

Sharp characters with only one rational values

東京医科歯科大教養 清田正夫 (Masao Kiyota)

千葉大教養 野澤宗平 (Sôhei Nozawa)

本講演は昨年 6 月に岐阜大で開かれた代数的組み合わせ論研究集会における (Alvis-Kiyota-Nozawa の共同研究に関する) 清田による講演の続編で, 単位元以外に rational value をもたない sharp pairs に関する次の予想が肯定的に解決されたことの報告である.

予想.

(G, χ) を (任意の rank の) normalized L -sharp とする. このとき, $L \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ ならば G は奇数位数の巡回群で, χ は 1 次指標, または 2 つの複素共役な 1 次指標の和である.

以下, G を有限群, χ を G の指標とし, $n = \chi(1)$ を χ の次数とする.

また, 任意の有限集合 $L \subset \mathbb{C}$ に対して, L の元を根にもつ最小次数のモニック多項式を $f_L(x)$ で表す. すなわち

$$f_L(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\alpha \in L} (x - \alpha).$$

定義.

$L = \{\chi(g) \mid g \in G \setminus \{1\}\}$ のとき, (G, χ) は *type* L という.

定理([B]).

(G, χ) が *type* L ならば $f_L(n) \in \mathbb{Z}$ で, $|G|$ は $f_L(n)$ を割る.

定義.

(G, χ) が type L で, $|G| = f_L(n)$ が成り立つとき, (G, χ) を L -sharp という.

(G, χ) が L -sharp ならば, 定義より明らかなように χ は忠実な指標である.

先ず, sharp pairs の代表的な例から紹介しよう. 例 1 は L が有理整数だけからなる場合であり, 例 2, 例 3, 例 4 は L が無理数を含む場合の例である.

例 1.

(G, Ω) を sharply t -transitive 置換群, π をその置換指標とする. このとき, (G, π) は $\{0, 1, \dots, t-1\}$ -sharp となる.

特に, 任意の有限群 G に対して, (G, ρ_G) は $\{0\}$ -sharp である. ここで ρ_G は G の正則指標を表す.

例 2.

G を巡回群, λ を G の忠実な 1 次指標とすると

- (1) (G, λ) は sharp pair で,
- (2) $|G|$ が奇数ならば, $(G, \lambda + \bar{\lambda})$ も sharp pair である. ここで, $\bar{\lambda}$ は λ の複素共役を表す.

例 3.

G を位数 $2m$ の正 2 面体群, ψ を G の忠実な 2 次の既約指標とすると, (G, ψ) は sharp pair となる.

例 4.

G を位数 $4m$ の正 2 面体群, または一般 4 元数群, ψ を G の忠実な 2 次の既約指標, ξ を位数 $2m$ の cyclic kernel をもった nonprincipal な 1 次指標とする. このとき (G, ψ) , $(G, \psi + \xi)$ はともに sharp pairs である.

一般に, $(\chi, 1_G)_G = m$ のとき

$$\chi' = \chi - m1_G, \quad L' = \{\alpha - m \mid \alpha \in L\}$$

とおけば, (G, χ) が L -sharp であることと (G, χ') が L' -sharp であることは同値である. 従って, sharp pairs の分類問題を考えるとき, (G, χ) は $(\chi, 1_G)_G = 0$ を満たすとしてよい.

定義.

$(\chi, 1_G)_G = 0$ のとき, (G, χ) は *normalized* であるという.

定義.

(G, χ) を L -sharp, $\mathcal{G}$ を $\mathbb{Q}(L)$ の $\mathbb{Q}$ 上のガロワ群とすると, L の $\mathcal{G}$ -orbits の個数を (G, χ) の *rank* と呼ぶ.

先ず, “小さい” rank を持つ sharp pair (G, χ) の分類結果を紹介する.

L が有理整数だけからなる場合は, 非常に難しく僅かに以下の結果が知られているだけである.

[CK] $L = \{\ell\}$ ならば, $\ell = -1$ で, G は任意の有限群, $\chi = \rho_G - 1_G$.

[CK] $L = \{\ell, \ell + 1\}$ ならば, $\ell = -1$.

[CK] $L = \{0, \ell\}$ で, $\ell \neq -1$ ならば, χ は既約, $-\ell$ は素数べき.

特に, $-\ell = p$ (p は素数) ならば, $G = P \rtimes \mathbb{Z}_{p-1}$. ここで P は位数 p^3 の非可換アーベル群である.

[CKaK] $L = \{-1, 1\}$ ならば, χ は2つの既約指標の和で, G は次のいずれかである.

$$\begin{array}{ll} D_8, & Q_8 \ (n=3); & S_4, & SL(2,3) \ (n=5); \\ GL(2,3), & \hat{S}_4 \ (n=7); & S_5, & SL(2,5) \ (n=11); \\ PSL(2,7) \ (n=13), & A_6 \ (n=19), & \hat{A}_7 \ (n=71), & M_{11} \ (n=89). \end{array}$$

[CK] $L = \{\ell, \ell+1, \ell+2\}$ ならば, $\ell = -1$.

