

Oriented bordism and involutions

大阪大 理 小宮克弘

Topological pair (X, A) とその involution $\tau: (X, A) \rightarrow (X, A)$ を (X, A, τ) で表す。Stong [3] は, (X, A, τ) の unoriented equivariant bordism groups $\mathcal{N}_*(X, A, \tau)$ 及び $\hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau)$ を定義し, それらの性質を調べた。

本稿に於ては, 任意の involution (X, A, τ) に対し, その oriented equivariant bordism groups を定義し, これと Stong の unoriented equivariant bordism group との間に Wall type ([4]) 及び Dold type ([1]) の exact triangles が成立することを示す。又, 適当な equivariant Thom spectra に依って, oriented equivariant "cobordism" groups を定義し, これらと先の bordism groups との間に Poincaré type の dualities が存在することを示す。

以上が本稿の内容であるが, これらに関する詳細及びここで定義した oriented equivariant bordism groups に関するその他の性質に関しては, 尚も無く発表されるであろう ([2])

をご覧頂きたい。

§1. 定義

involution (X, A, τ) を一つ固定して考える。

(1) unoriented case

boundary をもつ compact differentiable manifold M と
その differentiable involution μ , 及び equivariant map
 $f: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$ (i.e., $\tau f = f\mu$) の triple (M, μ, f) を
考える。二つの triple が bordant: $(M, \mu, f) \sim (M', \mu', f')$
であるとは, 次の条件を満たす 4-tuple (W, V, ι, g) が存在
するときに云う:

W, V は boundary をもつ compact differentiable
manifolds で, $\partial V = \partial M \cup \partial M'$ (disjoint union)

$\partial W = M \cup V \cup M'$ (boundaries を貼合わせる)

$\iota: (W, V) \rightarrow (W, V)$ は differentiable involution で

$\iota|_M = \mu, \quad \iota|_{M'} = \mu'$

$g: (W, V) \rightarrow (X, A)$ は equivariant map で

$g|_M = f, \quad g|_{M'} = f'$

これは同値関係である。この同値関係に依る (M, μ, f) の
class を $[M, \mu, f]$ で表し, その class の集合を $\mathcal{Y}_*(X, A, \tau)$ で
表す。即ち, $\mathcal{Y}_*(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f)\} / \sim$ 。これは

graded γ -module になる。

上の定義に於て, involutions μ, μ', μ'' を凡て fixed-point free なものに限るとき, graded γ -module

$$\hat{\gamma}_*(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ は free}\} / \sim \text{ が定義される。}$$

尚, $A = \emptyset$ のとき, $\gamma_*(X, \tau)$, $\hat{\gamma}_*(X, \tau)$ と表す。

(2) oriented case

unoriented case の triple (M, μ, f) 及び 4-tuple (W, V, μ, g) で, 特に, M, W, V は oriented, μ, μ' は orientation-preserving (k.p., o-p と略す), 又は, orientation-reversing (o-r と略す) なものを考えるとき, 次の四つの graded Ω -modules が定義される:

$$\Omega_*^+(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ は o-p}\} / \sim$$

$$\hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ は o-p かつ free}\} / \sim$$

$$\Omega_*^-(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ は o-r}\} / \sim$$

$$\hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f) \mid \mu \text{ は o-r かつ free}\} / \sim .$$

§2. Poincaré dualities

$ESO(n) \rightarrow BSO(n)$ は n 次元 universal oriented vector bundle, $MSO(n)$ をこの Thom space とする。 $BSO(n)$ は無限次元ユークリッド空間 R^∞ の n 次元 oriented subspaces H の全体と考えてよい。こう考えるとき,

$ESO(n) = \{ (v, H) \mid v \in H, H \in BSO(n) \}$ である。このとき, $ESO(n)$ の bundle map と 17 の involutions z_n^+, z_n^- を, $z_n^+ = \text{identity}$, $z_n^-(v, H) = (v, -H)$, ここに, $-H$ は H の orientation を逆にした oriented subspace, と定義する。

