

## 2次元ポテンシャル問題における偏微分方程式の精度保証付き数値計算

東京大学大学院 新領域創成科学研究科 村重 淳 (Sunao Murashige)

Graduate School of Frontier Sciences

The University of Tokyo

早稲田大学 理工学部 情報学科 大石 進一 (Shin'ichi Oishi)

School of Science and Engineering,

Waseda University

### 1. はじめに

本研究では, 次のような対数的特異性を含む周期的積分方程式について考える.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 4 \sin^2 \frac{\xi - x}{2} \right) \cdot (K\varphi)(\xi) d\xi + f(x) \quad (0 \leq x \leq 2\pi) \\ &= (SK\varphi)(x) + f(x) = (G\varphi)(x).\end{aligned}\tag{1}$$

ここで,  $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ ,  $f(0) = f(2\pi)$ ,  $K$  は連続作用素,  $S$  は次のように定義される対数的特異積分作用素である.

$$(S\psi)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 4 \sin^2 \frac{\xi - x}{2} \right) \cdot \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{\log}(x, \xi) \cdot \psi(\xi) d\xi.$$

上式中の対数核

$$K_{\log}(x, \xi) = -\log \left( 4 \sin^2 \frac{\xi - x}{2} \right), \tag{2}$$

は  $\forall x, \xi \in [0, 2\pi], x \neq \xi$  で連続で,

$$\exists c > 0, \alpha \in (0, 1] : |K_{\log}(x, \xi)| \leq c|x - \xi|^{\alpha-1}, \quad x, \xi \in [0, 2\pi], x \neq \xi, \tag{3}$$

であるので弱特異核と呼ばれることがある [1].

(1) 式のような特異積分方程式は, 2次元の Laplace 方程式や Helmholtz 方程式の境界値問題を解くときにしばしば現れる. 例えば, 水波の波面に対する数学モデルである Nekrasov 積分方程式 [2] は次式で与えられる.

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 4 \sin^2 \frac{\xi - x}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} \mu e^{-3\{\mathcal{H}\varphi(\xi) - \mathcal{H}\varphi(0)\}} \sin \varphi(\xi) d\xi. \quad (4)$$

ここで、 $\varphi(x)$  は水面の位置  $x$  における波面の傾斜、 $\mathcal{H}$  は Hilbert 変換をそれぞれ表す。

このタイプの方程式の数値計算方法はいくつか提案されているが、積分の特異性のために近似解の精度が悪い場合があると考えられる [1]. Dobner は、任意の核関数は縮小部分と退化部分に分けられることを利用して、対数的特異積分作用素  $S$  を含む線形方程式の検証方法を考えた [3]. 本研究では、 $S$  の性質を利用した新たな解の検証方法（精度保証付き数値計算法）を提案する。

## 2. 積分作用素 $S$ の導出と特徴

積分作用素  $S$  の導出を具体的に説明するために、簡単な例として 2 次元 Laplace 方程式

$$\nabla^2 \hat{\phi} = \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{y}^2} = 0, \quad (5)$$

の境界値問題を考える。このとき、解析的複素関数  $\Omega(\hat{z}) = \hat{\phi}(\hat{x}, \hat{y}) + i\hat{\psi}(\hat{x}, \hat{y})$  の実部  $\hat{\phi}$  と虚部  $\hat{\psi}$  は調和関数である、すなわち、 $\nabla^2 \hat{\phi} = 0$ 、 $\nabla^2 \hat{\psi} = 0$  であるので、この問題は与えられた境界条件を満足する  $\Omega(\hat{z})$  を求めることと等価である ( $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y}$ )。このような問題では、対象としている領域（物理面）を適当な写像関数を用いて単位円内 ( $\zeta$  平面) に写して考えると便利である (図 1. 参照)。特に、 $\zeta$  平面では、境界上 (単位円上  $\zeta = e^{ix}$ ) の実部  $\hat{\phi}$  と虚部  $\hat{\psi}$  の関係が、Poisson の積分公式より次のように与えられる。

