

Characteristic O^+ の 流れについて

神戸大 理学部 浦 太郎

§ 1. 序.

本講演の主目的は特しく得られた結果を報告することではない。実際、特しい結果は最後に述べる定理だけである。局所力学系 (local dynamical system, local system と略称) における characteristic O^+ の概念は著者によって導入されたが、この概念はそのまま局所半力学系 (local semi-dynamical system, local semi-system と略称) にも適用される。力学系 (global dynamical system, global system と略称) に対しては [1], local semi-system に対しては [5] 等の研究がある。特に [1] では R^2 を相空間とする, characteristic O^+ の global system に対して, 完全な分類が与えられている。(本研究所講究録 87 に解説がある。) [1] では条件の必要性のみを強調している

が、得られた条件は十分でもある。本講演の目的は、最後の定理を除き、characteristic 0^+ の local system の研究が、local system の研究上、どんな立場にあるか、どんな意味を持つかを解説することである。

以下の解説はほとんどその儘で、local system, local semi-system にもあてはめられるが、説明を簡単にするために、global system について述べる。

§2. Global Dynamical Systems と Isomorphism.

2.1 以下 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ で実数全体, 負でない実数全体の集合を表わす。これらにおいて, 位相, 代数は常に通常のものである。 ($\mathbb{R}^-$ は負でない実数全体の集合を表わす。以下 $+$ について説明したものは, $-$ については説明しない。Symmetry で容易に理解されよう。)

2.2 X を topological space とする。 π が $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ の写像で

$$(1) \quad \pi(x, 0) = x$$

$$(2) \quad \pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$$

$$(3) \quad \pi \text{ は } X \times \mathbb{R} \text{ で連続}$$

なる3条件をみたすとき, (X, π) は力学系 (global dynamical system), または π は phase space

X の上の 力学系 または 流れ ((continuous) flow) であるという。

この定義の motivation, 応用等は既知と考へ, 説明を加えない。

以下 phase space X の上の一つの flow π が与えられているものとする。

2.21 一般に写像 $f: A \times B \rightarrow C$ が与えられているとき, $a \in A$ に対して $f_a: B \rightarrow C$ は

$f_a(b) = f(a, b)$ で定義される写像を表わすものとする。特にこれと之は $x \in X$ に対しては, π_x は

$\pi_x(t) = \pi(x, t)$ で定義される写像 $\pi_x: \mathbb{R} \rightarrow X$ である。 π_x による $\mathbb{R}$ の像, すなわち $\pi_x(\mathbb{R})$

を x を通る (全)軌道 ((total) orbit) という。

$\pi_x(\mathbb{R}^+)$ を 正半軌道 (positive semi-orbit, + semi-orbit と略記) と呼ぶ。 $\pi_x(\mathbb{R}) = C(x)$,

$\pi_x(\mathbb{R}^+) = C^+(x)$ で表わす。 $\overline{C(x)}$, $\overline{C^+(x)}$ を 軌道閉包 (orbit closure), 正半軌道閉包 と呼んで $K(x)$, $K^+(x)$ で表わす。

$$x \mapsto C(x), C^+(x), K(x), K^+(x)$$

によって四つの写像 $X \rightarrow 2^X$ が定義される。

たとえば $C: X \rightarrow 2^X$ であるが, 常に行われる通

り, $M \subset X$ に対して

$$C(M) = \bigcup_{x \in M} C(x)$$

と定義することによって, 写像 $C: 2^X \rightarrow 2^X$ が得られる。

2.22 $x \in X$ の中, π_x が "constant map" になるような x を 特異点 (singular point), または危点 (critical point) と呼ぶ。Singular points 全体の集合を $\mathcal{S}$ または $\mathcal{S}_\pi$ で表わすことにする。そうすれば

