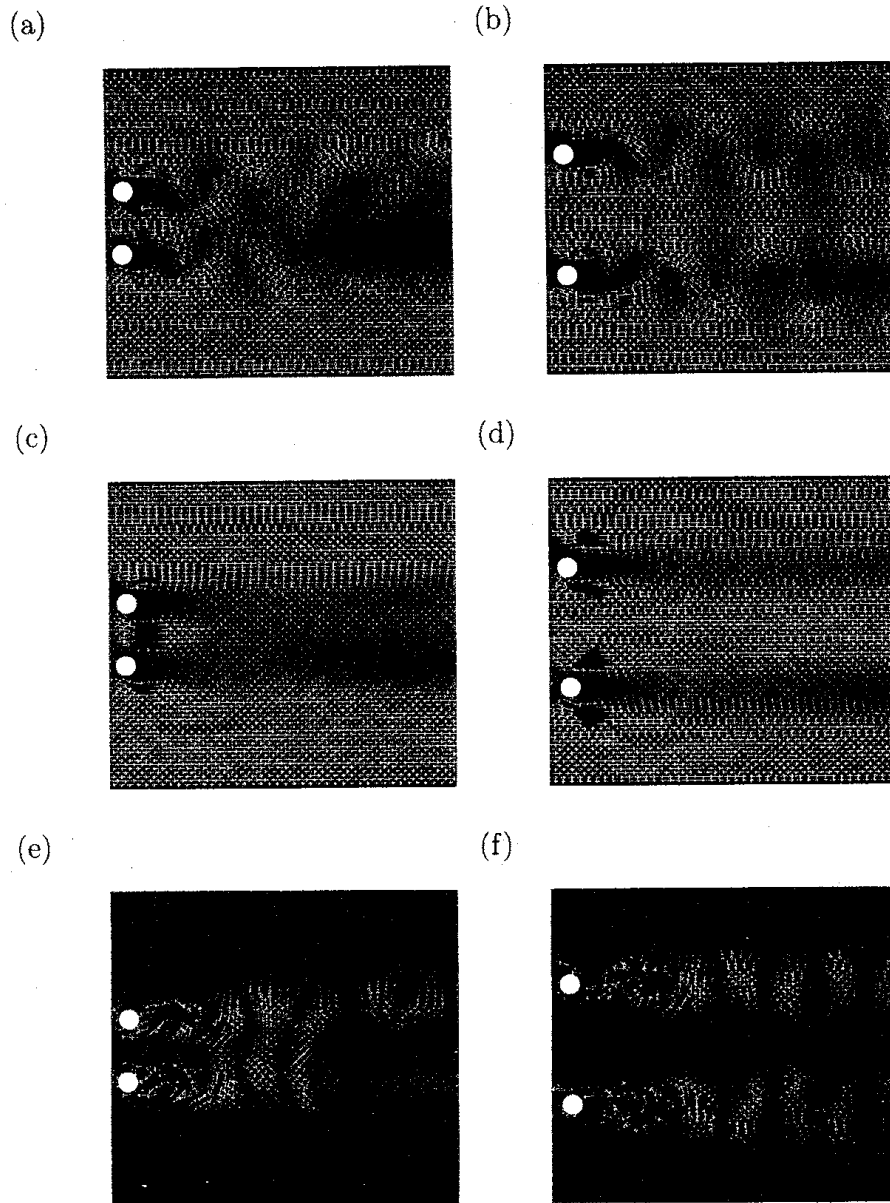


図 6: PIV 測定により得られた速度場. (a), (b) 瞬間速度場. (c), (d) 平均速度場. (e), (f) 攪乱速度場. (a), (c), (e) 同位相周期流. $Re=130$, $\Gamma=2.0$. (b), (d), (f) 逆位相周期流. $Re=135$, $\Gamma=4.0$.