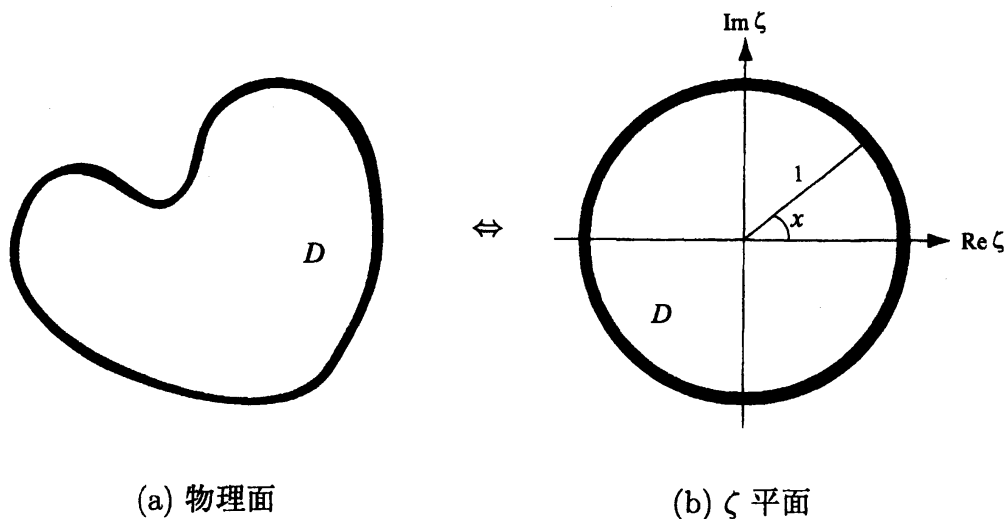


図 1. 2 次元ポテンシャル問題

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 4 \sin^2 \frac{\xi - x}{2} \right) \cdot \frac{d\hat{\psi}}{d\xi} d\xi. \quad (6)$$

ここで、 $x$  は  $\zeta$  平面の偏角を表す。境界条件  $\hat{\psi} = g(\hat{\phi})$  を上式に代入すると、(1) 式のタイプの積分方程式が導かれる。このようにして、2次元のポテンシャル問題の境界値問題では、本研究で考えている対数的特異積分作用素  $S$  が現れる。

(1) 式の精度保証付き数値計算を考えると、次式で与えられる積分作用素  $S$  の性質は重要である。

$$S e^{imx} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 4 \sin^2 \frac{\xi - x}{2} \right) e^{im\xi} d\xi = \begin{cases} 0, & m = 0 \\ \frac{1}{|m|} e^{imx}, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

したがって、(1) 式の  $K\varphi$  が三角多項式であれば、積分は厳密に評価できる。本研究では、積分方程式 (1) の解を次のような  $n$  項の三角多項式  $\tilde{\varphi}_n$  で近似する。

$$\tilde{\varphi}_n = \sum_{m=-n}^n \tilde{a}_m e^{imx} = \sum_{|m|=0}^n \tilde{a}_m e^{imx} \quad (\tilde{a}_m \in \mathbb{C}). \quad (8)$$

また、そのようにして得られた近似解とその近傍が属する関数空間  $X$  として、次式で定義される周期的 Sobolev 空間  $H^p[0, 2\pi]$  ( $p \in \mathbb{R}$ ) を用いる。

$$H^p[0, 2\pi] := \left\{ \varphi \in L^2[0, 2\pi] : \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p |c_m|^2 < \infty, c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-imx} dx \right\}. \quad (9)$$