$$x \in \mathcal{S} \iff \forall t \in \mathcal{R}, \pi_x(t) = x$$

$$\iff C(x) = \{x\}$$

$$\iff C^+(x) = \{x\}.$$

$x \in X$ に対して

$$\mathcal{C}_x = \{T \in \mathcal{R} \mid \pi(x, T) = x\}$$

とおく。 $\mathcal{C}_x \ni 0$ は 2.2 の公理 (1) より明らかである。 $\mathcal{C}_x \neq \{0\}$ のとき, x は 周期的 (periodic) であるという。Periodic points 全体の集合を $\mathcal{P}$ または $\mathcal{P}_\pi$ とかくことにする。 $\mathcal{P} \supset \mathcal{S}$ は明らかである。 $\mathcal{C}_x \ni T \neq 0$ ならば

$$\forall t \in \mathcal{R}, \pi(x, t+T) = \pi(x, t)$$

が得られ, π_x は普通の意味で 周期函数 $\mathcal{R} \rightarrow X$ であ

る。

X が T_0 -space ならば, $x \in P-\mathcal{S}$ に対しては, $\mathcal{G}_x$ は discrete (cyclic) subgroup of $\mathcal{R}$ になる。そのとき $\mathcal{G}_x$ の最小の正の要素, したがって $\mathcal{G}_x$ の generator, を x の基本周期 (fundamental period, elementary period, prime period) と呼ぶ。 (X が T_0 -space でないと, $\mathcal{G}_x$ が $\mathcal{R}$ の中で dense, いても $\neq \mathcal{R}$ でありうる。)

2.3 抽象的な構造が定義された場合, 何进行研究するかを明確にするためには, その構造の isomorphism を決定しなければならない。如何に決定するかは, その抽象化の母体と, その研究目標に拘束される。力学系の場合に, isomorphism を如何に定めるかは, 論議の分れる所であろう。ここでは, 天下りに2種類の isomorphism について述べる ([11] 参照)。以下 (X, π) , (Y, ρ) を二つの力学系とする。

定義. 一つの homeomorphism $h: X \rightarrow Y$ において

$$(x) \quad \forall x \in X \quad h \circ C_\pi(x) = C_\rho(h(x))$$

が成り立つとき, h は $\pi \rightarrow \rho$ の NS-isomorphism であるという。条件 (x) は次の diagram が commute することと同値である。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & Y \\
 C_p \downarrow & & \downarrow C_p \\
 2^X & \xrightarrow{h} & 2^Y
 \end{array}$$

定義. $h: X \rightarrow Y$ を homeomorphism とする.

写像 $\varphi: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $\varphi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が homeomorphism であり, $\varphi_x(0) = 0$ であり φ_x は increasing とする.

(β) $\forall (x, t) \in X \times \mathbb{R}, h(\pi(x, t)) = \rho(h(x), \varphi(x, t))$ が成り立つとき, (h, φ) は $\pi \rightarrow \rho$ の GH-isomorphism であるという. φ を reparametrization map という. φ がある範囲 $A \times \mathbb{R} (\subset X \times \mathbb{R})$ 上連続であるとき, (h, φ) は A 上 continuous である. $\forall x \in B \subset X, \varphi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が increasing であるとき, (h, φ) は B 上 increasing であるという. $A = X, (B = X)$ のときには A 上 continuous, $(B$ 上 increasing) という代りに, 単に continuous (increasing) といってしまうであろう.

