

量子系におけるダイナミック安定化

愛媛大学理学部 飯塚剛

Takeshi Iizuka

Faculty of Science, Ehime University

1 序文

ダイナミック安定化は、その代表例である逆さ振り子(カピッツアの振り子)[1]をはじめ、様々な力学系で見受けられる普遍的な現象である。一方、量子系についてもカピッツアの振り子[2]はもちろん、レーザー照射された強磁性体[3]、多体スピン系[4]、光学系[5]といった多くの系で見出されている。一方で、量子ダイナミック安定化の基礎的な研究はこれまでにいくつか散見されるが[6,7]、そこではユニタリーゲージ変換を演算子形式で議論している。これは難解なものであり、古典系のようなシンプルな理論がこれまでなかった。本研究の目的は第1に量子系のダイナミック安定化において、古典系と同様な摂動論[8]を見い出すことである。次に、数値計算によって理論の正当性を検証することである。

ここでは1次元1粒子の量子系を考えるが、対応を明らかにするために次節では古典系を取り上げる。続く第3節において、量子系におけるダイナミック安定化のシンプルな摂動論を提唱する。数値計算による検証は第4節で行う。

2 古典系

まずは参考のため、ダイナミック安定化の古典論を振り返る。時間を t 、質点の位置、質量、運動量をそれぞれ x 、 m 、 p 、 ϵ を定数として次のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0(x) + \frac{1}{\epsilon} V_1\left(x, \frac{t}{\epsilon}\right), \quad \epsilon \ll 1 \quad (2.1)$$

を考える。 $\epsilon^{-1}V_1$ が高速振動に相当する。よって V_1 の時間的周期性を仮定する。さらに V_1 の平均値が0であるものとする。従って周期を ϵT とし、高速時間を $\tau = \epsilon^{-1}t$ で定義すると以下が成立する。

$$V_1(x, \tau + T) = V_1(x, \tau), \quad \langle V_1 \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T V_1(x, \tau') d\tau' = 0. \quad (2.2)$$

$\langle \cdot \rangle$ は1周期分の平均をとることである。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(V_0(x) + \frac{1}{\epsilon} V_1\left(x, \frac{t}{\epsilon}\right) \right), \quad (2.3)$$

で与えられる。 ϵ をパラメーターとして摂動論を導入する。まず $x(t)$ を

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t, \tau) + \epsilon^2 x_2(t, \tau) + \cdots, \quad (2.4)$$

$$\langle x_1 \rangle = 0, \quad \langle x_2 \rangle = 0, \cdots \quad (2.5)$$

のように展開する。 τ を含まない x_0 は運動の「ゆっくりと」変動する成分を表しており、**DC** 成分とも呼ばれる。一方第2項以降は、運動の高速振動が含まれ、平均が0となる成分で、**AC** 成分とも呼ばれる。(2.4) を (2.3) に代入して ϵ の各オーダーを比較する。以下の等式

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \epsilon^{-2} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau^2} + 2\epsilon^{-1} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}, \quad (i = 1, 2, \cdots), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial V_0(x)}{\partial x} = \frac{\partial V_0(x_0 + \epsilon x_1 + \cdots)}{\partial x} = \frac{\partial V_0(x_0)}{\partial x} + O(\epsilon) = \frac{\partial V_0(x_0)}{\partial x_0} + O(\epsilon), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V_1(x, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial V_1(x_0, \tau)}{\partial x} + \epsilon x_1 \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau)}{\partial x^2} + O(\epsilon^2) = \frac{\partial V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0} + \epsilon x_1 \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0^2} + O(\epsilon^2),$$

に注意すると $O(\epsilon^{-1})$ からは

$$m \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} = - \frac{\partial V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0}, \quad \therefore \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = - \frac{1}{m} \int^\tau \frac{\partial V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0} d\tau', \quad (2.8)$$

を得る。最後の積分は平均が0になるように積分定数が選ばれるものとする。同様の仮定を本稿では一貫して行う。(2.8) は x_0 と x_1 の関係を与える。次に $O(\epsilon^0)$ では

$$m \left(\frac{d^2 x_0}{dt^2} + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2} \right) = - \frac{\partial V_0(x_0)}{\partial x_0} - x_1 \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0^2}, \quad (2.9)$$

