

戸田格子の破碎現象と確率統計

大阪エール予備校 岩 田 和 朗

大 阪 教 育 大 鯖 田 秀 樹

§1 はじめに

非線形相互作用を考えた格子振動の力学系はエルゴード性を示すだろうか。という問題からソリトンをもつ可積分な力学系の研究が進められている。現在のところ Ford らの研究で示されているように、決してエルゴード性も混合性も示さない戸田格子のような可積分な力学系と stochastic なエルゴード性を示す力学系の 2 つが知られている。この中間に近似可積分力学系を考え、最初に与えるエネルギーの大小によって可積分的になったり、エルゴード的になったりする力学系を定義しているのは興味深い。エルゴード的な力学系、近似可積分力学系については制限された状態であるにしろ今までの統計力学が適用され得るから問題はない。

可積分力学系は統計力学と矛盾するものなのか。物性の諸現象を説明するモデルになり得ないのか。単にソリトンの存在を許し、数学的興味の対象たるにとどまるものなのか。

いや、自然現象は人間がそこから隔絶し得るほど狭いものではなかろう。どんなに抽象的数学的に見えても、自然現象の内部にとどまっているにちがいない。したがって、可積分力学系も自然現象を説明するためのモデルとしての役割を十分に果すものと考えられる。

戸田先生の考案による戸田格子¹⁾を使って破壊現象、とりわけガラスの繊維²⁾のようなこなごなに砕ける破碎現象を統計的にあつかってみよう。

戸田、広田、薩摩氏³⁾による計算機実験のデータを借用し、破片の長さの分布、および切れる時間の分布（待ち時間と遅れの時間の両方）について確率統計的見地から考察してみよう。そして、その結果を破壊現象をライフワークとされた平田森三氏⁴⁾の結果として比較してみたい。

§2 Chopping による破片の長さの分布

われわれは chopping (破碎) について簡単に説明をし、次に確率論的考察を行い、理論と数値実験のデータを比較する。

1. Chopping のモデル

隣接する格子点がある一定の距離 (r_c) 以上になると切れる (2 点間の相互作用が永久になくなる) ような有限の一次元非線形格子を考える。格子間の相互作用を次のように定める。

$$f(r) = \begin{cases} e^{-r} - 1 & (r < r_c) \\ 0 & (r > r_c) \end{cases}$$

r は隣接粒子間の距離、 $f(r)$ は粒子間に働く力。 r_c の制限がなければ戸田格子である。

この格子の一端を固定し、他端を切れる直前まで張力を加えておく。そして手をはなすと格子は縮み系に波が生じる。波は solitons にわかれる。手をはなした側の自由端でソリトンが反射して、自由端の方から一つずつ規則正しく切れていく。十数箇所切れた後、かなりの時間切れないでいる。そうしてさらに時間がたつとまだ切れないで残っている大部分の格子のあちこちで切れ始める。これはいろんな波が重ね合わさって大きい振巾が生じ、 r_c 以上になって切れるからである。波は非常に複雑に振舞うので切れる位置が全くでたらめに見える。それでわれわれは切れる位置が random に選ばれているかどうかを統計的手法で調べる。このモデルでは破片がさらに切れるということがくり返し起こるのである。十分時間がたてばもうそれ以上切れなくなってしまう。破碎が全部終わった後に、破片の長さの分布を調べる。

2. 理論的考察

ある一定の長さの線分に n 個の切れ目を入れる。そのときそれぞれの破片の長さの分布を考えよう。切れ目の位置をどう選ぶかについてはいろいろ考えられるが、われわれは次のようにきめる。

切れ目を入れる点について、線分内のどの点も等確率に選ばれるとする。即ち、切れる点の位置を示す座標 $\mathbf{X}$ は線分上に一様分布する確率変数とするのである。今、簡単のために線分を $(0, 1)$ 区間とし、切れ目の位置を x で表わす。ただし $0 < x < 1$ の実数である。 $(0, 1)$ 区間が random に $n + 1$ 個の切片に分割されるとは、 n 個の切れ目の点 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ がそれぞれ共通の一様分布に従い、しかもそれらが互いに独立

な確率変数ということである。そのとき, 一つの切片の長さ $\mathbf{L}$ の分布は次のようになる。

$\mathbf{L}$ が t より大きくなる確率は,

$$P_r \{ \mathbf{L} > t \} = (1 - t)^n, \quad 0 < t < 1$$

となる。したがって $\mathbf{L}$ の確率分布は

$$P_r \{ \mathbf{L} < t \} = 1 - (1 - t)^n, \quad 0 < t < 1 \quad \dots\dots (1)$$

となる。しかも他の n 個のどの切片の長さの確率分布も (1) になる。

次に (1) の極限形を調べてみよう。 n を無限大に近づけ, そして $\mathbf{L}$ の長さを $\mathbf{E}(\mathbf{L}) = (n+1)^{-1}$ を単位として測ったとき,

$$P_r \{ n\mathbf{L} < t \} = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow 1 - e^{-t}$$

となる。これが指数分布である。

(0, 1) 区間を (0, N) 区間 ($N > 0$) に拡張した場合は (1) の分布の代わりに

$$P_r \{ \mathbf{L} < t \} = 1 - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^n, \quad 0 < t < N \quad \dots\dots (2)$$

を用いればよい。さらに, $\frac{N}{n} = \alpha$ を一定にしながら n, N を無限大に近づける時,

$$\begin{aligned} P_r \{ \mathbf{L} < t \} &= 1 - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{-\frac{t}{\alpha} \cdot \left(-\frac{N}{t}\right)} \\ &\rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{\alpha}} \quad \dots\dots (3) \end{aligned}$$

となる。 α は $\mathbf{L}$ の平均値である。

3. データとの比較

chopping によって格子を切ったときその切片の長さの度数分布をとり, それを理論分布 (2) と比べる。まず, パラメトリックな方法で検定し, ついでノンパラメトリックな方法を考えよう。格子全体の長さとして 3 つの場合を取る。粒子数が 100 個, 150 個, 200 個の場合である。そのうちの粒子数が 200 個の場合のデータを書いておく (表 1)。他の 100 個と 150 個はグラフだけにしておく (図 1)。