[N1] $L = \{\ell, \ell+1, \ell+2, \ell+3\}$ ならば, χ は既約で

$$\begin{array}{ll} SL(2,3) \ (n=2, \ell=-2), & S_5 \ (n=4, \ell=-1), \\ A_6 \ (n=5, \ell=-1), & M_{11} \ (n=10, \ell=-1). \end{array}$$

一般に, $L \subset \mathbb{Z}$ の場合には

$$(1) \ |L| = 2 \text{ ならば, } (\chi, \chi) = 1 - \min(L) \cdot \max(L)$$

$$(2) \ |L| > 2 \text{ ならば, } (\chi, \chi) \leq -\min(L) \cdot \max(L)$$

なので, 次の対象としては例えば $L = \{-1, 2\}, \{-2, 1\}, \{-1, 0, 2\}, \dots$ 等の場合と思われるがどれも未解決である.

以後は, L が無理数を含む場合を考察する.

以下, $L_0 = L \cap \mathbb{Z}$, $L^* = L \setminus \mathbb{Z}$ とおき, $L^* \neq \emptyset$ と仮定する.

定理 1 ([CK]).

(G, χ) を rank 1 の normalized L -sharp with $L_0 = \emptyset$ とすると, G は奇素数次の巡回群で, χ は 1 次指標か, または 2 つの複素共役な 1 次指標の和である.

定理 2 ([A],[AKN],[KN]).

(G, χ) を rank 2 の normalized L -sharp とする. このとき

(1) $L_0 = \emptyset$ ならば, G は位数 p^2 (p : 奇素数) の巡回群で, χ は 1 次指標か, または 2 つの複素共役な 1 次指標の和 ($p > 3$) である.

(2) $|L_0| = 1$ ならば, 次のいずれかが起こる.

(i) $L_0 = \{-1\}$, G は 4 次の巡回群, χ は 1 次指標.

(ii) $L_0 = \{-1\}$, G は 9 次の巡回群, χ は 2 つの複素共役な 1 次指標の和.

(iii) $L_0 = \{0\}$, G は位数 $2p$ (p : 素数 ≥ 5) の正 2 面体群, χ は 2 次の既約指標.

定理 3 ([N2]).

(G, χ) を rank 3 の normalized L -sharp とする. このとき

(1) $L_0 = \emptyset$ ならば, G は位数 pq (p, q は異なる奇素数), または p^3 (p は奇素数) の巡回群で, χ は 1 次指標, または 2 つの複素共役な 1 次指標の和 ($p, q > 3$) である.

(2) $|L_0| = 1$ ならば, 次のいずれかが起こる.

(i) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 8 の巡回群, χ は 1 次指標.

(ii) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 27 の巡回群, χ は 2 つの複素共役な 1 次指標の和.

(iii) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 $2p$ (p : 奇素数) の巡回群, χ は 1 次指標.

(iv) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 $3p$ (p : 素数 ≥ 5) の巡回群, χ は 2 つの複素共役な 1 次指標の和.

(v) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 $4p$ (p : 素数 ≥ 5) の正 2 面体群, または一般 4 元数群, χ は 2 次の既約指標と (位数 $2p$ の cyclic kernel をもった) 1 次指標の和.

(vi) $L_0 = \{0\}$, G は位数 $2p^2$ (p : 素数 ≥ 5) の正 2 面体群, χ は 2 次の既約指標.

(3) $|L_0| = 2$ ならば, 次のいずれかが起こる.

(i) $L_0 = \{-2, 0\}$ または $\{-1, 1\}$, G は位数 16 の正 2 面体群, または一般 4 元数群で, χ は 2 次の既約指標, または 2 次の既約指標と 1 次指標の和である.

(ii) $L_0 = \{-1, 0\}$, G は位数 18 の正 2 面体群, χ は 2 次の既約指標.

(iii) $L_0 = \{-1, 0\}$, $G \cong \widehat{S}_4$, χ は 2 次の既約指標.

(iv) $L_0 = \{-1, 0\}$, $G \cong A_5$, χ は 3 次の既約指標.

定理 1, 定理 2 (1), 定理 3 (1) より自然に最初に述べたことが予想される.

定理 4 (予想) ([AKLN]).

(G, χ) を (任意の rank の) normalized L -sharp とする. このとき, $L_0 = \emptyset$ ならば, G は奇数位数の巡回群で, χ は 1 次指標, または 2 つの複素共役な 1 次指標の和である.

Reduction

(奇) 素数べきの位数をもつすべての群に対して定理 4 が成り立つならば, すべての有限群 G に対して定理 4 が成り立つ.

任意の p -群に対する定理 4 の証明には次の整数論的結果が要求される. また, 定理 5 の系では (G, χ) が L -sharp であることを仮定しない.

