

内包の外延への還元可能性について

静岡大学 工学部 中松和己

鈴木淳え

第0章

〔序〕 情報処理技術の応用分野を自然言語にも広げるには、計算機構の研究に意味論的考察が必須であり、それ故様相諸概念の導入及びその数学的研究、処理技術の取り入れも必要となる。意味論は名指し理論の矛盾がわかり R. Carnap の内包-外延の体系として捉られ様相論理が重要視されてきた。しかしその応用面からは、内包的体系は外延的体系に比べ難解で複雑である。そこで本文では Bressan (文献〔1〕) によって整備された様相言語体系 (λ 種類の領域 (domain) をもつ一般様相言語体系) における内包的体系と外延的体系の間の両方向の還元可能性について、体系の中で内包的同型なる概念を定義し、これを基に論じた。その結果この還元可能性は、ある意味において成り立つ。

第1章

文献[1]に基づき、 $\mathcal{L}$ 種類の領域をもつ一般様相言語体系(以下 $ML^{\mathcal{L}}$ と略す.) と一般外延言語体系(以下 $E^{\mathcal{L}}$ と略す.) を定義する。(記号の詳細については文献[1] 参照のこと.)

論理式 (well formed formula) を定義するためにタイプを導入する.

〔定義1〕 次の3条件によって帰納的に $\mathcal{A}$ を $ML^{\mathcal{L}}$ の項のタイプとして定義する.(略して $\mathcal{A} \in \mathcal{T}^{\mathcal{L}}$ と書く.)

- (a) $\mathcal{A}$ が整数 $1, 2, \dots, \mathcal{L}$ の任意のものであるとき, $\mathcal{A} \in \mathcal{T}^{\mathcal{L}}$
- (b) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{L}}$ であって $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, 0 \rangle$ であるとき, $\mathcal{A} \in \mathcal{T}^{\mathcal{L}}$.
- (c) $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{L}}$ であって $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_0 \rangle$ であるとき, $\mathcal{A} \in \mathcal{T}^{\mathcal{L}}$.

ここで $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ は n 順序対を表わす. また 0 を文 (sentence) のタイプを表わし $\langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, 0 \rangle$ は関係 (relator) のタイプを表わす. また $\mathcal{T}^{\mathcal{L}} = \mathcal{T}^{\mathcal{L}} \cup \{0\}$ とおき省略形として $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, 0 \rangle$ 、 $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n : \mathcal{A}_0) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_0 \rangle$ を採用する.

〔定義2〕 ($ML^{\mathcal{L}}$ の記号の定義)

$\sim$ (否定), $\wedge$ (論理積), $\forall$ (全称記号), $\exists$ (様相記号), $\rightarrow$ (記述記号), $($ (左かっこ), $)$ (右かっこ), $,$ (

カンマ), $\underline{v}_{\pm n}$, $\underline{c}_{\pm n}$ (タイプ $\pm$ の n 番目の変数と定数),
 (ここで $\pm \in \mathcal{T}^\nu$, $n = 1, 2, \dots$).

(定義3) (E^ν の記号の定義)

(定義2) より $\sqcup$ (様相記号) を除いたもの.

(定義4) (M^ν の wff の定義)

タイプ $\pm \in \mathcal{T}^\nu$ ($\mathcal{T}^\nu = \mathcal{T}^\nu \cup \{0\}$) の wff の集合 $\mathcal{E}_\pm^\nu$ は条件 (f₁) ~ (f₉) によって帰納的に定義される. ここで n は正整数である.

(f₁) $\underline{v}_{\pm n} \in \mathcal{E}_\pm^\nu$, $\underline{c}_{\pm n} \in \mathcal{E}_\pm^\nu$ ($\pm \in \mathcal{T}^\nu$).

(f₂) $\pm \in \mathcal{T}^\nu$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}_\pm^\nu$ であり Δ が $\Delta_1 = \Delta_2$ のとき
 $\Delta \in \mathcal{E}_0^\nu$.

(f₃) $\pm_1, \dots, \pm_n \in \mathcal{T}^\nu$, $\Delta_1 \in \mathcal{E}_{\pm_1}^\nu, \dots, \Delta_n \in \mathcal{E}_{\pm_n}^\nu$, $R \in \mathcal{E}^\nu(\pm_1, \dots, \pm_n)$,
 であり Δ が $R(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ のとき $\Delta \in \mathcal{E}_0^\nu$.