表 1

N = 200 (N' = 155) n = 68 (n' = 38)

L_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_i	6	9	6	5	5	1	0	2	1	1	1	1
$\sum_{j \geq i} N_j / \sum_i N_i$	0.16	0.39	0.55	0.68	0.82	0.84	0.84	0.90	0.92	0.95	0.97	1.0
P_i	0.22	0.39	0.52	0.63	0.72	0.78	0.83	0.87	0.90	0.92	0.94	0.95

N, n は格子数及び切れ目の数

N', n' は初めのソリトンによって規則正しく切れる部分を除いた時の, 残りの粒子数及び切れ目の数。

L_i : 切片の長さ (粒子数)。 N_i : 長さ L_i の本数。 $P_i = 1 - (1 - \frac{L_i}{N'})^{n'}$: 理論分布(2)。

われわれはまずパラメトリックな χ^2 -検定⁵⁾をする。

(i) N = 200 (N' = 155), n = 68 (n' = 38)

$L_i = 7$ のとき $N_i = 0$ であるので, 7 以上の L_i は一つにまとめる。 χ^2 を計算すると $\chi^2 = 4.2$ となる。自由度は $7 - 1 = 6$ となり, そのときの有意水準 $\alpha = 0.05$ の棄却限界点 χ_0^2 は, $\chi_0^2 = 12.6$ となる。したがって $\chi_0^2 > \chi^2$ となり理論分布(2)と度数分布は検定論では一致しているといえる。

(ii) N = 150 (N' = 116), n = 48 (n' = 26)

(i) と同様に計算をする。 $\chi^2 = 10.1$ となる。自由度 $9 - 1 = 8$ の 0.05 棄却限界点は $\chi_0^2 = 15.5$ であるから $\chi_0^2 > \chi^2$ となる。(i) と同様一致しているといえる。

(iii) N = 100 (N' = 79), n = 38 (n' = 24)

$\chi^2 = 12.1$ となる。自由度 $5 - 1 = 4$ の 0.05 棄却限界点は $\chi_0^2 = 9.5$ であるから $\chi_0^2 < \chi^2$ となり一致しているとはいえない。

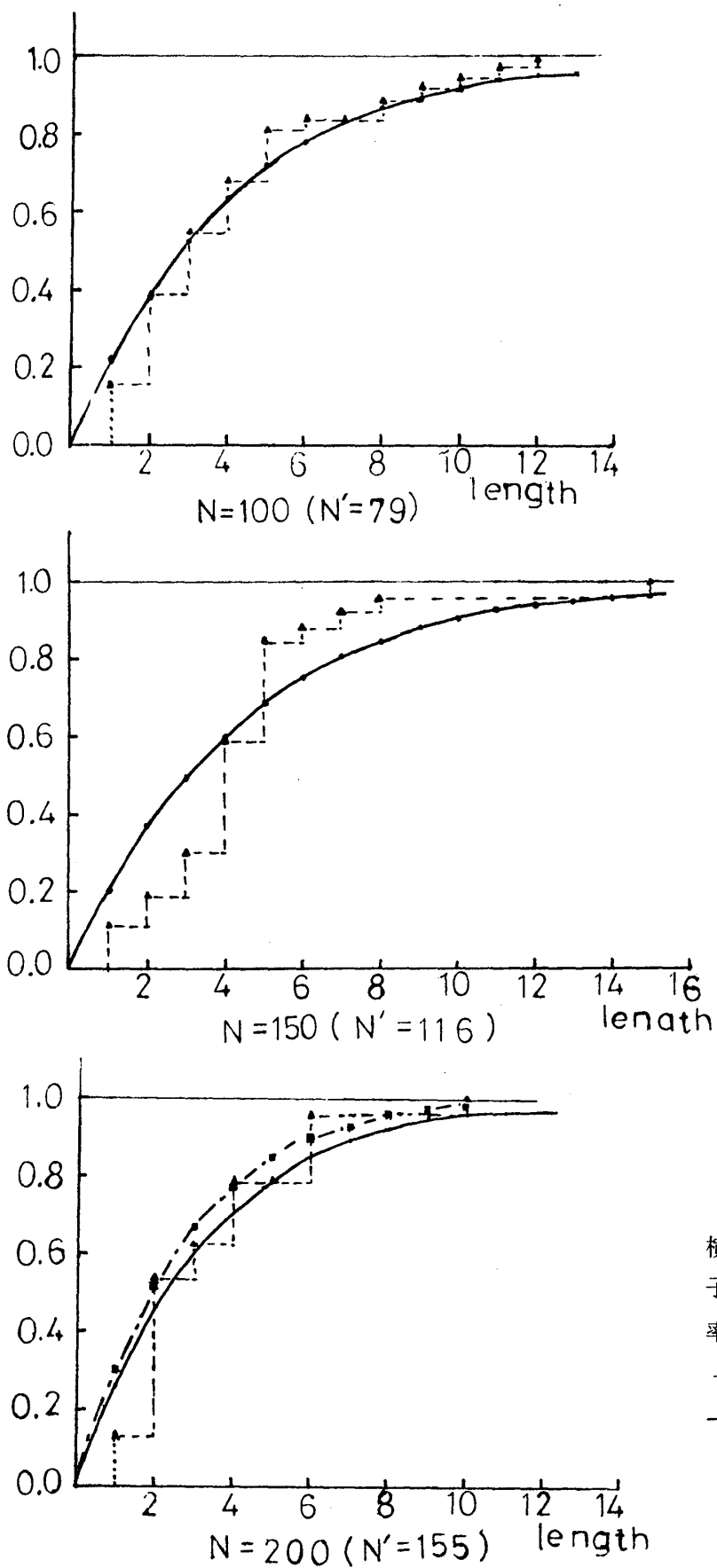


図 1

横軸は切片に含まれる粒子数(長さ)。縦軸は確率。— : 理論分布(2),
 - - - : 度数分布,
 - · - · : 理論分布(4)。

以上の計算および図1から粒子数が少ないほど、分布(2)からはずれてくる。 $N=200$ は非常に良く一致しているが、 $N=100$ のときは一致しているとは言えなくなる。理論分布(2)では切れる位置が連続であるのにわれわれの系では離散的な位置でしか切れない。したがって不連続のものを連続と考えているから、粒子数が少ないとその影響が出てくると思われる。その点についてつぎに議論しよう。