を得る。上式の平均をとろう。 x_1, x_2 が AC 成分であることに注意すると、左辺括弧内の第2、3項は消える。 τ に依存しない同第1項と右辺第1項は不変である。よって、

$$m \frac{d^2 x_0}{dt^2} = - \frac{\partial V_0(x_0)}{\partial x_0} - \left\langle x_1 \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0^2} \right\rangle, \quad (2.10)$$

を得る。平均操作の定義と部分積分の公式より

$$\begin{aligned} \left\langle x_1 \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0^2} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t, \tau) \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0^2} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \left[x_1(t, \tau) \int_0^\tau \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0^2} d\tau' \right]_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial x_1(t, \tau)}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0^2} d\tau' \right) d\tau \\ &= \left\langle \frac{1}{m} \int_0^\tau \frac{\partial V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0} d\tau' \int_0^\tau \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0^2} d\tau' \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_0} \left\langle \frac{1}{2m} \left(\int_0^\tau \frac{\partial V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0} d\tau' \right)^2 \right\rangle, \end{aligned}$$

が導出される。ただし3番目の等式では x_1, V_1 の τ についての周期性および、(2.8) 第2式を用いた。これより (2.10) は

$$m \frac{d^2 x_0}{dt^2} = - \frac{\partial}{\partial x_0} \left(V_0(x_0) + \left\langle \frac{1}{2m} \left(\int_0^\tau \frac{\partial V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0} d\tau' \right)^2 \right\rangle \right), \quad (2.11)$$

となる。右辺括弧内は有効ポテンシャルと呼ばれる。ダイナミック安定化はこの有効ポテンシャルの第2項によってもたらされる。有効方程式 (2.11) は (2.9) の DC 成分である。AC 成分はそのまま引き算をすればよいので

$$m \left(2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \tau^2} \right) = -x_1 \frac{\partial^2 V_1(x_0, \tau)}{\partial x_0^2} + \frac{\partial}{\partial x_0} \left\langle \frac{1}{2m} \left(\int^\tau \frac{\partial V_1(x_0, \tau')}{\partial x_0} d\tau' \right)^2 \right\rangle, \quad (2.12)$$

となる。これより x_2 を求めることが出来る。

3 量子系

次に量子系を考える。波動関数を $\Psi(x, t)$ 、プランク定数を $\hbar$ 、虚数単位を i として、高速振動 (2.2) を含むハミルトニアン (2.1) を採用する。シュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) + \frac{1}{\epsilon} V_1 \left(x, \frac{t}{\epsilon} \right) \right) \Psi(x, t), \quad (3.1)$$

で与えられる。古典系同様高速時間 $\tau = \epsilon^{-1}t$ を定義して、次のような摂動展開を導入する。

$$\Psi = \Psi_0(x, t, \tau) + \epsilon \Psi_1(x, t, \tau) + \epsilon^2 \Psi_2(x, t, \tau) + \dots, \quad (3.2)$$

ここで第1項 Ψ_0 は高速時間 τ に依存することに注意しよう。これを (3.1) へ代入し摂動論を適用する。 $O(\epsilon^{-1})$ からは

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial \tau} = V_1(x, \tau) \Psi_0, \quad \therefore \Psi_0 = \phi_0(x, t) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^\tau V_1(x, \tau') d\tau' \right), \quad (3.3)$$

を得る。「積分定数」 $\phi_0(x, t)$ は τ を含まないので、波動関数の DC 成分とみることが出来る。 $O(\epsilon^0)$ からは

$$i\hbar \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} \right) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) \right) \Psi_0 + V_1(x, \tau) \Psi_1, \quad (3.4)$$

がわかる。ここで (3.3) の第2式を参考に

$$\Psi_1 = \phi_1(x, t, \tau) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^\tau V_1(x, \tau') d\tau' \right), \quad \langle \phi_1 \rangle = 0, \quad (3.5)$$

と仮定する。平均操作 $\langle \phi_1 \rangle$ は古典系と同様である。(3.3)、(3.4)、(3.5) より $V_1 \Psi_1$ が消去され