(f₄) $\pm, \pm_1, \dots, \pm_n \in \mathcal{T}^\nu$, $\Delta_1 \in \mathcal{E}_{\pm_1}^\nu, \dots, \Delta_n \in \mathcal{E}_{\pm_n}^\nu$, $\Phi \in \mathcal{E}^\nu$
 $(\pm_1, \dots, \pm_n; \pm)$ であり Δ が $\Phi(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ のとき $\Delta \in \mathcal{E}_\pm^\nu$.

(f₅) $\Delta_1 \in \mathcal{E}_0^\nu$ であり Δ が $\sim \Delta_1$ のとき $\Delta \in \mathcal{E}_0^\nu$.

(f₆) $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}_0^\nu$ であり Δ が $\Delta_1 \wedge \Delta_2$ のとき $\Delta \in \mathcal{E}_0^\nu$.

(f₇) $\Delta_1 \in \mathcal{E}_0^\nu$ であり Δ が $(\forall \underline{v}_{\pm n}) \Delta_1$ のとき $\Delta \in \mathcal{E}_0^\nu$.

(f₈) $\Delta_1 \in \mathcal{E}_0^\nu$ であり Δ が $\sqcup \Delta_1$ のとき $\Delta \in \mathcal{E}_0^\nu$.

(f₉) $\pm \in \mathcal{T}^\nu$, $\Delta_1 \in \mathcal{E}_0^\nu$ であり Δ が $(\neg \underline{v}_{\pm n}) \Delta_1$ のとき $\Delta \in \mathcal{E}_\pm^\nu$.

(定義5) (E^ν の wff の定義)

(定義4) の (f₈) を除いたもの.

第2章

2.1 [内包的言語の外延的言語への翻訳について]

内包的言語 (ML^p) のセマンティックスを外延的言語 (EL^{p+1}) ($p+1$ 種の領域 (domain) をもつ外延的言語) で表現する。これは ML^p を EL^{p+1} に翻訳することを意味する。

2.2 [Possible case について]

ある外延的理論の充足可能な文の集合 K とする。 $\gamma = \bigwedge(K)$ を K のすべての matrix (タイプの ω の ω 次) の成り立つ case とする。このとき γ を possible case とする。

$\gamma = \bigwedge(K)$, $\gamma' = \bigwedge(K')$ とするとき γ' が γ の proper subcase であるとは次の場合である。

- (1) K' が K の論理的帰結 (logical consequence) である。
- (2) (1) の逆が成り立たない。

ここで γ が proper subcase を全くもたないとき γ を elementary possible case と言い、充足可能な文の最大集合を論理的等値 (L -等値) な文のクラスに分割し、その各クラスよりある文の集合をとり、その集合により特徴づけらる possible case のクラスを P とする。

2.3 [EL^{p+1} の対象 (object) (外延) と ML^p の内包]

ML^{ν} の内包を $EL^{\nu+1}$ の対象 (外延) で表現することにより、内包的言語を外延的言語に翻訳できる。

$EL^{\nu+1}$ の universe を $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{\nu+1}$ とする。タイプ $\pm$ ($\pm \in \mathcal{T}^{\nu}$) の対象 (外延) のクラス $\mathcal{O}_{\pm}^{\nu}$ を次のように帰納的に定義する。

- (a) $\mathcal{O}_{\pm}^{\nu} = \mathcal{U}_{\pm}$ ($\pm = 1, \dots, \nu$)
- (b) $\mathcal{O}_{\pm}^{\nu}(\pm_1, \dots, \pm_n)$ は直積 $\mathcal{O}_{\pm_1}^{\nu} \times \dots \times \mathcal{O}_{\pm_n}^{\nu}$ の中集合
- (c) $\mathcal{O}_{\pm}^{\nu}(\pm_1, \dots, \pm_n : \pm_0)$ は直積 $\mathcal{O}_{\pm_1}^{\nu} \times \dots \times \mathcal{O}_{\pm_n}^{\nu}$ から $\mathcal{O}_{\pm_0}^{\nu}$ への関数のクラス

また $\mathcal{U}_{\pm}^{\nu+1} = \mathcal{P}$ (possible case のクラス) とする。

上記の定義をもとに ML^{ν} の内包を外延で表現するため疑似内包 (quasi-intension) のクラス $\mathcal{QI}_{\pm}^{\nu}$ を定義する。