$H^p[0, 2\pi]$  は  $\|\varphi\|_{H^p} := \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p |c_m|^2 \right\}^{1/2}$  をノルムとする Hilbert 空間である。また、積分作用素  $S : H^p[0, 2\pi] \rightarrow H^{p+1}[0, 2\pi]$  は線形・連続である。さらに、 $H^{p+1}[0, 2\pi]$  から  $H^p[0, 2\pi]$  への埋め込みはコンパクトであるので、 $S : H^p[0, 2\pi] \rightarrow H^p[0, 2\pi]$  もコンパクトである [1]。このことは、精度保証のために Schauder の不動点定理を適用するとき重要である。

### 3. 検証方法

本研究では,  $\varphi, f \in X = H^p[0, 2\pi]$ ,  $p > 1/2$  であるとして,

$$\varphi(x) = \sum_{|m|=0}^{\infty} a_m e^{imx}, \quad f(x) = \sum_{|m|=0}^{\infty} b_m e^{imx} \quad (a_m, b_m \in \mathbb{C}), \quad (10)$$

のように表す. 検証法の基本的なアイディアは, 関数空間  $X = H^p[0, 2\pi]$  で (1) 式と同値な不動点形式  $\varphi = T\varphi$  に対して Schauder の不動点定理を応用することである. それにより, (8) 式の形で与えられる近似解  $\tilde{\varphi}_n$  の近傍  $\mathcal{N}$  に真の解  $\varphi^* \in X$  が少なくとも一つ存在することを示すことができる. 近傍は  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_n \times \mathcal{N}_r$  のように, 次式で与えられる  $\mathcal{N}_n$  と  $\mathcal{N}_r$  の直積空間として定義される.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n &:= \left\{ \varphi_n = \sum_{m=-n}^n a_m e^{imx} \in X_n : a_m \in \tilde{a}_m + [-w_m, w_m] \right\} \\ \mathcal{N}_r &:= \{ \varphi_r \in (I - P_n)X : \|\varphi_r\|_X \leq w_r \} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで,  $P_n: X \rightarrow X_n$  は  $n$  項の三角多項式の空間  $X_n$  への射影作用素である. 近似解の近傍に解が存在するためには, まず,

$$\left. \begin{aligned} (T\varphi)_n &= P_n(T\varphi) \in \hat{\mathcal{N}}_n \subseteq \mathcal{N}_n \\ (T\varphi)_r &= (I - P_n)(T\varphi) \in \hat{\mathcal{N}}_r \subseteq \mathcal{N}_r \end{aligned} \right\} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{N}), \quad (12)$$

となる  $\hat{\mathcal{N}} = \hat{\mathcal{N}}_n \times \hat{\mathcal{N}}_r$  を見つけることを試みる. もしそのような  $\hat{\mathcal{N}}$  が存在すれば, 包含関係

$$T\hat{\mathcal{N}} \subseteq T\mathcal{N} \subseteq \hat{\mathcal{N}}, \quad (13)$$

が成り立つので, Schauder の不動点定理より  $\hat{\mathcal{N}}$  に少なくとも一つ解が存在することがいえる.

実際の問題では, 誤差範囲は最大値ノルム  $\|\varphi^* - \tilde{\varphi}_n\|_{\infty}$  で与えられた方が都合がよいことが多い. 上記の方法で得られた解の存在する近傍  $\hat{\mathcal{N}}$  より, 以下のように評価することが可能である.

$$\|\varphi^* - \tilde{\varphi}_n\|_{\infty} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^n (1 + m^2) \hat{w}_m^2 + \hat{w}_r^2 \right\}}. \quad (14)$$

以下では、(1) 式の連続作用素  $K$  が線形の場合と非線形の場合に分けて、検証方法を説明する。

### 3.1 $K$ が線形の場合

この節では、式の展開をわかりやすくするために、 $A = SK$  と表すことにする。 $K$  が線形で、逆作用素  $(I - P_n A)^{-1} : X \rightarrow X$  が存在する場合は、次のような不動点形式を用いると便利である。

$$\varphi = (I - P_n A)^{-1} \{f - (P_n A - A)\varphi\} =: T_L \varphi \quad (A = SK). \quad (15)$$