ここで分布(2)についてもう一度考えてみよう。非常にたくさんの $(0, N)$ 区間にそれぞれ n 個の切れ目を入れたときを考える。randomに切れ目を入れて、例えば最左端の切片を集める。長さの度数分布は $(0, N)$ 区間をふやせばふやす程分布(2)に近づいてくる。われわれのモデルはdeterministicな力学系であるので、粒子数 N の系にchoppingによって切れ目を入れる場合、同じ条件では全く同じ場所で切れる。したがって多くの格子を切って分布を取るわけにはいかない。しかし格子が十分に長くまた切片の数が多ければ、一本の格子での長さの度数分布は分布(2)に近くなるであろう。理由としてどの切片の長さも共通分布(2)に従っているからである。粒子数が少なければそういったズレが大きくなってくる。

われわれはこのモデルに近い分布として離散的な分布を考えよう。 $N+1$ 個の粒子が等間隔に並んだ一次元格子がある。そこへ n 個の切れ目を入れる。ただし切れ目が一度入った場所へは二度以上は入らないとする。そして切れ目の入っていないどの粒子間も等確率で切れ目が入るとする。

その時、ある切れ目から次の切れ目までの距離 L の分布を考えよう。粒子間の異なった N 個の位置に n 個の切れ目を入れる事象は、 ${}_NC_n$ 通りある。その中である特定の切片に k 個以上の粒子を含んでいる事象は ${}_{N-k+1}C_n$ 通りある。ただし $N > N-k+1 \geq n$ である。したがって格子定数を1とすると L が k より大きい確率は

$$P_r \{ L \geq k \} = \frac{{}_{N-k+1}C_n}{{}_NC_n}$$

となり

$$P_r \{ L < k \} = 1 - \frac{{}_{N-k+1}C_n}{{}_NC_n} \quad \cdots (4)$$

となる。ここで ${}_NC_n$ は二項係数を表わす。

(2)の分布と(4)を比べると(4)の方が立ち上がりが大きい。粒子数が100個の場合(4)の分布を図1に付け加えておく。

粒子数が100個の時度数分布と分布(4)が一致するか χ^2 -検定で調べる。 $\chi^2=8.4$ となる。したがって2つの分布は一致する。粒子数の少ない時は不連続が連続かで結果が異なる。

次にノンパラメトリックな検定を考えよう。ここではコルモゴロフスミルノフ検定⁵⁾を使いたいのだが離散的な度数分布と連続な分布(2)を比べるので、次のように少し変えるか。格子の取り得る長さでの度数分布と連続な分布(2)のそれぞれの値の差を取る。そしてその差の最大値を D_f とする。ただし f は自由度。このような検定は第2種の誤差を大きくしているようである。図1参照。

(i) $N=200$ のとき $f=12$

$$D_{12} = \max_i \left| \frac{\sum_{j \leq i} L_j}{\sum_j N_j} - P_i \right| = 0.10$$

D_{12} の 0.05 棄却限界点は $D_{12}^{0.05} = 0.4$ 。したがって $D_{12} < D_{12}^{0.05}$ で 2 つの分布は一致しているといえる。

(ii) $N=150$ のとき $f=15$

$$D_{15} = 0.17 \quad D_{15}^{0.05} = 0.34$$

$D_{15} < D_{15}^{0.05}$ であるから一致している。

(iii) $N=100$ のとき $f=10$

$$D_{10} = 0.13 \quad D_{10}^{0.05} = 0.41$$

$D_{10} < D_{10}^{0.05}$ で一致している。

パラメトリックな検定とノンパラメトリックな検定では $N=100$ の結果が異なるが、ノンパラメトリックの方を修正したので第2種の誤差が大きくなったのであろう。

したがって以上の議論から粒子数が多い場合の切れ目の入り方は random であるといえる。粒子数が100個くらいでもほぼ random に切れているといえそうである。

われわれはソリトンによる1回目の反射で切れる切片を除いて調べたのだが、その理由は random 性を直接問題にしたいためである。一応粒子数が100個，150個，200個の三つの場合について，ソリトンによる一回目の反射で切れる切片を含めた度数分布を