$\mathcal{QI}_{\pm}^{\nu}$ は possible case のクラス $\mathcal{P}$ より対象 (外延) への写像 (mapping) として定義される。従って ML^{ν} と $EL^{\nu+1}$ の間ではタイプ変換が必要となる。タイプの変換を η とすると η は次のように定義される。

- (1) $\mathcal{O}^{\eta} = (\nu+1)$
- (2) $\mathcal{U}^{\eta} = (\nu+1 : \mathcal{U})$ ($\mathcal{U} = 1, \dots, \nu$)
- (3) $(\pm_1, \dots, \pm_n)^{\eta} = (\pm_1^{\eta}, \dots, \pm_n^{\eta}, \nu+1)$
- (4) $(\pm_1, \dots, \pm_n : \pm_0)^{\eta} = (\pm_1^{\eta}, \dots, \pm_n^{\eta} : \pm_0^{\eta})$

2.4 [疑似内包のクラス $\mathcal{QI}_{\pm}^{\nu}$ の定義]

$$QI_{\underline{t}}^{\nu} = Q_{\underline{t}n}^{\nu+1} \quad (\underline{t} \in \overline{\tau}^{\nu})$$

2.5 [EL^{ν} , ML^{ν} の付値 (value assignment), モデル (model)]

付値, $V(\underline{v}_{\underline{t}n}) \in Q_{\underline{t}}^{\nu} (EL^{\nu})$, $\mathcal{V}(\underline{x}_{\underline{t}n}) \in QI_{\underline{t}}^{\nu} (ML^{\nu})$

モデル, $M(\underline{c}_{\underline{t}n}) \in Q_{\underline{t}}^{\nu} (EL^{\nu})$, $M(\underline{c}_{\underline{t}n}) \in QI_{\underline{t}}^{\nu} (ML^{\nu})$

2.6 [疑似内包の等値性について]

$\gamma \in \Gamma$ が成り立つとし $\underline{\widetilde{x}}$ と $\underline{\widetilde{y}}$ を各々 タイプ $\underline{t}$ ($\underline{t} \in \overline{\tau}^{\nu}$) の QI (疑似内包) とするとき、case γ において $\underline{\widetilde{x}}$ と $\underline{\widetilde{y}}$ が等値であるのは次の条件のうち 1 つ が成り立つときであり $\underline{\widetilde{x}} = \frac{\tau}{\gamma} \underline{\widetilde{y}}$ と書く。

(a) $\underline{t} = \underline{r}$ のとき、($\underline{r} = 1, \dots, \nu$) $\underline{\widetilde{x}}(\gamma) = \underline{\widetilde{y}}(\gamma)$ 。

このとき $\underline{\widetilde{x}}$ と $\underline{\widetilde{y}}$ は Γ から $D_{\underline{r}}^{\nu}$ への写像である。

(b) $\underline{t} = (\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n)$ のとき

$$(\lambda \xi_1, \dots, \xi_n) \underline{\widetilde{x}}(\xi_1, \dots, \xi_n, \gamma) = (\lambda \xi_1, \dots, \xi_n) \underline{\widetilde{y}}(\xi_1, \dots, \xi_n, \gamma)$$

このとき $\underline{\widetilde{x}}$ と $\underline{\widetilde{y}}$ は $QI_{\underline{t}_1}^{\nu} \times \dots \times QI_{\underline{t}_n}^{\nu} \times \Gamma$ の部分集合であり、

$\underline{\widetilde{x}}$ と $\underline{\widetilde{y}}$ の共通部分が $QI_{\underline{t}_1}^{\nu} \times \dots \times QI_{\underline{t}_n}^{\nu} \times \{\gamma\}$ と一致する。

(c) $\underline{t} = (\underline{t}_1, \dots, \underline{t}_n; \underline{t}_0)$ のとき、 $\xi_1 \in QI_{\underline{t}_1}^{\nu}, \dots, \xi_n \in QI_{\underline{t}_n}^{\nu}$

なるすべての $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ に対し、タイプ $\underline{t}_0$ の QI、

$\underline{\widetilde{x}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ と $\underline{\widetilde{y}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ が等値である。

(d) $\pm = 0$ のとき, $\{\delta\} \cap \underline{x} = \{\delta\} \cap \underline{y}$.

このとき $\underline{x} \subseteq P$, $\underline{y} \subseteq P$ である.