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^\tau V_1(x, \tau') d\tau' \right) \\ = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) \right) \phi_0 \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^\tau V_1(x, \tau') d\tau' \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) \right) \phi_0 - \frac{\hbar^2}{2m} 2 \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m} \phi_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^\tau V_1(x, \tau') d\tau' \right) \\
&= \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) \right) \phi_0 + \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \int^\tau \frac{\partial V_1(x, \tau')}{\partial x} d\tau' + \frac{\phi_0}{2m} \left(\int^\tau \frac{\partial V_1(x, \tau')}{\partial x} d\tau' \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\hbar \phi_0}{2m} \int^\tau \frac{\partial^2 V_1(x, \tau')}{\partial x^2} d\tau' \right\} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^\tau V_1(x, \tau') d\tau' \right), \\
&\therefore i\hbar \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} \right) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) \right) \phi_0 + \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \int^\tau \frac{\partial V_1(x, \tau')}{\partial x} d\tau' \\
&\quad + \frac{\phi_0}{2m} \left(\int^\tau \frac{\partial V_1(x, \tau')}{\partial x} d\tau' \right)^2 + \frac{i\hbar \phi_0}{2m} \int^\tau \frac{\partial^2 V_1(x, \tau')}{\partial x^2} d\tau', \quad (3.6)
\end{aligned}$$

を得る。ここで ϕ_1 , V_1 の平均が 0 であることを考慮すると、上式への平均操作より

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) + \left\langle \frac{1}{2m} \left(\int^\tau \frac{\partial V_1(x, \tau')}{\partial x} d\tau' \right)^2 \right\rangle \right) \phi_0, \quad (3.7)$$

を得る。右辺の ϕ_0 の係数である括弧内が有効ハミルトニアンであり、その第 2、3 項の和は有効ポテンシャルである。これは古典系の結果 (2.11) と同じである。(3.7) は (3.4) の DC 成分を示している。一方、AC 成分は古典系同様引き算により

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} &= \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \int^\tau \frac{\partial V_1}{\partial x} d\tau' + \frac{i\hbar \phi_0}{2m} \int^\tau \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} d\tau' \\
&\quad + \frac{\phi_0}{2m} \left\{ \left(\int^\tau \frac{\partial V_1}{\partial x} d\tau' \right)^2 - \left\langle \left(\int^\tau \frac{\partial V_1(x, \tau')}{\partial x} d\tau' \right)^2 \right\rangle \right\}, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

となる。これより ϕ_0 がわかれば ϕ_1 も (τ 積分で) わかる。

次に特別な場合として、高速振動ポテンシャル V_1 が時間、空間で分離してなおかつ振動が単振動である場合を考える。つまり、

$$V_1(x, \tau) = U(x) \sin \omega \tau, \quad (\omega = \frac{2\pi}{T}) \quad (3.9)$$

とする。この場合 $U(x)$ の微分を $U'(x)$ とすると

$$\int^\tau \frac{\partial V_1}{\partial x} d\tau' = U'(x) \int^\tau \sin \omega \tau' d\tau' = -U'(x) \frac{\cos \omega \tau}{\omega}, \quad \therefore \left(\int^\tau \frac{\partial V_1}{\partial x} d\tau' \right)^2 = (U'(x))^2 \frac{1 + \cos 2\omega \tau}{2\omega^2},$$

となるので DC 成分である (3.7) は

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) + \frac{(U'(x))^2}{4m\omega^2} \right\} \phi_0, \quad (3.10)$$

となり。AC 成分は (3.8) より

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} &= \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} (-U'(x) \frac{\cos \omega \tau}{\omega}) + \frac{i\hbar}{2m} \phi_0 (-U''(x) \frac{\cos \omega \tau}{\omega}) + \frac{\phi_0}{2m} \frac{(U'(x))^2}{2\omega^2} \cos 2\omega \tau, \\
\therefore \phi_1 &= -\frac{1}{m\omega^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} U'(x) \sin \omega \tau - \frac{\phi_0}{2m\omega^2} U''(x) \sin \omega \tau - \frac{i\phi_0}{8\hbar m\omega^3} (U'(x))^2 \sin 2\omega \tau, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