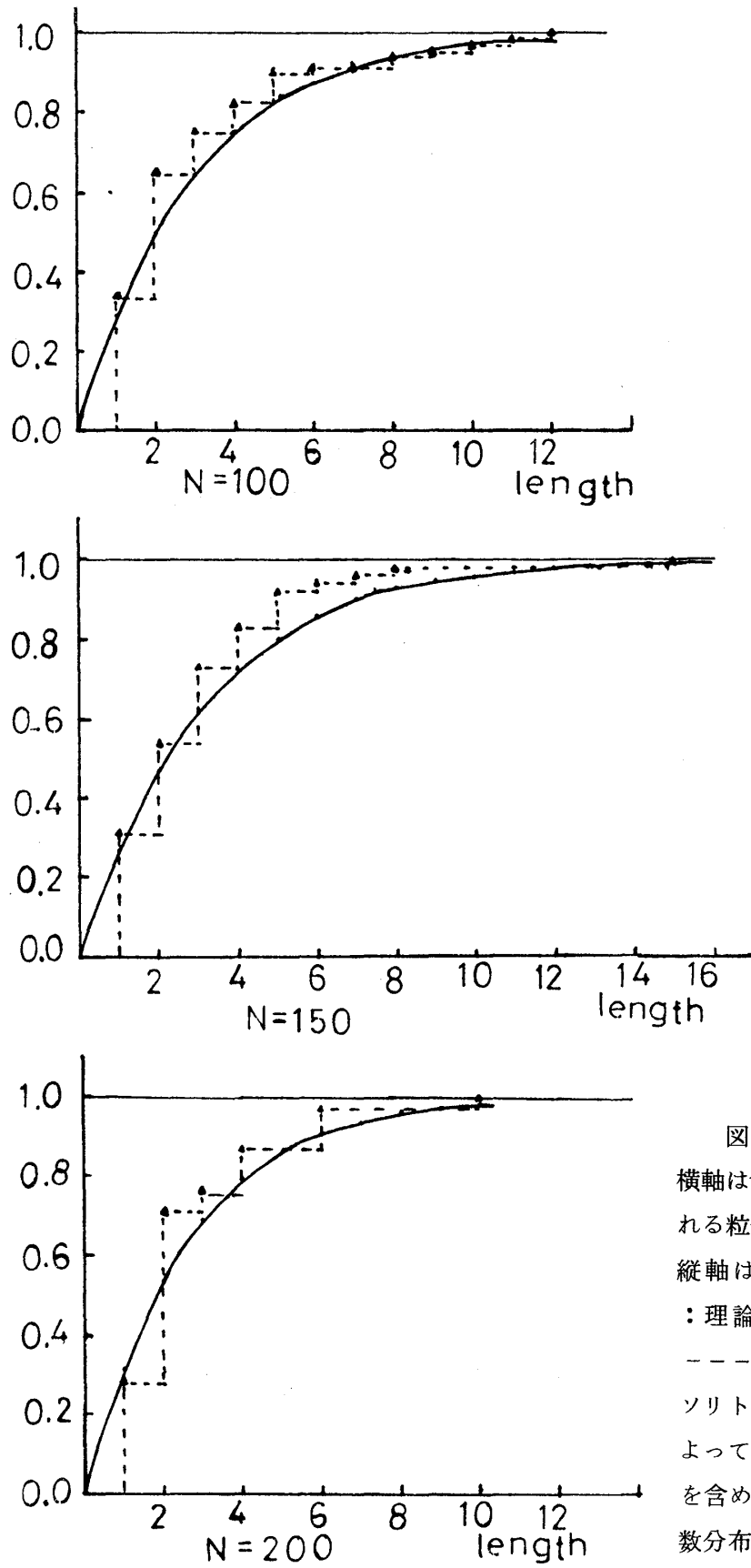


図 2
横軸は切片に含まれる粒子数(長さ)。
縦軸は確率。— : 理論分布(2),
--- : 一回目のソリトンの反射によって切れた切片を含めた場合の度数分布。

書く（図2）。粒子数100個の場合はこの切片を含めた度数分布の方が除いたのよりも理論分布（2）に近くなっている。図1も参照。しかし粒子数が多くなると除いた方が分布（2）に近づく。

物を引っぱって切った破片の長さの分布を調べた例として平田森三氏のスパゲティの実験⁵⁾がある。スパゲティを一様な曲率で曲げていくつかに折りその長さの度数分布を取った。たくさんのスパゲティで調べたら分布（2）の極限形の指数分布（3）になることを示した。われわれのように波によって切れる場合とは機構はだいぶ異なっているが、その切片の分布が同じであるというのはおもしろい。

また切片の長さの分布は十分大きい張力を加えるならば、少しくらい異なった張力でもあまり変化は生じない。したがってわれわれは、大きな張力によってたくさんの切片が得られるデータの一つを使った。

§3 遅れの時間

格子を引っぱり手をはなしたのち、chopping が起こるまでの遅れの時間がどのようになるか調べる。物体を破砕してみると非常に高速度なのがわかる。したがって超高速カメラでもその振舞はなかなかとらえられない。この chopping の数値実験は時間的变化を詳細に追えることができる。横軸を時間、縦軸は何番目に切れたかを示すグラフを書く（図3）。

この図では大きく二つに分けられる。前半はさらにソリトンを生じるのについやされる時間と、そのソリトンの反射によって規則正しく切れている時間に分けられる。後半もほぼ二つの部分に分けられるようである。後半部の始めの部分は切れる時刻が複雑になっている。残りの部分は遅れの時刻が非常に長くなっている部分である。

われわれは長さを調べたと同様、前半部分を除いて複雑な後半部分の分布を調べる。その分布が（3）の指数分布になっているかどうか調べる（図4）。今度は時間が連続と考えられるので§2のような検定に関する議論は不要である。検定はノンパラメトリックなコルモゴロフスミルノフ検定をする。粒子数 $N = 100$ のデータを書く（表2）。