2.7 [内包の外延への翻訳規則]

以上のことより内包を外延で表現し ML^V を EL^{V+1} で表現できる. 内包の外延への翻訳規則を η とすると次のようになる.

[Rule η] ($ML^V \rightarrow \overline{EL}^{V+1}$ (EL^{V+1} の部分言語))

$$(T_1) \quad \underline{v}_{\pm n}, \underline{c}_{\pm n} \rightarrow \underline{v}_{\theta n}, \underline{c}_{\theta n}, \quad (\theta = \pm^n)$$

$$(T_2) \quad \Delta_1 = \Delta_2 \rightarrow (\Delta_1^\eta) = \frac{\pm_1}{K} (\Delta_2^\eta)$$

$$(\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}_{\pm}^V, K \text{ は } \underline{v}_{\theta_1}, \theta = \nu+1).$$

$$(T_3) \quad \underline{R}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \rightarrow \underline{R}^\eta(\Delta_1^\eta, \dots, \Delta_n^\eta, K)$$

$$(\underline{R}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathcal{E}_o^V, \underline{R} \in \mathcal{E}_{(\pm_1, \dots, \pm_n)}^V, \Delta_1 \in \mathcal{E}_{\pm_1}^V, \dots, \Delta_n \in \mathcal{E}_{\pm_n}^V)$$

$$(T_4) \quad \phi(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \rightarrow \phi^\eta(\Delta_1^\eta, \dots, \Delta_n^\eta)$$

$$(\phi \in \mathcal{E}_{(\pm_1, \dots, \pm_n; \pm_o)}^V, \Delta_1 \in \mathcal{E}_{\pm_1}^V, \dots, \Delta_n \in \mathcal{E}_{\pm_n}^V, \pm_o \neq 0)$$

$$(T_5) \quad \sim \Delta_1 \rightarrow \sim \Delta_1^\eta \quad (\Delta_1 \in \mathcal{E}_o^V)$$

$$(T_6) \quad \Delta_1 \wedge \Delta_2 \rightarrow \Delta_1^\eta \wedge \Delta_2^\eta \quad (\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{E}_o^V)$$

$$(T_7) \quad (\forall \underline{x}) \Delta_1 \rightarrow (\forall \underline{x}^\eta) \Delta_1^\eta$$

$$(T_8) \quad \underline{A} \Delta_1 \rightarrow (\forall K) \Delta_1^\eta \quad (\Delta_1 \in \mathcal{E}_o^V)$$

$$(T_9) \quad (\exists \underline{x}) \phi(\underline{x}) \rightarrow (\exists \underline{x}^\eta) (\forall K) \{ (\exists! \underline{y}^\eta) \phi(\underline{y})^\eta \wedge (\forall \underline{y}^\eta)$$

$$[\phi(\underline{y})^\eta \supset \underline{x}^\eta = \frac{\pm}{K} \underline{y}^\eta] \vee \sim (\exists! \underline{x}^\eta) \phi(\underline{x})^\eta \wedge \underline{x}^\eta$$

$$= \frac{\pm}{K} \alpha_{\pm_n}^* \}$$

(α^* は非存在対象を表わす.)

(この規則の記号の詳細については文献[1] N 15 参照)

第3章

(内包的構造に関する内包-外延の還元性)

内包的言語(様相言語)において2つの文を考えると、その論理的等値性(L-等値性(各文の内包が等値))と共にその内包的構造の等値性が問題になることがある。(例、信念文の解釈) よってここで文(閉じた matrix)だけでなく ML^P のすべての w 対しその内包的同型(内包的構造の等値性)を外延的メタ言語で定義し、内包的同型の外延的言語への翻訳に対する考察を与える。

3.1 (内包的同型の定義)

Δ, Δ' を ML^P の任意のタイプ $\pm (\in \mathcal{T}^P)$ の w 対しとすると、 Δ, Δ' が内包的同型 ($Is^{(\lambda)}(\Delta, \Delta')$) とは次の場合である。

$$(1) \quad Is^{(\lambda)}(\underline{v} \pm_n, \underline{v}' \pm_n) \stackrel{D}{=} (\text{すべての付値 } \mathcal{V} \text{ に対し } \mathcal{V}(\underline{v} \pm_n) = \mathcal{V}(\underline{v}' \pm_n))$$

$$Is^{(\lambda)}(\underline{c} \pm_n, \underline{c}' \pm_n) \stackrel{D}{=} (\text{すべてのモデル } \mathcal{M} \text{ に対し } \mathcal{M}(\underline{c} \pm_n) = \mathcal{M}(\underline{c}' \pm_n))$$

$$(2) \quad Is^{(\lambda)}(\Delta_1 \wedge \Delta_2, \Delta'_1 \wedge \Delta'_2) \stackrel{D}{=} Is^{(\lambda)}(\Delta_1, \Delta'_1) \wedge Is^{(\lambda)}(\Delta_2, \Delta'_2)$$