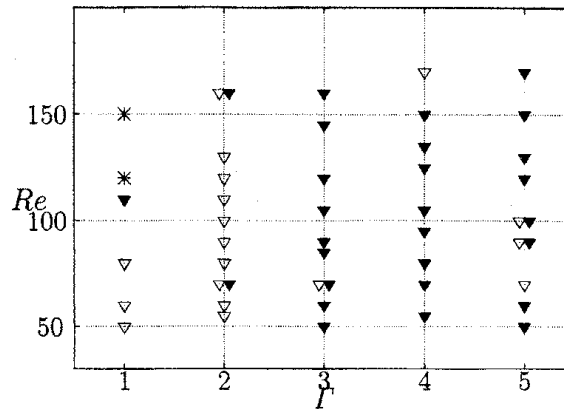


図 7: 攪乱の速度場の分布図. ▽: 同位相型, ▼: 逆位相型.

すると図 6(e) と 6(f) のようになる. 図 6(e) では 2 本の円柱後方のベクトルの向きが同じ (同位相) であるのに対して, 図 6(f) ではその向きが逆 (逆位相) である. 得られた攪乱のベクトル場を (Γ, Re) 平面で整理すると図 7 のようになる. ここで, ▽ と ▼ はそれぞれ同位相と逆位相の攪乱が観測されたことを表す. この図から, 不安定な攪乱のもつ空間的な構造は円柱間隔によって異なり, その構造は $\Gamma = 2 \sim 3$ の間で入れ替わることがわかる.

対称定常流の線形安定性解析は Akinaga and Mizushima[8] によって既に行われており, その結果によれば, $\Gamma < \Gamma_c = 2.34$ では最も不安定な攪乱の構造は同位相の流れパターンをもち, $\Gamma < \Gamma_c$ ではその構造は逆位相の流れパターンをもつことがわかっている. 今回得られた実験結果は Akinaga and Mizushima の結果と定性的に一致している. ここで, 強調しておく必要がある事柄は, $\Gamma = 1$ のとき 2 つの振動パターンのどちらにも属さない複雑な流れを観測したことである. しかし, $\Gamma < 1$ の範囲については円柱間隔が狭く実験が困難であるため, 数値シミュレーションを行い詳しく調べる. その結果を次節で説明する.

数値シミュレーション 間隔比 $\Gamma = [0.3, 0.9]$ の範囲について数値シミュレーションを行った. 出現する流れ場はレイノルズ数 Re と間隔比 Γ によって異なる. これらの流れ場を図 8 の 4 つに分類した.

間隔比 $\Gamma = 0.5$ の場合には, $Re = 40$ のとき流れは対称な定常流であり (図 8(a)), $Re = 50$ で流れが x 軸に対して同位相で振動する振動流となった (図 8(b)). このような対称定常流から振動流への遷移について調べるために, 円柱から $11d$ 下流の点 P_2 (図 1) における y 方向速度を v_2 とレイノルズ数 Re との関係調べた. ここで, 定常流の場合には v_2 の値を, 振動流の場合には v_2 の最大値と最小値をレイノルズ数の関数として分岐図を描いた. こうして得られた分岐図が図 9(a) である. この分岐図より, 流れはある臨界レイノルズ数 Re_c を超えると対称定常流から振動流へと遷移し, そのときの分岐構造はホップ分岐であることがわかる. またそ