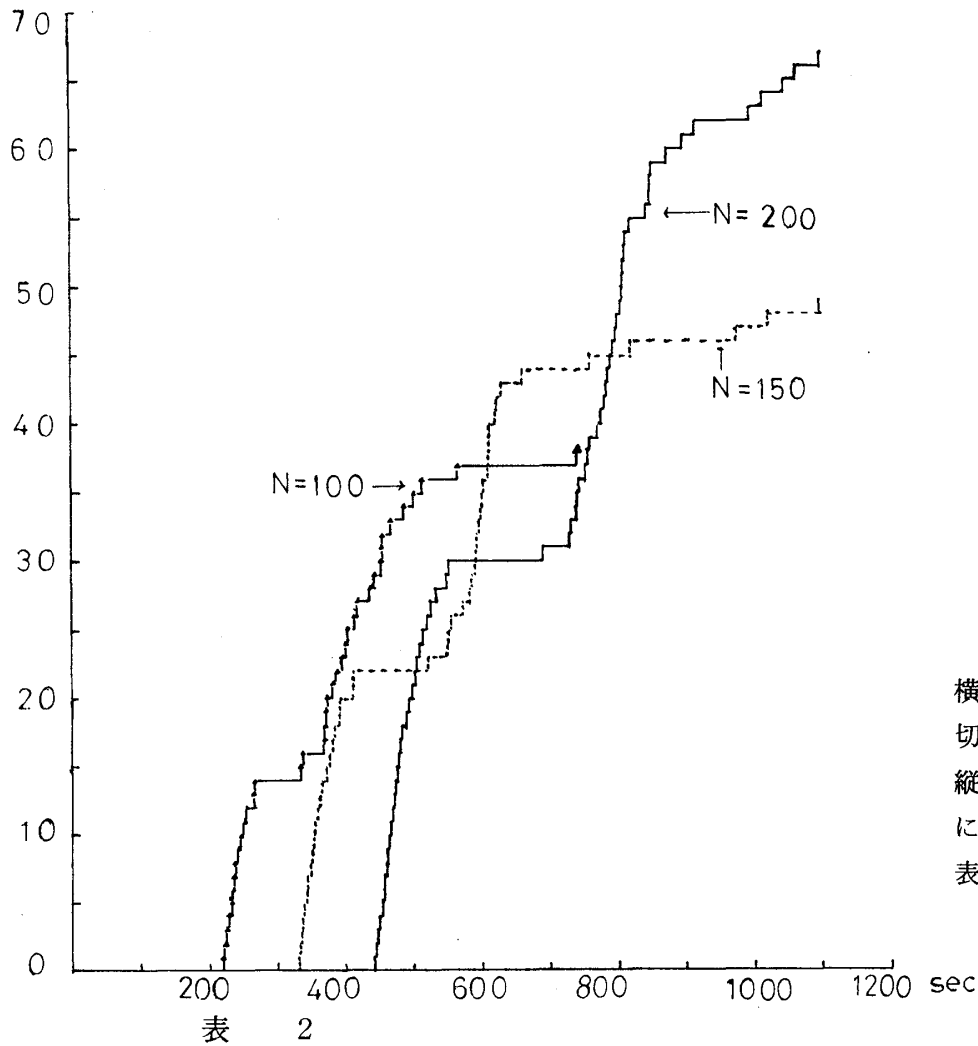


図 3

横軸は格子の
切れた時間。
縦軸は何番目
に切れたかを
表わす。

N = 100 $t_1 = 363.6$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t_i	2.0	6.8	6.8	7.6	8.2	17.0	28.2	35.4	38.3	41.7	51.9	57.0
S_i	0.04	0.09	0.13	0.17	0.22	0.26	0.30	0.35	0.39	0.43	0.48	0.52
F_i	0.02	0.08	0.08	0.09	0.09	0.19	0.29	0.34	0.37	0.40	0.47	0.50

i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
t_i	76.7	82.2	88.4	91.9	104.8	116.9	145.3	151.0	155.8	206.0	379.7
S_i	0.57	0.61	0.65	0.70	0.74	0.78	0.83	0.87	0.91	0.96	0.99
F_i	0.61	0.63	0.66	0.67	0.72	0.76	0.83	0.84	0.85	0.92	0.99

t_1 は最初ソリトンの反射による切断が終りそれから切れ始める時刻 (単位は秒)。

i は切れた番号。 t_i は t_1 から測って i 番目が切れるまでの時刻 (単位は秒)。

S_i は t_i までにどのくらい切れるかその割合。

F_i は指数分布(3)で $F_i = 1 - e^{-t_i/\alpha}$ (α は一回切れるのに要する平均時間)

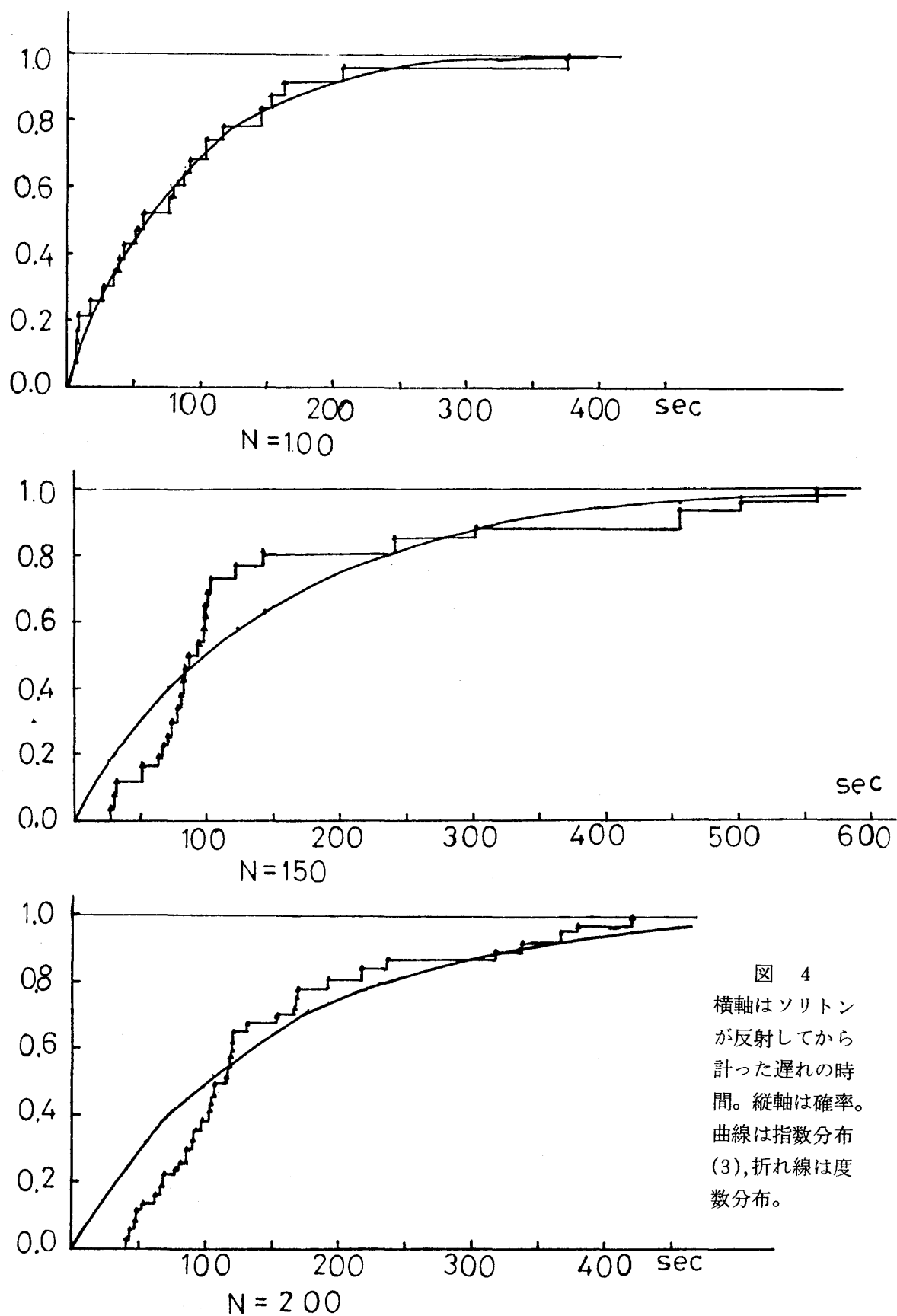


図 4
横軸はソリトン
が反射してから
計った遅れの時
間。縦軸は確率。
曲線は指数分布
(3), 折れ線は度
数分布。

全粒子数 $N = 100, 150, 200$ の 3 つの場合について α をそれぞれ求め、コルモゴロフスミルノフ検定しよう。

(i) $N = 100$ のとき $\alpha = 82.6$ (秒)