$\varphi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は homeomorphism であるから, φ_x は strictly increasing かつ strictly decreasing である. もし X が connected (これは essential

には常に仮定してよい) であるならば, φ が continuous の場合には, φ_x が increasing. か decreasing かは x によらない。

$$\chi(x, t) = (h(x), \varphi(x, t))$$

とあって, 写像

$$\chi: X \times \mathbb{R} \longrightarrow X \times \mathbb{R}$$

を定義すると, 条件 (β) は次の diagram が commute することと同値である

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\chi} & Y \times \mathbb{R} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

2.31. (h, φ) が $\pi \rightarrow \rho$ の GH-iso. ならば h は $\pi \rightarrow \rho$ の NS-iso. である。しかし, h が $\pi \rightarrow \rho$ の NS-iso. であっても, (h, φ) が $\pi \rightarrow \rho$ の GH-iso. になるような reparametrization φ があるかどうかは, 一般には分からない。右の次の定理が証明されている。

定理. h を $\pi \rightarrow \rho$ の NS-iso. とする。 X は h によって Y も Hausdorff ならば, (h, φ) が X - $\mathbb{R}$ 上 continuous ~~である~~ GH-iso であるような, repara-

metrization φ がある ([7] 参照)。

§3. Immobile flows と parallel flows.

3.1. Global systems の中で最も簡単なものを考えよう。簡単という言葉には主観性が入りうるが、 $X = \mathcal{S}_\pi$ であるものが、最も簡単であることに異論はないであろう。

$X = \mathcal{S}_\pi$ であるような π を immobile flow という。これは微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

に対応するものである。

定理 $(X, \pi), (Y, \rho)$ を π, ρ の immobile flows とする。これらが isomorphic であるための必要十分条件は、 X と Y とが homeomorphic であることである。

単に isomorphic と言ったが、NS-iso. と考えても GH-iso. と考えても、この場合は同じである。しかも GH-iso. の条件に $\forall x \in X, \varphi_x: \text{identity}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の条件を加えても変わりはない。かくて、この最も簡単な流れである immobile flows は、phase space X の位相的性質によって完全に定まってしまう、力子の内訳として考える余地はない。まさにつまらない flow

である。

3.2 そこで *immobile flows* をのぞいて、最も簡単な流れを考えるのが順序であろう。それがどんな流れであるかは色々と議論が湧く。とりあえず $X = \mathcal{S}_\pi$ に対照的な条件として、 $\mathcal{S}_\pi = \phi$ を考えてみる。みかけの条件は簡単であるが、実際には複雑な様相を呈することがある。 $X = \mathbb{R}^2$ の場合に対しては、このような流れの *isomorphism* に関する完全な分類ができている [8]。

一方 2 次元の *compact manifolds* の上の流れでは、 $\mathcal{S}_\pi = \phi$ となりうるのは *torus* の場合にかぎることが知られている (Poincaré)。この場合の研究は完全ではないが、可成りよくできている (たとえば [9] 参照)。 $\mathbb{R}^2$ の場合をみても、わかるように、相当に複雑であって、一般の *phase space* に対しては非常に難しい問題である。

3.3 そこで次の段階として $\mathcal{S}_\pi = \phi$ よりもう少し条件を強くした流れを考える。微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \text{const.} \neq 0$$

の抽象化である。 (X, π) に対して、位相空間 Y が存在して、位相空間として $X = Y \times \mathbb{R}$ とかけ、 $x = (y, s) \in Y \times \mathbb{R}$ と表わるとき

$$\pi(y, s, t) = (y, s+t)$$

と表わされるならば, π は parallel flow であるという。直ちにわかるように

$$\text{parallel} \Rightarrow \mathcal{S}_\pi = \phi.$$

後にもう少し詳しく述べるが逆は真でない。 $X = \mathbb{R}^2$ の場合には上座通り $\mathcal{S}_\pi = \phi$ の流れは完全に分類されているから, それをみても逆が真でないことがわかる。また parallel flow があれば, その phase space は compact でありえない。(Torus では $\mathcal{S}_\pi = \phi$ の流れがあるが, parallel flow はない)。

上記のような γ の存在性 (parallelizability) は Nemyskii [9] をはじめ, 非常に多くの人によって研究されている。中でも, Antosiewicz と Dugundji [2] の条件は, きれいに整っていて, しかも基礎的であると思う。それを説明するために一つの概念を導入しよう。