このとき、逆作用素  $(I - P_n A)^{-1} : X \rightarrow X$  の存在は有限次元の逆作用素  $(I - P_n A)^{-1} : X_n \rightarrow X_n$  を用いて示すことができる [4]。作用素  $A$  の線形性より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} (T_L \varphi)_n &= (I - P_n A)^{-1} f_n \\ (T_L \varphi)_r &= (I - P_n A)^{-1} \{f_r - (P_n A - A)\varphi_r\}, \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $P_n \varphi = \varphi_n$ ,  $(I - P_n)\varphi = \varphi_r$ ,  $P_n f = f_n$ ,  $(I - P_n)f = f_r$  をそれぞれ表す。有限次元部分の包含関係  $(T_L \varphi)_n \subseteq \mathcal{N}_n$  は次式を用いて調べることができる。

$$(T_L \varphi)_n = (I - P_n A)^{-1} f_n = b_0 + \sum_{|m|=1}^n \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{|m|}} \right) b_m e^{imx}. \quad (17)$$

一方、打ち切り項の包含関係  $(T_L \varphi)_r \subseteq \mathcal{N}_r$  は  $\|(T_L \varphi)_r\|_X \leq w_r$  と同値である。ノルム  $\|(T_L \varphi)_r\|_X$  は次のように評価することができる。

$$\|(T_L \varphi)_r\|_X \leq \|(I - P_n A)^{-1} f_r\|_X + \|(I - P_n A)^{-1} (P_n A - A)\varphi_r\|_X, \quad (18)$$

ここで、

$$\|(I - P_n A)^{-1} f_r\|_X^2 = \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1 + m^2)^p |b_m|^2 = \|f\|_X^2 - \sum_{|m|=0}^n (1 + m^2)^p |b_m|^2 \quad (19)$$

$$\|(I - P_n A)^{-1} (P_n A - A)\varphi_r\|_X^2 = \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1 + m^2)^p \frac{1}{m^2} |a_m|^2 \leq \frac{1}{n^2} w_r^2. \quad (20)$$

特に  $f \in C^p[0, 2\pi] =: Y \subset X$  の場合は,  $\|f\|_X$  は

$$\|f\|_X \leq \sqrt{\frac{2^p}{2\pi}} \cdot \|f\|_Y \quad \text{with } \|f\|_Y := \left( \int_0^{2\pi} \left\{ |f(x)|^2 + \left| \frac{d^p f}{dx^p} \right| \right\} dx \right)^{1/2}, \quad (21)$$

のように評価でき,  $p = 1$  の場合は

$$\|f\|_X = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \|f\|_Y \quad (p = 1), \quad (22)$$

のような関係が成り立つ. このようにして, 包含関係 (12) 式を調べることができる.

### 3.2 $K$ が非線形の場合

$K$  が非線形の場合は, 他の数値的検証法と同様に, 次式で与えられる簡易 Newton 法を用いる.

$$T_N \varphi = \varphi - \tilde{J}^{-1} F \varphi, \quad (23)$$

ここで,

$$F \varphi = \varphi - G \varphi, \quad \tilde{J} = \widetilde{F' \varphi} = I - P_n (G' \tilde{\varphi}_n) P_n, \quad (24)$$

で,  $G' \varphi$  は Fréchet 微分を表す ( $G$  は (1) 式で定義されている). (24) 式の右辺第 2 項を  $\psi = \tilde{J}^{-1} F \varphi$  のようにおくと, 次式を得る.