表 1 より

$$\max_i |S_i - F_i| = 0.13, \quad \max_i |S_{i-1} - F_i| = 0.9$$

したがって $D_{23} = 0.13$ 。また D_{23} の棄却限界点は $D_{23}^{0.05} \doteq 0.28$

$$\therefore D_{23} < D_{23}^{0.05}$$

S_i と F_i は一致している。

同様に $N = 150, 200$ も調べる。図 4 参照

(ii) $N = 150$ のとき $\alpha = 143.7$ (秒)

$$D_{26} = 0.21, \quad D_{26}^{0.05} = 0.27$$

$$\therefore D_{26} < D_{26}^{0.05}$$

S_i と F_i は一致する

(iii) $N = 200$ のとき $\alpha = 144.6$ (秒)

$$D_{37} = 0.24, \quad D_{37}^{0.05} = 0.23$$

$$\therefore D_{37} > D_{37}^{0.05}$$

S_i と F_i は一致しない。

これで分かるように今の所遅れの時間の分布は指数分布 (3) と一致しているかどうか一般に判断できない。格子の大きさによって違うように思える。確かに $N = 100, 150$ の場合は一致しているが他の $N = 200$ においてどうとも言えない。

われわれがなぜ遅れの時間分布と指数分布 (3) を比べたかを述べよう。物理的なアナロジーとして宇宙線を考える。宇宙線がどの時間にも同じ確率で入ってくるとすると、宇宙線が入った時間から次の入ってくるまでの時間間隔が指数分布である。言いかえると、どのくらいたったら次の宇宙線がはいるのかという確率は今まで生き残っている時間の逆数に比例しているということである。もちろんこの chopping は deterministic なものである。しかしいろいろな波が重なって切れるので、この切れる時刻も宇宙線が入ってくる時刻と同じような入り方をするのではないかと考えたからである。やはりスパゲティで平田森三氏は切れる時間の遅れの分布を取った。そのとき指数分布 (3) になる。

§4 待ちの時間

この節では切れた時刻から次の切れる時刻までの時間間隔，すなわち待ちの時間を調べた。前の節と同様に横軸を待ち時間，たて軸はそれが何番目に切れたかを示すグラフを書く（図5）。

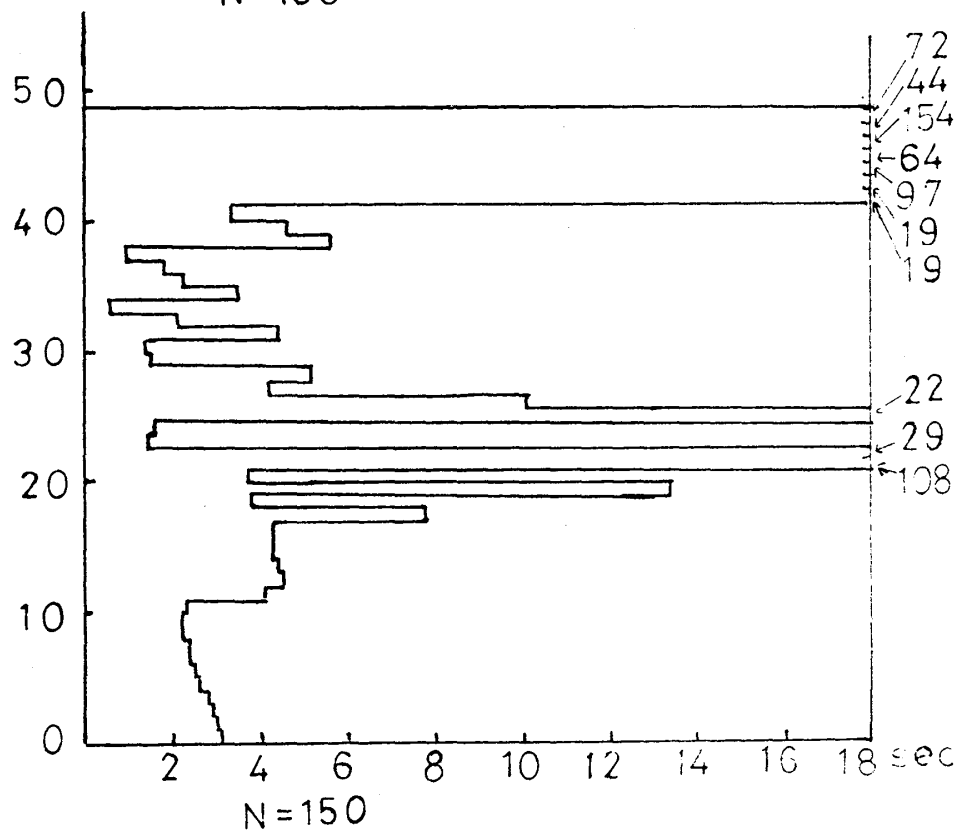
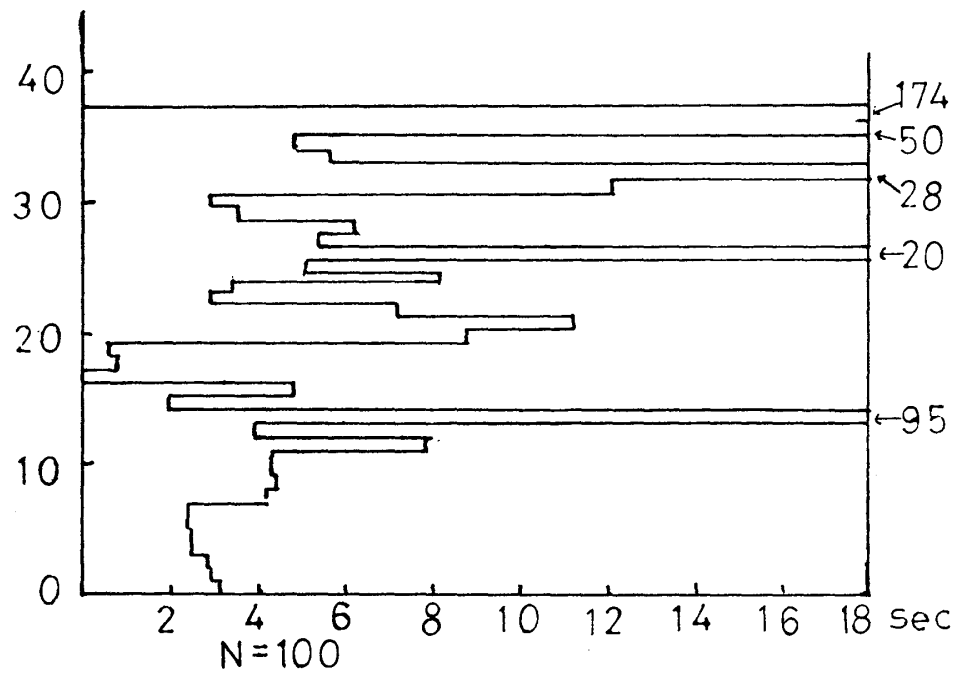