定義. $x \in X$ とする. $\mathcal{V}(x)$ で x の近傍 ^(filter) を表わす。

また $\mathbb{L}^+$ で $\mathbb{R}$ の中の net $\alpha \rightarrow \infty$ に対応する

filter を表わす. $\mathcal{V}(x) \times \mathbb{L}^+$ に従った π の

cluster set を $J^+(x)$ と書き, これを positive (+ と略記) prolongational limit set という。

かくて $J^+ : X \rightarrow 2^X$ であり $J^+ : 2^X \rightarrow 2^X$

でもある。

定理. X を completely regular で Lindelöf の性質を持つ空間とする. X の上の流れ π が parallelizable であるための必要条件は $J^+(X) = \emptyset$ なることである。

(注意 $J^+(X) = \emptyset \iff J^-(X) = \emptyset \iff J(X) = \emptyset$).

これは [2] を改変 (Hayek による) したものと, J を使って表現しなおしたものである ([4]).

定義. Filter-base $\mathcal{V}(x) \times \mathbb{R}^+$ に従った π の cluster set を $D^+(x)$ と書いて, x の positive (+ と略記) prolongation という。

定理. X を separable な metric space とする. X の上の流れ π が parallelizable であるための必要条件は

$$(1) \quad \forall x \in X \quad D^+(x) = K^+(x)$$

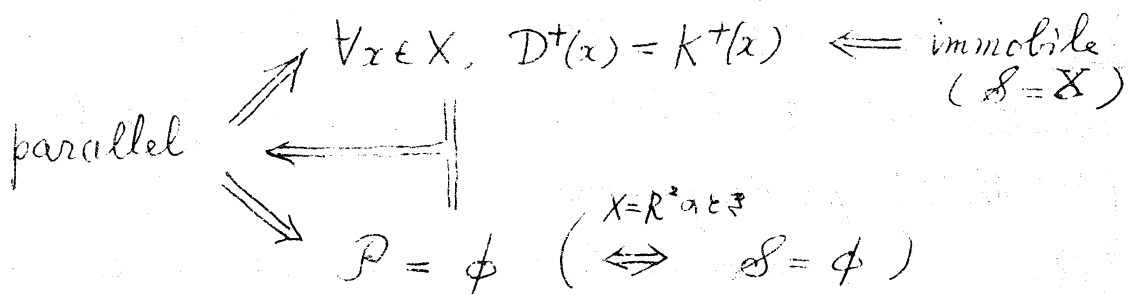
$$\text{かつ } (2) \quad \mathcal{P} = \emptyset$$

なることである。

$X = \mathbb{R}^2$ の場合には $\mathcal{S} = \emptyset \iff \mathcal{P} = \emptyset$ であることに注意しよう, これは有名な Bendixson の定理である. したがって, この場合には, 条件 (2) は $\mathcal{S} = \emptyset$ でおおきえることが出来る。

一般に, 特に $X = \mathbb{R}^2$ の場合でも, (1) と (2) とは independent である. (例外は $X = \mathbb{R}^1$, S^1 位であろう).

3.3. π を X の上の immobile flow としよう. $\pi(x, \mathbb{R}^+) = \{x\}$ 故に, $D^+(x)$ は $V(x)$ の cluster set に他ならない. ゆえに, X が m Hausdorff ならば $D^+(x) = \{x\} = K^+(x)$ である. かくて, X が m metric, separable ならば



なる diagram が得られる.

3.4 同じ phase space 上の immobile flows は, 上述のような isomorphism を考えるかぎり, すべて同じものであると考えられることを述べた. それでは parallel flow において, このことはどうであろうか. $X = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ に対しては答えは yes であるが, 一般には no である. もう少し詳しく議論が近く発表されるであろう.

§4. Stability, D-stability, Characteristic O^+ .