となり、 ϕ_1 が ϕ_0 から直接求まる式となった。

4 数値シミュレーション

有効シュレディンガー方程式の有効性を数値計算で確認しよう。そのためさらに単純化して

$$V_0(x) = 0, \quad U(x) = \frac{1}{2}ax^2, \quad (a > 0) \quad (4.1)$$

とする。 V_0 はこれまでの解析において本質的な役割を果たしていないのでここでは取り去ることとした。まず、元のシュレディンガー方程式は (3.1) より、

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{ax^2}{2} \sin \frac{\omega t}{\epsilon} \right) \Psi(x, t), \quad (4.2)$$

である。一方、(3.3) の第 2 式は

$$\Psi_0 = \phi_0(x, t) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int^\tau \frac{ax^2}{2} \sin \omega \tau' d\tau' \right) = \phi_0(x, t) \exp \left(i \frac{ax^2}{2\hbar\omega} \cos \omega \tau \right), \quad (4.3)$$

である。また、有効ポテンシャルは $\frac{(U'(x))^2}{4m\omega^2} = \frac{a^2}{4m\omega^2}x^2$ と調和振動子型になる。よって有効シュレディンガー方程式 (3.10) は

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a^2}{4m\omega^2}x^2 \right\} \phi_0, \quad (4.4)$$

となる。さらに Ψ_1 については (3.11) より

$$\Psi_1 = \left(-\frac{ax}{m\omega^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \sin \omega \tau - \frac{a\phi_0}{2m\omega^2} \sin \omega \tau - \frac{ia^2x^2\phi_0}{8\hbar m\omega^3} \sin 2\omega \tau \right) \exp \left(i \frac{ax^2}{2\hbar\omega} \cos \omega \tau \right), \quad (4.5)$$

となる。

基底状態

(4.4) の定常状態を仮定して $\phi_0 = u(x)e^{-iEt/\hbar}$ とすると (E はエネルギー)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{a^2}{4m\omega^2}x^2 \right) u(x) = Eu(x), \quad (4.6)$$

を得る。 $u(x)$ はエルミート多項式を用いて求めることが出来るが、ここでは基底状態を考えることとする。基底状態はガウシアンで与えられ、 $u(x) = Ae^{-\alpha x^2}$ として、定数 $\alpha (> 0)$ と E を求めよう。 A は規格化によって決まる定数である。 $u''(x) = \{-2\alpha + (-2\alpha x)^2\} Ae^{-\alpha x^2}$ より (4.6) は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-2\alpha + 4\alpha^2x^2) + \frac{a^2x^2}{4m\omega^2} = E, \quad (4.7)$$

となる。これは x の恒等式なので x^2 の係数比較により $\alpha^2 = \frac{a^2}{8\hbar^2\omega^2}$ 、定数項より $E = \frac{\hbar^2\alpha}{m}$ なので、

$$\alpha = \frac{a}{2\sqrt{2}\hbar\omega}, \quad E = \frac{\hbar a}{2\sqrt{2}m\omega}, \quad (4.8)$$

を得る。以上より波動関数の DC 成分 $\phi_0 = Ae^{-\alpha x^2 - iEt/\hbar}$ が求まった。

次にこの基底状態を基にして、(4.2) の数値シミュレーションを行おう。初期条件は $O(\epsilon)$ まで考慮に入れて $t = 0, \tau = 0$ とすると、(3.2)、(4.3)、(4.5) を参考に

$$\Psi(x, 0) \simeq \Psi_0(x, 0, 0) + \epsilon \Psi_1(x, 0, 0) = Ae^{-\alpha x^2} \exp\left(i \frac{ax^2}{2\hbar\omega}\right), \quad (4.9)$$

とする。 $\tau = 0$ で $\phi_1 = 0$ となることに注意しよう。具体的な数値として $m = \omega = \hbar = a = 1$ とし微小量 ϵ は $\epsilon = 0.1$ とした。このとき $\alpha = 1/(2\sqrt{2})$ である。エネルギー E の値は初期条件には必要ない。 A は規格化条件から決められるが、ここでは規格化を考慮せず $A = 1$ としてシミュレーションを行った。