補題1

$E \rightarrow B$ を n 次元 oriented vector bundle とし, α を E の bundle map と 17 の free involution とする。さらに α は α に依り cover される B の involution とするとき, B/α は paracompact かつ Hausdorff, 又は B は paracompact とする。このとき, α が "O-p ならば", equivariant bundle map $\varphi: (E, \alpha) \rightarrow (ESO(n), z_n^+)$ が存在する。又, α が "O-r ならば", $\varphi: (E, \alpha) \rightarrow (ESO(n), z_n^-)$ が存在する。さらに両方の場合とも, φ は equivariant bundle homotopy の意味で一意的である。

この補題依り, 次の equivariant maps が得られる:

$$h_n^+ : (\Sigma MSO(n), \Sigma z_n^+) \rightarrow (MSO(n+1), z_{n+1}^+)$$

$$h_n^- : (\Sigma MSO(n), \Sigma z_n^-) \rightarrow (MSO(n+1), z_{n+1}^-)$$

ここに, Σ は suspension を表す。これより, 次の equivariant spectra が定義される:

$$MSO^+ = \{ (MSO(n), \tau_n^+), h_n^+ \}$$

$$MSO^- = \{ (MSO(n), \tau_n^-), h_n^- \}$$

この spectra に依りて, 任意の involution (X, A, τ) に対し

次の oriented equivariant cobordism groups が定義される:

$$\Omega_+^n(X, A, \tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} [(\Sigma^k(X/A), \Sigma^k \tau), (MSO(n+k), \tau_{n+k}^+)]$$

$$\Omega_-^n(X, A, \tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} [(\Sigma^k(X/A), \Sigma^k \tau), (MSO(n+k), \tau_{n+k}^-)]$$

そして, 次の Poincaré dualities が得られる:

定理 1

(X, A, τ) を compact pair の involution とする。 $X-A$ は boundary のない n -次元 oriented manifold とし, $\tau|_{X-A}$ は fixed-point free な differentiable involution とする。

このとき, $\tau|_{X-A}$ が O-P ならば,

$$\Omega_+^k(X, A, \tau) \cong \Omega_{n-k}^+(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}_{n-k}^+(X-A, \tau))$$

$$\Omega_-^k(X, A, \tau) \cong \Omega_{n-k}^-(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}_{n-k}^-(X-A, \tau))$$

又, $\tau|_{X-A}$ が O-Y ならば,

$$\Omega_+^k(X, A, \tau) \cong \Omega_{n-k}^-(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}_{n-k}^-(X-A, \tau))$$

$$\Omega_-^k(X, A, \tau) \cong \Omega_{n-k}^+(X-A, \tau) \quad (\cong \hat{\Omega}_{n-k}^+(X-A, \tau))$$

§3. Exact triangles

n -次元 manifold M の Tangent bundle を TM で表し, その n -fold exterior power $\wedge^n(TM)$ を $\det TM$ で表す。そうする

と, これは M 上の line bundle である。 $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}P(r)$ を $\det T_M$ の classifying map とすると, 十分大きな r に対して $\alpha(M) \subset \mathbb{R}P(r)$ である。このとき, α は M の $\mathbb{R}P(r)$ -structure と呼ぶ。

involution (X, A, τ) を一つ固定しておいて, 4-tuple (M, μ, f, α) を考える: ここに, (M, μ, f) は §1 で考えた unoriented triple で μ は free, α は M の $\mathbb{R}P(1)$ -structure である。 α を cover する bundle map を $\bar{\alpha}$ で表す。

$\bar{\alpha} \circ \det d\mu = \bar{\alpha}$ とはる様な 4-tuple (M, μ, f, α) の作る bordism group を $\hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau)$ で表し, $\bar{\alpha} \circ (-\det d\mu) = \bar{\alpha}$ を満たす 4-tuple (M, μ, f, α) の作る bordism group を $\hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau)$ で表す。

$F: \hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\mathcal{Y}}_*(X, A, \tau)$ 及び
 $F: \hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\mathcal{Y}}_*(X, A, \tau)$ を $\mathbb{R}P(1)$ -structure を忘れる forgetful homomorphism とする。

任意の class $[M, \mu, f] \in \hat{\mathcal{Y}}_*(X, A, \tau)$ をとり, $\det T_M$ の classifying map $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}P(r)$ として, $\mathbb{R}P(r-2)$ 上 transverse regular なる $\alpha\mu = \alpha$ とはるものをとる。

$N = \alpha^{-1}(\mathbb{R}P(r-2))$ とし, $d[M, \mu, f] = [N, \mu|_N, f|_N]$ と定めることに依り, degree-2 の homomorphism