- $$\vee I_S^{(\lambda)}(\Delta_1, \Delta'_2) \wedge I_S^{(\lambda)}(\Delta_2, \Delta'_1)$$
- (3) $I_S^{(\lambda)}(\Delta_1 = \Delta_2, \Delta'_1 = \Delta'_2) \stackrel{D}{=} I_S^{(\lambda)}(\Delta_1, \Delta'_1) \wedge I_S^{(\lambda)}(\Delta_2, \Delta'_2) \vee$
 $I_S^{(\lambda)}(\Delta_1, \Delta'_2) \wedge I_S^{(\lambda)}(\Delta'_1 = \Delta'_2)$
- (4) $I_S^{(\lambda)}(\underline{R}(\Delta_1, \dots, \Delta_n), \underline{R}'(\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)) \stackrel{D}{=} I_S^{(\lambda)}(\underline{R}, \underline{R}') \bigwedge_{i=1}^n$
 $I_S^{(\lambda)}(\Delta_i, \Delta'_i)$
- (5) $I_S^{(\lambda)}(\underline{\Phi}(\Delta_1, \dots, \Delta_n), \underline{\Phi}'(\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)) \stackrel{D}{=} I_S^{(\lambda)}(\underline{\Phi}, \underline{\Phi}') \bigwedge_{i=1}^n$
 $I_S^{(\lambda)}(\Delta_i, \Delta'_i).$
- (6) $I_S^{(\lambda)}((\forall \underline{v}_{1n}) \Delta_1, (\forall \underline{v}'_{1n}) \Delta'_1) \stackrel{D}{=} I_S^{(\lambda)}(\underline{v}_{1n}, \underline{v}'_{1n}) \wedge I_S^{(\lambda)}(\Delta_1, \Delta'_1)$
- (7) $I_S^{(\lambda)}(\underline{\Delta} \Delta_1, \underline{\Delta} \Delta'_1) \stackrel{D}{=} I_S^{(\lambda)}(\Delta_1, \Delta'_1)$
- (8) $I_S^{(\lambda)}((\exists \underline{v}_{1n}) \Delta_1, (\exists \underline{v}'_{1n}) \Delta'_1) \stackrel{D}{=} I_S^{(\lambda)}(\underline{v}_{1n}, \underline{v}'_{1n}) \wedge I_S^{(\lambda)}(\Delta_1, \Delta'_1)$

3.2 (3.1) の定義により ML^V の互いに内包的同型なる 2 つの wff Δ, Δ' についてその外延的翻訳 Δ^n, Δ'^n を考えると、これらの 2 つの EL^{V+1} の wff の間に外延的同型 ($I_S^{(e)}(\Delta^n, \Delta'^n)$) [外延的同型とは内包的同型の定義において (1) の $\mathcal{V}$ を $\mathbb{V}, \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ でおき換え, (8) を除去したもの] の関係が成り立つ

[証明]

Δ, Δ' を ML^V の任意の wff とするとき、 $I_S^{(\lambda)}(\Delta, \Delta')$ を仮定し、 $I_S^{(e)}(\Delta^n, \Delta'^n)$ を示す。wff, 外延的同型の定義にもとづく式の長さに関する帰納法による。

- (1) $I_S^{(\lambda)}(\underline{v}_{1n}, \underline{v}'_{1n})$ ならば $\mathcal{V}(\underline{v}_{1n}) = \mathcal{V}(\underline{v}'_{1n})$

また Rule^η 及び付値の定義より $\underline{V}(\underline{v}\theta_n) = \underline{V}(\underline{v}'\theta_n)$,
 $\theta = \underline{t}^\eta$ より $I_S^{(e)}(\underline{v}\underline{t}_n) = I_S^{(e)}(\underline{v}'\underline{t}_n)$