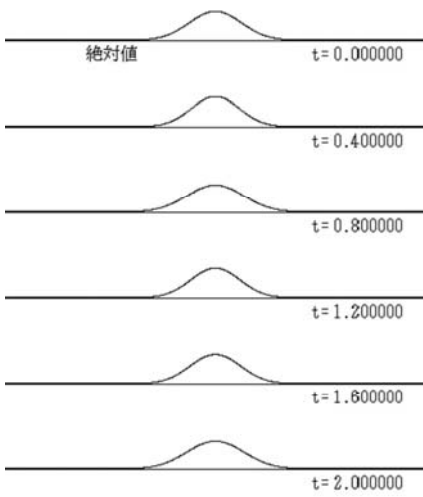


図1 加振がある場合

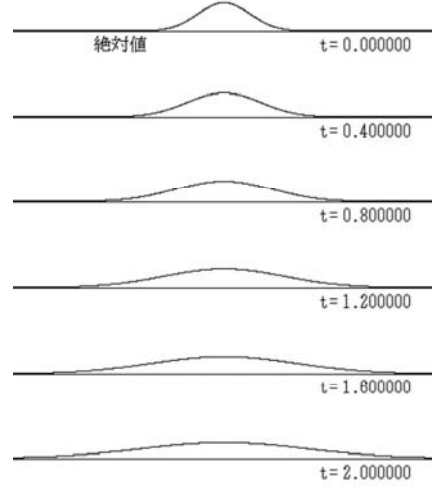


図2 加振がない場合 ($a = 0$)

シュレディンガー方程式に対してはクランクニコルソン法を採用して、周期境界条件を課した。 $|\Psi|$ に対する結果が上の図1である。予想通り定常状態を保持している。比較として(4.2)で $a = 0$ の場合、つまり高速加振力がない場合の数値計算も行った。結果は上の図2である。これは明らかに自由空間の波動関数なので、分散が起こる。つまり波束は安定化しない。この意味で高速加振力は波束の安定化を実現していることがわかる。

振動状態

次に初期条件として(4.9)の代わりに、

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-\alpha(x-3)^2} \exp\left(i \frac{ax^2}{2\hbar\omega}\right), \quad (4.10)$$

を採用してみよう。これはいわば「ばねを(長さ3で)伸ばした」状態からの時間発展となる。このときは次頁の図3のようになる。波束は明らかに振動をしており、これは有効調和振動子(4.4)が予測する通りの結果である。この調和振動子の角振動数を Ω とすると $\frac{a^2}{4m\omega^2}x^2 = \frac{m\Omega^2 x^2}{2}$, $\therefore \Omega = \frac{a}{\sqrt{2}m\omega}$ が成立するので、「有効調和振動」の周期は

$\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\sqrt{2}m\omega}{a} = 8.885760\cdots$ となる。一方量子力学における、エーレンフェストの定理によると、

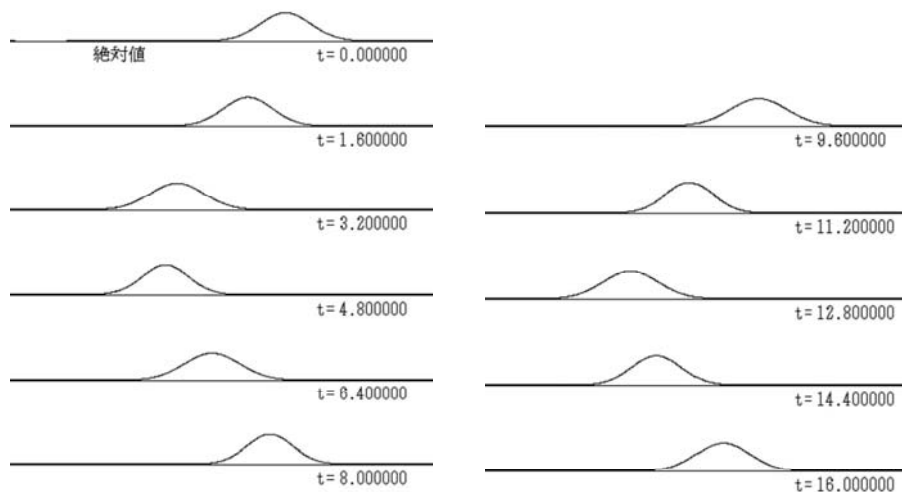


図3 波束の振動

波動関数の中心 (位置の期待値) は古典的な運動を行う。つまりこの「中心 $\langle x \rangle$ 」は周期 $8.885760\cdots$ で振動するはずである。 $\langle x \rangle$ を計算したのが図4である。