4.1. π を phase space X の上の流束とする。

$\phi \neq M \subset X$ が $C^+(M) = M$ ($\Leftrightarrow C^+(M) \subset M$) を満たすとき M は positively (+ と略記) invariant であるという。主として考えるのは, closed + inv. set である。今後特に断わらないかぎり, M は常にそうであるとする。

定義. $\forall U \in \mathcal{V}(M), \exists V \in \mathcal{V}(M), C^+(V) \subset U$ が成り立つとき, M は + stable であるという。

定義. $D^+(M) = M$ が成り立つとき, M は + D-stable であるという。

X が regular な場合には (closed + inv. sets に対して)

$$+ \text{ stability} \Rightarrow + \text{ D-stability}$$

が得られるが, 一般に逆は真でない。逆が成り立つための一つの十分条件は, X が locally compact かつ M が compact なことである。

(一方, M が closed であるという条件をはずすと, 色々なことが起こる。たとえば M が open positively inv. なら, M は必ず + stable であるが, 必ずしも + D-stable ではない。)

$D^+(M) = M$ となる。したがって M は $+D$ -stable である。その結果 characteristic O^+ の流れにおいては、すべての closed + inv. set は $+D$ -stable であることがわかる。逆の証明の方はむしろ、やさしくて次の定理が得られる。

定理. 一つの流れが characteristic O^+ を持つための必要+条件は、すべての closed + inv. set が $+D$ -stable なることである。

4.3. Phase space が regular ならば closed + inv. set において $+stability \Rightarrow +D$ -stability が成り立つこと、逆は真でないことを示す。この逆が真でないことを明らかに示してくれるのは parallel flow である。Metric space 上の parallel flow が characteristic O^+ を持つことは既に述べ、したがって 4.2 によって、^{その流れ} parallel flow においては、すべての closed + inv. set は $+D$ -stable である。しかし、大まかにいうと、metric space 上の parallel flow においては、どんな closed + inv. set も $+stable$ ではない。もっと正確に述べよう。

定理. π を metric space X の上の parallel flow とする。したがって、位相空間 Y が存在して、

位相空間として $X = Y \times \mathbb{R}$ であり, $X \ni x$ を (y, s) ($y \in Y, s \in \mathbb{R}$) で表わせば, $\pi((y, s), t) = (y, s+t)$ である. $x_0 = (y_0, s_0) \in Y \times \mathbb{R}$ に対して $K^+(y_0, s_0)$ が $+stable$ であるための必要條件は y_0 が Y の孤立点であることである.

証明は難しくないが省略するが, 条件が必要であることが, 大切である.

4.4 結論として, characteristic O^+ という性質は, parallel と immobile との両方の, D-stability の見地からの拡張になっている. しかし, stability の見地からではこのような拡張はできない.

§5. Absolute stability と characteristic O^+ .

5.1. $D^+(x)$ は $X \times \mathbb{R}$ の上のフィルター族 $\mathcal{V}(x) \times \mathbb{R}^+$ に従って, π の cluster set である.
 $D^+(x) = D^+(x)$ において, しかるべき方法で, 超限帰納法を使うと, すべての ordinal number α に対して, $D_\alpha(x)$ なる集合を定義することができる. これを x の order α の $+prolongation$ と呼ぶ. 実際, その定義には二通りの方法が与えられているが, ここでは, その詳細は述べてない. ([10], [3], cf [6]).

ただし, どちらの方法を用いても, $\alpha < \beta \Rightarrow D_\alpha^+(x) < D_\beta^+(x)$ である。

X が濃度 $\aleph_n$ なる用集合の底をもつとしよう。

ω_{n+1} が $\aleph_{n+1}$ の始数を表わすと, すべての $N \subset X$ に対して, すべての $\beta \geq \omega_{n+1}$ に対して

$$D_{\omega_{n+1}}^+(N) = D_\beta^+(N)$$

が成り立つ。したがって実際には ω_{n+1} より大きい order の prolongation を考える必要はない。そこで $x \in X$ を与えると

$$D_\alpha^+(x) = D_{\alpha+1}^+(x)$$

であるような, 最小の ordinal α がある。この際 $K^+(x) = D_0^+(x)$ と定義して, prolongation の order を 0 まで拡張しておくことは, 自然であり, 便利でもある。