図5
その1

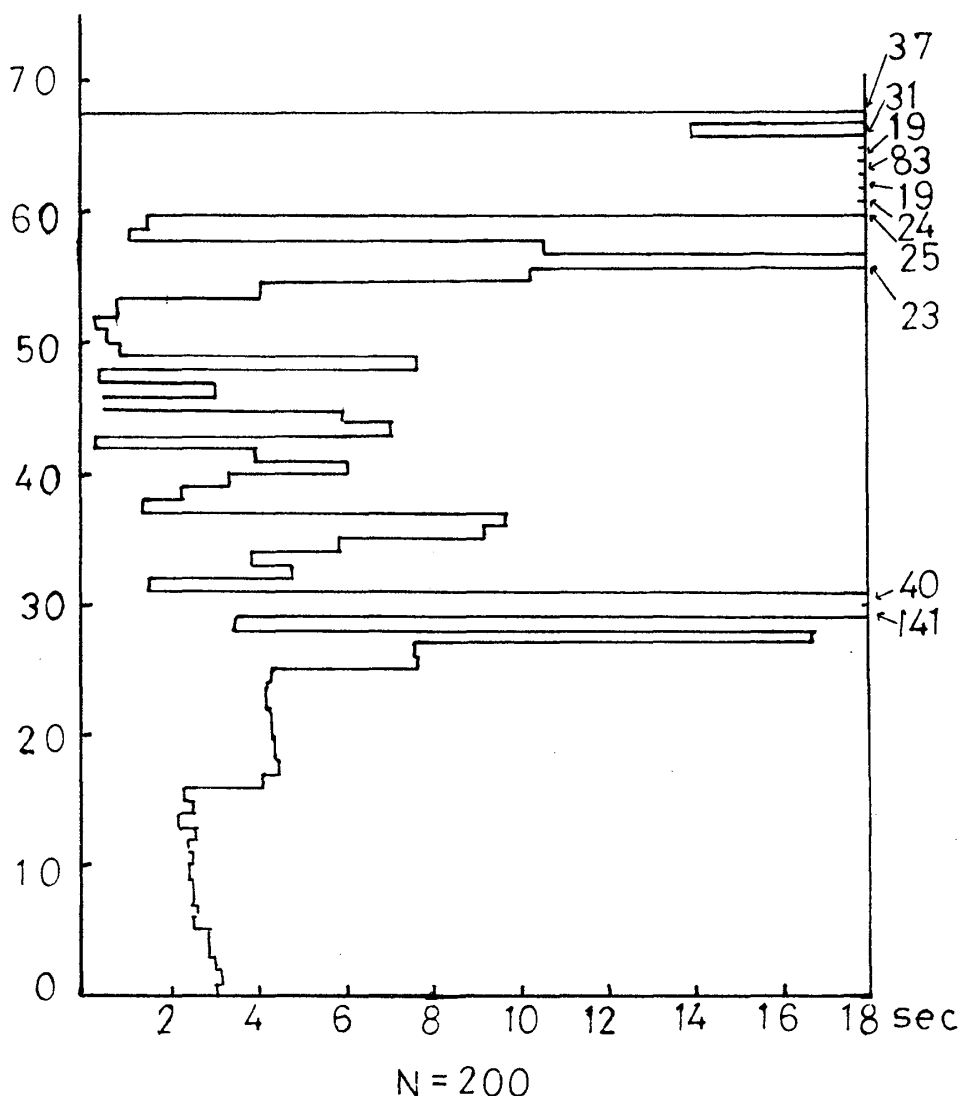


図 5 その2 横軸は待ち時間。縦軸は何番目に切れた切片かを表す。

待ち時間はさまざまな時間間隔をとりその差が大きすぎるので、18秒以上の待ち時間は数値のみ記す。前の節と同様図5からもソリトンの反射によってほぼ等間隔の時間に切れる部分と、さまざまな時間間隔で切れ、最後は非常に長い時間かかって切れている部分に分かれている。図5の中頃の複雑な待ち時間を有しているのは、choppingによって切れた切片の各々が切れるからであろう。最後の方で一回切れるのに非常に時間がかかるのは各切片にエネルギーが分配され一つの切片では小さくなるからであろう。大きな振巾になるまでに時間がかかるのである。