定理 5 ([AKLN]).

p を素数, ω を 1 の原始 p^ℓ -乗根とする. また, $\beta = \sum_{k=1}^{p^\ell-1} \beta_k(1 - \omega^k)$ は $0 \leq \beta_k \in \mathbb{Z}$, $(p, k) = 1$ なるある k に対して $\beta_k > 0$ で, $\gcd(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p^\ell-1}) = 1$ を満たすものとする. このとき, β が無理数で, $N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(\beta)$ が p べきならば, β は $1 - \omega$ または $2\operatorname{Re}(1 - \omega)$ と代数的共役である.

系.

χ を有限群 G の忠実な指標とし, ある位数 p^ℓ (p は素数) の元 $g \in G$ に対して, $\chi(g)$ が無理数と仮定する. また, L_g を $\chi(g)$ を含む L の Galois orbit とし, $f_{L_g}(\chi(1))$ が p べきと仮定する. このとき, 1 の原始 p^ℓ 乗根 ω と 非負整数 s で, χ を与える表現 ρ において $\rho(g)$ の固有値が 1 (重複度 $n - p^s$) と ω (重複度 p^s), または 1 (重複度 $n - 2p^s$), ω (重複度 p^s), $\bar{\omega}$ (重複度 p^s) となるものが存在する.

これらから次のように定理 4 の証明が得られる.

定理 4 の証明の概略.

先の Reduction より, G を p -群, (G, χ) を normalized L -sharp with $L_0 = \emptyset$ としてよい. 定理 5 の系より G は位数 p の部分群をただ 1 つだけもつことが示される. 従って, G は巡回群である.

いま, $G = \langle g \rangle$ with $o(g) = p^\ell$ とし, ω を 1 の原始 p^ℓ 乗根とする. $L_0 = \emptyset$ から, $\chi(g)$ は無理数で, $N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(\chi(1) - \chi(g))$ は p べきとなる. また, ρ を χ を与える表現とし, $\rho(g)$ の固有値としての ω^k の重複度を α_k とおくと

$$\chi(1) - \chi(g) = \sum_{k=1}^{p^\ell-1} \alpha_k (1 - \omega^k)$$

で, ある $0 \leq s \in \mathbb{Z}$ に対して $\gcd(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p^\ell-1}) = p^s$. そこで $\beta_k = p^{-s} \alpha_k$, $\beta = p^{-s}(\chi(1) - \chi(g))$ とおくと

$$\beta = \sum_{k=1}^{p^\ell-1} \beta_k (1 - \omega^k)$$

で, β は定理 5 の仮定を満たす. 従って, 必要ならば g を g のべきで置き換えることによって

$$\chi = (n - p^s)1_G + p^s \lambda \quad \text{または} \quad \chi = (n - 2p^s)1_G + p^s \lambda + p^s \bar{\lambda}$$

とできる. ここで, λ は $\lambda(g) = \omega$ なる G の 1 次指標である. よって, (G, χ) は normalized L -sharp より, $\chi = \lambda$ または $\chi = \lambda + \bar{\lambda}$ を得る. $\square$

なお, 定理 4 のこの証明は (Cameron-Kiyota の) 定理 1 の別証明にもなっている. 実際, (G, χ) の rank を r とし

$$|G| = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_m^{e_m} \quad (p_1, p_2, \dots, p_m \text{ は異なる素数})$$

とおくと, 定理 4 の仮定の下で

$$r = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_m + 1) - 1$$

が成り立つ。したがって, $r = 1$ ならば, $|G| = p$ (p は素数) となるからである。

REFERENCES

- [A] D. Alvis, *On finite groups admitting certain sharp characters with irrational values*, Comm. Algebra (to appear).
- [AKLN] D. Alvis, M. Kiyota, H. Lenstra and S. Nozawa, *Sharp characters with only one rational value*, Comm. Algebra (to appear).
- [AKN] D. Alvis, M. Kiyota and S. Nozawa, *Sharp characters of rank two*, (unpublished).
- [AN] D. Alvis and S. Nozawa, *Sharp characters with one class of irrational values*, (submitted).
- [B] H. F. Blichfeldt, *A theorem concerning the invariants of linear homogeneous groups, with some applications to substitution-groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **5** (1904), 461–466.
- [CKaK] P. J. Cameron, T. Kataoka and M. Kiyota, *Sharp characters of finite groups of type $\{-1, 1\}$* , J. Algebra **152** (1992), 248–258.
- [CK] P. J. Cameron and M. Kiyota, *Sharp characters of finite groups*, J. Algebra **115** (1988), 125–143.
- [KN] M. Kiyota and S. Nozawa, *Sharp characters whose values at non-identity elements are 0 and a family of algebraic conjugates*, J. Algebra (to appear).
- [N1] S. Nozawa, *Sharp characters of finite groups having prescribed values*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 269–277.
- [N2] ———, *Sharp characters of rank three*, (preprint).