この最小の α を x の $+$ characteristic と呼び, x は characteristic α^+ を持つという。この最小の α は x に依存するから, $\alpha(x)$ と書くことにはなる。 $0 \leq \alpha(x) \leq \omega_{n+1}$ が成り立つ。それで

$$\alpha_0 \equiv \sup_{x \in X} \alpha(x) \leq \omega_{n+1}$$

とあって, α_0 をわれわれの流れの $+$ characteristic と呼び, われわれの流れは characteristic α_0^+ を

持つという。明らかに、前に導入した characteristic O^+ は新しい定義の特別な場合となる。

Continuous, increasing GH-iso に対しては、 $D_\alpha^+(x)$ は invariant であるから、characteristic も、それに対して invariant である。 X が与えられると、上述の $\mathcal{N}_n$ の最小なものがある。かくて X 上の流は、Continuous, increasing GH-iso. を法として、高々 $\mathcal{N}_{n+1}$ 個の級に、しかも well order を持って分類される。いいかえると各級には、ordinal numbers $0, 1, 2, \dots, \omega_0, \omega_0+1, \dots, \omega_{n+1}$ の丁度一つが対応する。しかし、これらの ordinal numbers すべてが実現されるかどうかは、わからない。特に、phase space が与えられた有限次元 (separable) manifold であるような流は $\mathcal{N}_1$ 個に分類される。

5.2 オペラの ordinal number に対して $D_\alpha^+(x)$ が定義されることを示す。今 M を closed + inv set とすると、 $\forall \alpha \quad D_\alpha^+(M) = M$ が成り立つとき、 M は + absolutely stable であるという。

X に対して 5.1 のようにして定まる $\mathcal{N}_n$ を与えると

$M : + \text{absolutely stable} \Leftrightarrow D_{\omega_{n+1}}^+(M) = M$ である。

定理. Characteristic O^+

$\iff$ すべての closed + inv. set は + absolutely stable.

$\Leftarrow$ はあきらかである。 $\Rightarrow$ の証明は難しくはないが~~複雑~~である。 それには D_A の定義をよく理解しなければならぬので、ここでは述べない。

References

- [1] S. Ahmad : *Dynamical Systems of Characteristic 0^+* , Pacific J. Math., 32(1970), 561-574.
- [2] H. Antosiewicz and J. Dugundji : *Parallelizable Flows and Liapunov's Second Method*, Ann. of Math. 73 (1961), 543-555.
- [3] J. Auslander and P. Seibert : *Prolongations and Stability in Dynamical Systems*, Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 14 (1964), 237-268.
- [4] N. P. Bhatia : *Criteria for Dispersive Flows*, Math.Nachr. 32 (1966), 89-93.
- [5] N. P. Bhatia and O. Hájek : *Local Semi-Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, 90, Springer-Verlag, Berlin 1969.
- [6] N. P. Bhatia and G. Szegő : *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin 1970
- [7] I. Kimura : *Isomorphism of Local Dynamical Systems and Separation Axioms for Phase Spaces*, Funkc. Ekvac.13 (1970), 23-34.
- [8] R. McCann : *Planar Dynamical Systems without Critical Points*, Funkc. Ekvac.,13 (1970), 67-95.
- [9] v.v. Nemytskii and v.v. Stepanov : *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press Princeton, N. J. (1960).
- [10] T. Ura : *Sur le courant extérieur, etc., l'ordre de stabilité et le complément*, Funkc. Ekvac. 2 (1959), 143-200, 9 (1966), 171-179.
- [11] T. Ura : *Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems*, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 99-122.