$$\tilde{J} \psi = F \varphi. \quad (25)$$

上式の左辺は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}
(\tilde{J}\psi)(x) &= \psi(x) - (P_n(G'\tilde{\varphi}_n)(P_n\psi))(x) \\
&= \psi(x) - P_n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{\log}(x, \xi) \cdot ((K'\tilde{\varphi}_n)(P_n\psi))(\xi) d\xi \right\} \\
&= \psi(x) - \sum_{|m|=1}^n \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ((K'\tilde{\varphi}_n)(P_n\psi))(\xi) e^{-im\xi} d\xi \cdot \frac{1}{|m|} e^{imx} \right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} - \sum_{|m|=1}^n \frac{1}{|m|} \left\{ \sum_{|k|=0}^n c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial c_k} ((K'\tilde{\varphi}_n)\psi) \right\}(\xi) e^{-im\xi} d\xi \right\} \cdot e^{imx} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{mk} c_k \right) e^{imx} ,
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで,

$$\psi(x) = \sum_{|m|=0}^{\infty} c_m e^{imx} \quad (c_m \in \mathbb{C}) , \tag{27}$$

とおき, 次の関係を用いた.

$$\begin{aligned}
((K'\tilde{\varphi}_n)(P_n\psi))(x) &= (K'\tilde{\varphi}_n) \left( \sum_{|k|=0}^n c_k e^{ikx} \right) = \sum_{|k|=0}^n c_k \{ (K'\tilde{\varphi}_n) e^{ikx} \} \\
&= \sum_{|k|=0}^n c_k \left\{ \frac{\partial}{\partial c_k} ((K'\tilde{\varphi}_n)\psi) \right\}(x) .
\end{aligned} \tag{28}$$

(26) 式中の  $\alpha_{mk}$  には次の関係がある.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mk} &= 1 & (m = k) \\ \alpha_{mk} &= 0 & (m \neq k) \end{aligned} \right\} \text{ for } m > n \text{ or } k > n . \tag{29}$$

(25) 式の右辺は次のように表される.

$$\begin{aligned}
(F\varphi)(x) &= \varphi(x) - (G\varphi)(x) \\
&= \varphi(x) - \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{\log}(x, \xi) \cdot (K\varphi)(\xi) d\xi + f(x) \right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (a_m - b_m) e^{imx} - \sum_{|m|=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K\varphi)(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right) \cdot \frac{1}{|m|} e^{imx} \right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m e^{imx}.
\end{aligned} \tag{30}$$

これらより，次式を得る．

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{mk} c_k = \beta_m \quad (\forall |m| = 0, 1, \dots). \tag{31}$$

有限次元部分の包含関係  $(T_N\varphi)_n \subseteq \mathcal{N}_n$  は区間 Fourier 係数  $(T_N\varphi)_n$  を用いて調べる．その係数は，上式と Krawczyk 形式

$$T_N\varphi = \varphi - \tilde{J}^{-1}F\varphi \subseteq \varphi - \tilde{J}^{-1}\{F\tilde{\varphi}_n + (F'\varphi)(\varphi - \tilde{\varphi}_n)\}, \tag{32}$$

と

$$\|(I - P_n)\varphi\|_{\infty} = \|\varphi_r\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{p - \frac{1}{2}}} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}} w_r \quad \left(p > \frac{1}{2}\right), \tag{33}$$

を用いて評価できる．

一方，打ち切り項の包含関係  $(T_N\varphi)_r \subseteq \mathcal{N}_r$  は  $\|(T_N\varphi)_r\|_X \leq w_r$  と同値である．簡単のために， $f \in X_n$  とする．このとき， $q = p - 1$ ， $p, q \in \mathbb{Z}$  とすると，(29)(31) 式より，ノルム  $\|(T_N\varphi)_r\|_X$  は次のように評価できる．