最後に§3と同様、最初のソリトンの反射によって切れる部分を除いた待ち時間の大き

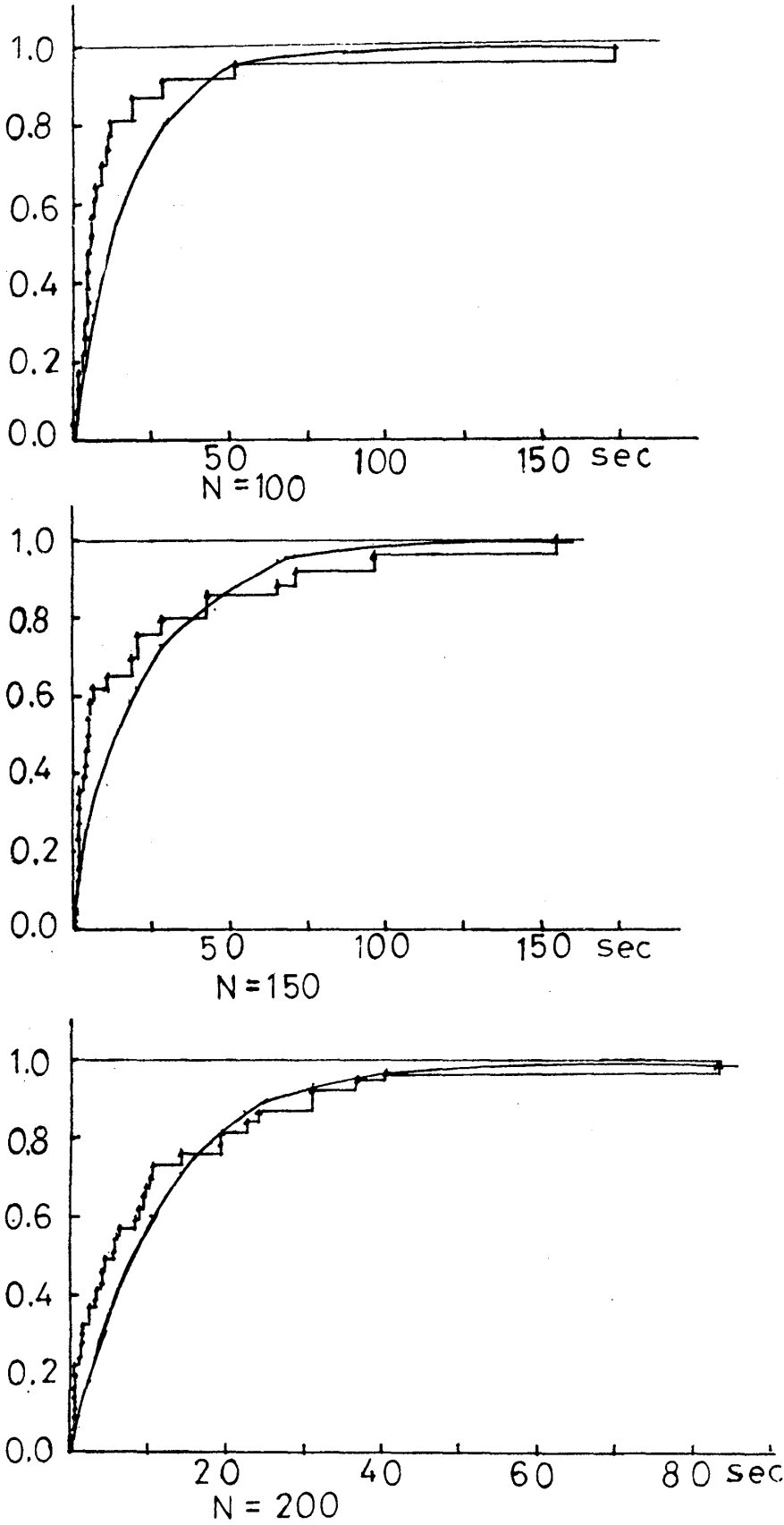


図 6
横軸は待ち時間。
縦軸は確率。曲
線は指数分布 (3)。
折れ線は度数分
布。

さについて度数分布をとる。粒子数が 100, 150, 200 個のグラフを書き (図 6) 指数分布 (3) と比べる。コルモゴロフスミルノフ検定を試みよう。

(i) $N = 200$ のとき $\alpha = 11.3$ (秒)

$$D_{37} = 0.20 \quad 0.05 \text{ の棄却限界値 } D_{37}^{0.05} = 0.22$$

$$\therefore D_{37} < D_{37}^{0.05}$$

度数分布と指数分布は一致する

(ii) $N = 150$ のとき $\alpha = 22.0$ (秒)

$$D_{26} = 0.40 \quad D_{26}^{0.05} = 0.24$$

$$\therefore D_{26} > D_{26}^{0.05}$$

一致しない。

(iii) $N = 100$ のとき $\alpha = 16.1$ (秒)

$$D_{23} = 0.30 \quad D_{23}^{0.05} = 0.25$$

$$\therefore D_{23} > D_{23}^{0.05}$$

一致しない。

待ち時間の度数分布と指数分布 (3) は粒子数によって一致したりしなかったりする。

§ 5 終りに

線形格子は一番端が一回切れるだけでこの戸田格子のようにつぎつぎとは切れない。

§ 2, § 3 で見たように戸田格子の chopping は破壊という自然現象の一面を表わしている。時間についての一般的な議論はまだこれからだと思われる。また図 3, 図 5 より初めは規則正しく切れているが突然複雑な切れ方をするということで, induction periode を拡張してこのような場合にも使えると思う。高次元では割れ目がどのように入るか, あるいは破片の分布がどうなるのか興味がある⁴⁾⁶⁾

京大工学部の薩摩氏および理学部生物物理寺本研の皆さんの助力に, 心から感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 戸田盛和, 振動論 (培風館), 5
- 2) S. Hyodo and M. Kimura, J. J. appl. Phys.

岩田和朗, 鯖田秀樹

12 (1973) 1711

3) M. Toda, R. Hirota, and J. Satsuma ; Chopping

Phenomenon of a Nonlinear System (preprint).

4) 平田森三, キリンのまだら (中央公論社)

5) ホーエル=ポート=ストーン 柳川 堯, 大和 元訳, 統計理論入門 (東京図書)

6) J. J. Gilvarry, J. appl. Phys. 32 (1961) 391

J. J. Gilvarry and B. H. Bergstrom, J. appl. Phys. 32 (1961) 400