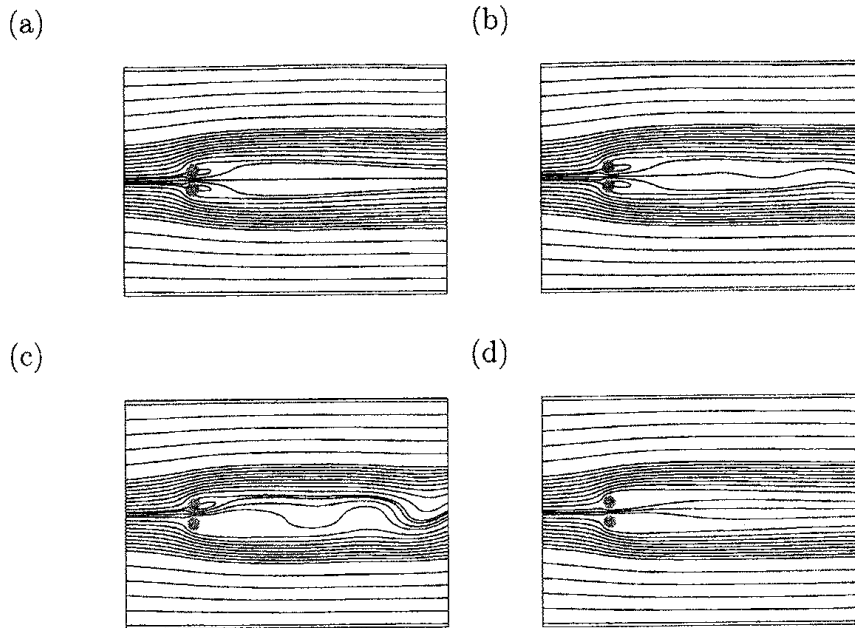


図 8: 流れパターン. (a) 対称定常流. $\Gamma = 0.5$, $Re = 45$, (b) 振動流. $\Gamma = 0.5$, $Re = 50$, (c) 振動偏向流. $\Gamma = 0.5$, $Re = 60$, (d) 非対称定常流. $\Gamma = 0.6$, $Re = 55$.

のときの臨界レイノルズ数は $Re_c = 43.1$ であった. このようなホップ分岐を分岐構造にもつ対称定常流から振動流の遷移は, $\Gamma = [0.3, 0.5]$ および $\Gamma = [0.65, 0.9]$ の範囲で生じることを確認した.

これまでよく知られていなかった流れが間隔比 $\Gamma = 0.5$ の場合に $Re = 60$ において見いだされた. 流れは 2 本の円柱間で片方の円柱の方向に片寄り, 円柱の下流で振動している (図 8(c)). このような流れはこれまで知られている力学系の基本的な分岐構造では理解することができない. この振動流から振動偏向流への遷移は, 流れが対称定常流から非対称定常流へ遷移するピッチフォーク分岐とも関係していると考えられるので, 定常解探索を行い定常解の遷移について調べる. その結果を 2 本円柱下流の点 P_1 (図 1) における速度 v_1 とレイノルズ数 Re との関係としてまとめると, 図 9(b) のようになる. ここで点線は定常解探索により得た速度をプロットしたものである. 図 9(b) から, 対称定常流は臨界レイノルズ数 $Re_c = 54.5$ を超えると非対称定常流へと遷移し, そのときの分岐構造はピッチホーク分岐であることがわかる. つまり $\Gamma = 0.5$ の場合には, $Re_c = 45.6$ でホップ分岐が起き, さらにレイノルズ数を上げると, $Re_c = 54.5$ でピッチホーク分岐が生じている.

ここで述べた結果については説明が必要である. ホップ分岐が生じた後の流れになぜピッチフォーク分岐が起こる可能性があるのかという点については, “分岐の局所性” あるいは “不安定性の局所性” という新しい概念を導入しなければならない. すなわち, ある広い流れ場のある 1 点ではホップ分岐が生じ, そこから離

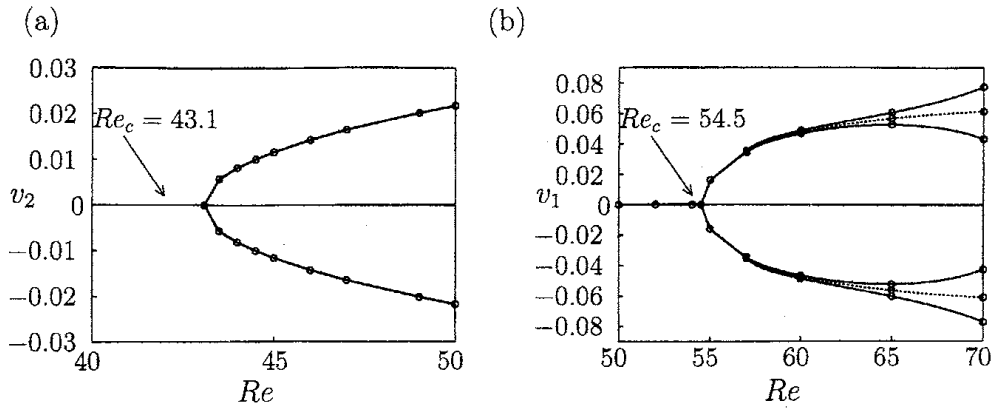


図 9: 分岐図. $\Gamma = 0.5$. (a) ホップ分岐, v_2 : 点 P_2 での y 方向速度. (b) ピッチフォーク分岐, v_1 : 点 P_1 での y 方向速度.