$$\begin{aligned}
\|(T_N \varphi)_r\|_X^2 &= \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^p \left| \frac{1}{2m\pi} \int_0^{2\pi} (K\varphi)(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \\
&= \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^p \left| \frac{1}{2m^{1+q}\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^q}{d\xi^q} (K\varphi) \right) (\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \\
&\leq \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^p \frac{1}{n^{2(1+q-p)}} \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K\varphi)^{(q)}(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \\
&\leq \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^p \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ (K\varphi_n)^{(q)}(\xi) + (K'\varphi)^{(q)}\varphi_r(\xi) \} \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \\
&\leq \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^p 2 \left\{ \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K\varphi_n)^{(q)}(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K'\varphi)^{(q)}\varphi_r(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \right\} \\
&= \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^p 2 \left\{ \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\ell}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K\varphi_n)^{(q+\ell)}(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K'\varphi)^{(q)}\varphi_r(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \right\} \\
&\leq \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^p 2 \left\{ \frac{1}{n^{2\ell}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(K\varphi_n)^{(q+\ell)}(\xi)|^2 d\xi \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K'\varphi)^{(q)}\varphi_r(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \right\} \\
&\leq \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^p 2 \left\{ \frac{1}{n^{2\ell}} \|(K\varphi_n)^{(q+\ell)}\|_{\infty}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K'\varphi)^{(q)}\varphi_r(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \right\}, \tag{34}
\end{aligned}$$

ここで,  $K\varphi_n \in C^\infty[0, 2\pi]$  であることを用いた. 上式の右辺第2項の被積分関数が

$$(K'\varphi)^{(q)}\varphi_r(x) = (\hat{K}\varphi)(x) \cdot \frac{d^s \varphi_r}{dx^s} \quad (s \in \mathbb{Z}, 0 \leq s \leq q = p-1), \tag{35}$$

のように表せるとき、右辺第2項は次のように評価できる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (K'\varphi)^{(q)} \varphi_r(\xi) \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 &= \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\hat{K}\varphi)(\xi) \cdot \frac{d^s \varphi_r}{d\xi^s} \cdot e^{-im\xi} d\xi \right|^2 \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| (\hat{K}\varphi)(\xi) \cdot \frac{d^s \varphi_r}{d\xi^s} \right|^2 d\xi \\
 &\leq \|\hat{K}\varphi\|_{\infty}^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d^s \varphi_r}{d\xi^s} \right|^2 d\xi \\
 &= \|\hat{K}\varphi\|_{\infty}^2 \sum_{|m|=n+1}^{\infty} |m^s a_m|^2 \\
 &= \|\hat{K}\varphi\|_{\infty}^2 \sum_{|m|=n+1}^{\infty} \frac{m^{2p}}{m^{2(p-s)}} |a_m|^2 \\
 &\leq \frac{1}{n^{2(p-s)}} \|\hat{K}\varphi\|_{\infty}^2 \|\varphi_r\|_X^2 \\
 &\leq \frac{1}{n^{2(p-s)}} \|\hat{K}\varphi\|_{\infty}^2 w_r^2.
 \end{aligned} \tag{36}$$

このようにして、包含関係 (12) 式を調べることができる。

#### 4. まとめ

本研究では、(1) 式のような対数的特異核を含む積分方程式の精度保証付き数値計算法について考えた。三角多項式に対するこのタイプの特異積分の性質を考慮して、周期的 Sobolev 空間  $H^p[0, 2\pi]$  における Schauder の不動点定理を適用することが、基本的なアイデアである。特異積分作用素  $S: H^p[0, 2\pi] \rightarrow H^{p+1}[0, 2\pi]$  の連続性より、実用的な計算時間の範囲で検証が行えると期待される。今後は具体的な方程式に対して、本研究で提案した手法を適用し、その有効性を検討したいと考えている。

#### 参考文献

- [1] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer, 1999.
- [2] H. Okamoto and M. Shōji, *The Mathematical Theory of Permanent Progressive Water-Waves*, World Scientific, 2001.
- [3] H.-J. Dobner, Verification Methods for Fredholm Integral Equations, Intern. J. Computer Math., Vol.48, pp.251–261, 1993.
- [4] 大石 進一, 非線形解析入門, コロナ社, 1998.