

ハミルトニアン系カオスの幾何学的性質

早大理工 相沢 洋二

1. ポアンカレ系の淀み層理論

ポアンカレ系は KAM 理論から予想されたように非常に複雑な相空間をもつ。KAM トーラス、PB トーラスの分布は現在でもまだ完全には解明されていないが、或る種の自己相似性を持っていると予想される。カオス軌道はその複雑な構造を反映してこれまで良く研究されて来た双曲的力学系のエルゴード性とは著しく違う側面を持つ。ポアンカレ系における特異な挙動の一つが $f^{-\nu}$ ゆらぎである。ポアンカレ系の一般理論を進め、クォーツ系の $1/f$ ゆらぎの理解を深めようとするのが本研究の目的である。ちなみにクォーツ振動系の最も単純なモデルは格子振動系であり、その動力学の研究は古く E. フェルミらによって行われている。

まず我々はポアンカレ系の相空間に注目し、いわゆる淀み層理論を提案した。それによって多くの現象が統一的に理解できるが、とくに大切な点はトーラスの自己相似分布に由来する普遍則を導出したことである。N. ネコロシェフ定理に従うと、ポアンカレ系には非常に長い時間スケールの拡散現象がある。そのスケールに特有の現象では L. カダノフらが先に指摘した繰り込み理論と我々の淀み層理論とは一致する。淀み層理論をクォーツ系に適用すると、フォノン数や位相ゆらぎが厳密に f^{-2} スペクトルに従う。これはアーノルド拡散を決める新しい成果である。しかしその結果はクォーツ実験の指数 -1 と大きく違っている。もちろん、 $0.5 < \nu < 1.5$ ぐらいのデータも多く、必ずしも $\nu = 1$ ではないが、違いは大きい。したがって、次のステップとして実際の状況にあわせるモデルの拡張を試みた。共鳴モードはさまざまな減衰効果をもつので、わずかな摩擦を取り入れた。それによって、 $1 < \nu < 1.5$ ほどに指数が減少することが明らかになった。わずかな攪乱によって $1/f$ ゆらぎが回復する可能性をさらに追求する必要がある。

2. カオスによる緩和機構

先の減衰効果には外部要因も多く考えられるが、一方カオス自身によって、つまり内部的要因によって生み出されるものがある。カオス由来の不可逆性の起源を探り、ゆらぎと緩和の正しい関係を解明する為にポアンカレ系の幾何学化理論を追求した。結果は極めてパラドックス的であり、従来の常識的カオスの理解を大きく書き換えるものであった。曲率が負の領域では従来型の双曲的カオスの発生をみるが、正曲率領域においては位相的な不安定性が重要な役割を果たす。先に述べた淀み層理論も位相的不安定性の帰結であることが明かになった。さらに、双曲型不安定性が短時間緩和を決定するのに対して、位相不安定性は長時間緩和を主に決定している。つまり、 $1/f$ ゆらぎの発生機構のポイントは位相不安定性と言って良い。

クォーツ系に対して上の幾何学化の解析を試みた結果は見事に上の結論を支持するものであった。格子系の誘導現象が位相不安定性によって発生し、次いで双曲型不安定性の間欠的発生によって長時間緩和が説明できた。さらに、曲率の分布が逆べき則に従うという著しい結論を得ること出来た。

3. 大数法則のやぶれ

$1/f$ ゆらぎの非定常性をポアンカレ再帰時間の発散に帰着できるらしいことが先の緩和機構の研究から予想されたところから、 $1/f$ ゆらぎの非定常性を大数法則の破れとして説明する大偏差理論が探求された。非定常領域における大偏差理論は数学的には未解決のテーマであるが、我々は非定常カオスの具体的モデル－変形ベルヌーイ系－に対してスペクトル、アラン分散、エントロピー関数の具体的表現を理論的に導き出し、それらのスケーリング指数が一定の関係にあることを示した。さらに、非定常領域ではエントロピー関数のゆらぎ－剰余エントロピー－という新しい特性量が長時間ゆらぎを決定するという重要な結論を得た。これらの解析は直接ポアンカレ系に応用できるかどうか今のところ不明であるが、 $1/f$ ゆらぎの力学機構を統一的に理解する手段を与えていることは確かである。また、非定常場における電子電導に生じる長時間相関と伝導度異常の関係が上の大偏差理論の枠組みの中で整理できることも明らかにできた。

以上、力学系の $1/f$ ゆらぎの発生機構は、エルゴード性、緩和過程論、大偏差論といった極めて深い未解決理論と密接に関連している。本研究によってその一部を一貫した理論の上で解明できたことは大きな進歩であった。