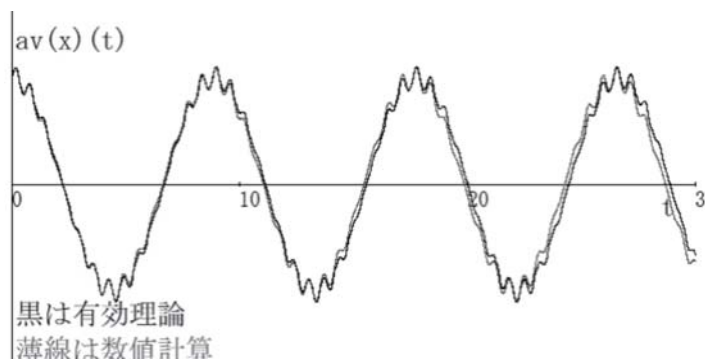


図4 $\langle x \rangle(t)$

横軸は時間 t で縦軸は $\langle x \rangle$ である。わかりにくいを実線が有効シュレディンガー方程式から計算したもので、薄い線が元の加振動シュレディンガー方程式によるものである。両者は1周期程度では、非常に良い一致をしているが、長時間によるずれも見受けられる。薄い線の方の振動周期は8.821であった。先程の値 $8.885760\cdots$ とは誤差が0.7%である。これは $\epsilon = 0.1$ の摂動論としては良い結果といえよう。

5 結論と考察

本稿では量子系におけるダイナミック安定化において、摂動展開 (3.2) を提唱した。従来の演算子形式による解析 [6,7] に比べて、シンプルな摂動論であると考えられる。結

果として古典論と同様の有効ポテンシャル (3.7) を得ることが出来た。理論を検証するために、有効ポテンシャルが調和振動子となるようなトイモデル (4.2) を取り上げて数値シミュレーションを行った。定常状態 (基底状態) については予想通り波束の安定化が観測された。振動状態についても予想通り見出すことが出来たが、周期に対する定量的な一致も見ることが出来た。これらは、量子ダイナミック安定化理論の正当性をサポートする結果と考えられる。

今回は簡単なトイモデルを扱ったが将来的には、カピッツア振り子の振り子や2, 3次元系などより現実的なモデルによる検証が課題となる。

参考文献

- [1] P. L. Kapitza, 'Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension,' Journal of Experimental and Theoretical Physics, vol. 21, pp. 588-597, (1951).
- [2] Wei He, Chang-Yong Liu, 'Oscillatory states of quantum Kapitza pendulum' arXiv:2208.02488v3 (2023).
- [3] Dushko Kuzmanovski et al., 'Kapitza Stabilization of Quantum Critical Order' Pys.Rev.X 14, 021016 (2024).
- [4] T.M. Hoang et al., 'Dynamic stabilization of a quantum many-body spin system' arXiv:1209.4363v2 (2013).
- [5] H. Seok, E. M. Wright, and P. Meystre, 'Dynamic stabilization of an optomechanical oscillator', Phys.Rev. A90, 043840 (2014).
- [6] T. P. Grozdanov and M. J. Rakovic, 'Quantum system driven by rapidly varying periodic perturbation', Phys. Rev. A 38, 1739 (1988).
- [7] S.Rahav, I. Gilary, and S.Fishman "Effective Hamiltonians for periodically driven systems" Phys.Rev.A 68,013820 (2003).
- [8] T.I 「量子ダイナミック安定化に対するシンプルな摂動論」日本物理学会春季大会 19aL2-5 (2025).

謝辞

本研究は京都大学における国際共同利用・共同研究拠点としての、数理解析研究所の援助を受けております。ここで関係者の皆様に感謝申し上げます。