れた別の点ではより大きなレイノルズ数でピッチフォーク分岐が生じると考えるのである. このとき, それぞれの分岐に対応する不安定モードはそれぞれの場所に局所化している. ただ, 今回の計算結果ではもう少し複雑であり, レイノルズ数が大きくなるに従って, 局所化していた攪乱が相互作用するようになる. このことを詳しく調べるために, $\Gamma = 0.6$ で $Re = 55.0$ のときの流れを数値シミュレーションと定常解探索で求めると, 流れは非対称定常流となっている (図 8(d)). すなわち, $\Gamma = 0.6$ ではホップ分岐が生じるレイノルズ数よりも小さいレイノルズ数でピッチフォーク分岐が生じており, これら 2 つの分岐に対応する臨界レイノルズ数の大小関係が, $\Gamma = 0.5$ と 0.6 の間で入れ替わるのである.

このようにして, 流れと垂直に並べられた 2 本の円柱を過ぎる流れの不安定性と分岐を $\Gamma = [0.3, 5.0]$ の範囲で調べた結果をまとめると図 10 のような遷移図が得られた. この図には Akinaga and Mizushima[8] の結果も示されている. この図で, $\circ$ および $\bullet$ は, それぞれ同位相型の攪乱および逆位型の攪乱に対して不安定となる臨界点を表している. また, $\times$ と $\triangle$ は数値シミュレーションにより得られた結果であり, それぞれピッチフォーク分岐点とホップ分岐点を表している. 今回の研究では非対称定常流が見いだされたが, この流れが観測されるのは $\Gamma = [0.54, 0.62]$ の極めて狭い領域である. ただし, そのときのピッチフォーク分岐の構造はもっと広い範囲まで及んでおり, その影響で偏流した振動流が観測されるのである.

参考文献

- [1] C. P. Jackson, "A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies", *J. Fluid Mech.*, **182** (1987) 23-45.

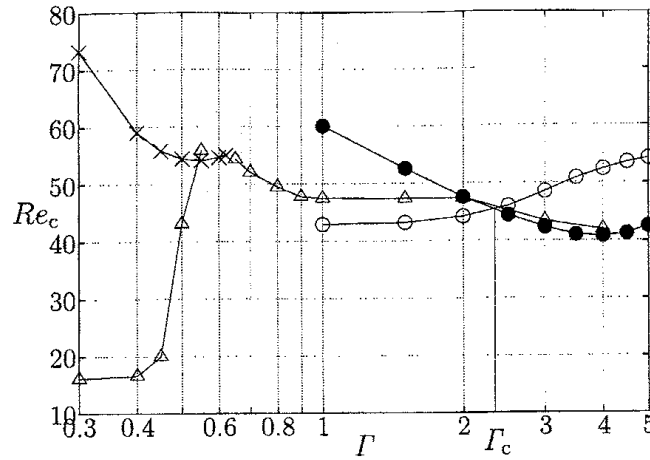


図 10: ながれの遷移図. ○: 同位相型攪乱に対する臨界レイノルズ数, ●: 同位相型攪乱に対する臨界レイノルズ数, ○, ●: Akinaga and Mizushima ([8]), ×: ピッチフォーク分岐点, △: ホップ分岐点.

- [2] P. W. Bearman and A. J. Wadcock, "The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream", *J. Fluid Mech.*, **61** (1973) 499-511.
- [3] S. J. Xu, Y. Zhou and R. M. C. So, "Reynolds number effects on the flow structure behind two side-by-side cylinders", *Phys. Fluids*, **15** (2003) 1214-1219.
- [4] C. H. K. Williamson, "Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies", *J. Fluid Mech.*, **159** (1985) 1-18.
- [5] I. Peschard and P. Le Gal, "Coupled wakes of cylinder", *Phys. Rev. Lett.*, **77** (1996) 3122-3125.
- [6] S. Kang, "Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low Reynolds numbers", *Phys. Fluids*, **15** (2003) 2468-2498.
- [7] L. J. Steger and L. R. Sorenson, "Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equation", *J. Comp. Phys.*, **33** (1979) 405-410.
- [8] T. Akinaga and M. Mizushima, "Linear stability of flow past two cylinders in a side-by-side arrangement", to appear in *J. Phys. Soc. Jpn.* (2005).