$d: \hat{\mathcal{Y}}_*(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\mathcal{Y}}_*(X, A, \tau)$ が得られる。

定理2

次の sequences は exact である:

$$0 \rightarrow \hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{F} \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{d} \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{F} \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{d} \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) \rightarrow 0$$

M を oriented manifold とすると, $\det T_M$ は trivial であり,
 M に Riemannian metric を与えておけば, それに対して
 canonically に trivialization $\det T_M \cong M \times \mathbb{R}^1$ が定まる。
 このとき,

補題2

M を oriented manifold, μ をその involution とするとき,
 μ が 0-p あるいは 0-r であるための必要十分条件は,
 それぞれ, $\det d\mu = \mu \times 1$ あるいは $\det d\mu = \mu \times (-1)$ と
 なることである。

(M, μ, f) を oriented triple とし, $c: M \rightarrow \mathbb{R}P(1)$ を point
 map とする。このとき補題2より, μ が 0-p ならば 4-tuple
 (M, μ, f, c) は $\hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau)$ の class を代表し, 又 μ が 0-r
 ならば $\hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau)$ の class を代表することになる。従
 て, 任意の class $[M, \mu, f] \in \hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau)$ 又は $\in \hat{\mathcal{M}}_*(X, A, \tau)$
 に対し, $p[M, \mu, f] = [M, \mu, f, c]$ と定めることに依り,

homomorphisms $p: \hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\mathcal{M}}_*^+(X, A, \tau)$ 及び
 $p: \hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\mathcal{M}}_*^-(X, A, \tau)$ が得られる。

unoriented triple (M, μ, f) に対し, $\det \tau_M$ の classifying map $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}P(Y)$ として, $\mathbb{R}P(Y-1) \perp$ Transverse regular であり, α を cover する bundle map $\bar{\alpha}$ とするとき, $\bar{\alpha} \circ \det d\mu = \bar{\alpha}$ とはするものとして, $N = \alpha^{-1}(\mathbb{R}P(Y-1))$ とする。このとき, triple $(N, \mu|_N, f|_N)$ は $\hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau)$ の class を代表すること補題2よりわかる。又, α として $\bar{\alpha} \circ (-\det d\mu) = \bar{\alpha}$ をみたすものをとると, $(N, \mu|_N, f|_N)$ は $\hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau)$ の class を代表することがわかる。このことより, degree -1 の homomorphisms

$\alpha: \hat{\mathcal{M}}_*^+(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau)$ 及び

$\alpha: \hat{\mathcal{M}}_*^-(X, A, \tau) \rightarrow \hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau)$ が定義される。

定理3

次の Triangles は exact である:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau) & \xrightarrow{2} & \hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau), \hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau) \xrightarrow{2} \hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau) \\ \uparrow \partial F & \searrow p & \uparrow \partial F \quad \searrow p \\ & \hat{\mathcal{M}}_*^+(X, A, \tau) & \hat{\mathcal{M}}_*^-(X, A, \tau) \end{array}$$

ここに, 2 は各 class を 2 倍する homomorphism。

この exact triangles と 定理2 の exact sequences より,

次の exact triangles が得られる:

定理4

次の triangles は exact である:

$$\hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau) \oplus \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{(2, 0)} \hat{\Omega}_*^+(X, A, \tau)$$

$$\begin{array}{ccc} & \nwarrow (2, d) & \searrow F \\ & \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) & \end{array}$$

$$\hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau) \oplus \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) \xrightarrow{(2, 0)} \hat{\Omega}_*^-(X, A, \tau)$$

$$\begin{array}{ccc} & \nwarrow (2, d) & \searrow F \\ & \hat{\mathcal{N}}_*(X, A, \tau) & \end{array}$$

ここに, F は orientedness を忘れる forgetful homomorphism.

文献

- [1] A. Dold; Structure de l'anneau de cobordisme Ω , Bourbaki seminar notes, Paris, 1959-60.
- [2] K. Komiya; Oriented bordism and involutions, to appear in Osaka J. of Math..
- [3] R. E. Stong; Bordism and involutions, Ann. of Math. 90 (1969) 47-74.

- [4] C.T.C. Wall; Determination of the cobordism ring, Ann. of Math. 72 (1960) 292-311.