同様にして、 $I_S^{(u)}(\underline{c}\underline{t}_n, \underline{c}'\underline{t}_n)$ を仮定するとモデルの定義により $I_S^{(e)}(\underline{c}\underline{t}_n, \underline{c}'\underline{t}_n)$ なることがわかる。

(2) Δ, Δ' を各々 $\Delta_1 = \Delta_2$, $\Delta'_1 = \Delta'_2$ 又は $\Delta_1 \wedge \Delta_2$, $\Delta'_1 \wedge \Delta'_2$ とする。

$I_S^{(u)}(\Delta, \Delta')$ を仮定すると内包的同型の定義より $I_S^{(u)}(\Delta_1, \Delta'_1) \wedge I_S^{(u)}(\Delta_2, \Delta'_2) \vee I_S^{(u)}(\Delta_1, \Delta'_2) \wedge I_S^{(u)}(\Delta'_1, \Delta_2)$

帰納法の仮定(1)より $I_S^{(u)}(\Delta_{\underline{l}}, \Delta'_{\underline{l}})$ ($\underline{l} = 1, 2$) ならば $I_S^{(e)}(\Delta_{\underline{l}}^\eta, \Delta'_{\underline{l}}^\eta)$ であるからこのとき成り立つ。

(3) Δ, Δ' が $R(\Delta_1, \dots, \Delta_n), R'(\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)$ なるとき、 $\Delta^\eta, \Delta'^\eta$ は $R^\eta(\Delta_1^\eta, \dots, \Delta_n^\eta, K), R'^\eta(\Delta'_1^\eta, \dots, \Delta'_n^\eta, K)$ 。

帰納法の仮定より $I_S^{(e)}(\Delta_{\underline{l}}^\eta, \Delta'_{\underline{l}}^\eta)$ であり $I_S^{(e)}(R^\eta, R'^\eta)$ であるから明らかに $I_S^{(e)}(\Delta, \Delta')$ 。

(4) Δ, Δ' が $\underline{\pi}(\Delta_1, \dots, \Delta_n), \underline{\pi}'(\Delta'_1, \dots, \Delta'_n)$ なるとき

(3)と同様に明らか

(5) Δ, Δ' が $\sim \Delta_1, \sim \Delta'_1$ のとき帰納法の仮定より $I_S^{(e)}(\Delta_1^\eta, \Delta'_1^\eta)$ であるから $I_S^{(e)}(\sim \Delta_1^\eta, \sim \Delta'_1^\eta)$

(6) Δ, Δ' が $(\forall \underline{v}\underline{t}_n)\Delta_1, (\forall \underline{v}'\underline{t}_n)\Delta'_1$ のとき、帰納法の仮定より、 $I_S^{(e)}(\Delta_1^\eta, \Delta'_1^\eta), I_S^{(e)}(\underline{v}\underline{t}_n, \underline{v}'\underline{t}_n)$ であるから $I_S^{(e)}(\Delta^\eta, \Delta'^\eta)$

(7) Δ, Δ' が $\underline{\vee}\Delta_1, \underline{\vee}\Delta'_1$ のとき $\Delta^\eta, \Delta'^\eta$ は各々 $(\forall K)\Delta_1^\eta,$

$(\forall K)\Delta_1^{\eta}$ となる. 故に明らかに $I_S^{(e)}(\Delta_1^{\eta}, \Delta_1^{\eta})$.

(8) Δ, Δ_1 が $(\exists x)\phi(x) \quad (\exists x')\phi'(x')$ のとき

$$\Delta^{\eta}: (\exists x^{\eta})(\forall K)\{(\exists! y^{\eta})\phi(y^{\eta}) \wedge (\forall y^{\eta})[\phi(y^{\eta}) \supset x^{\eta} = \frac{\pi}{K} y^{\eta}]\} \vee \sim (\exists! x^{\eta})\phi(x^{\eta}) \wedge x^{\eta} = \frac{\pi}{K} a_{\pi}^{*}$$

$$\Delta_1^{\eta}: (\exists x^{\eta})(\forall K)\{(\exists! y^{\eta})\phi'(y^{\eta}) \wedge (\forall y^{\eta})[\phi'(y^{\eta}) \supset x^{\eta} = \frac{\pi}{K} y^{\eta}]\} \vee \sim (\exists! x^{\eta})\phi'(x^{\eta}) \wedge x^{\eta} = \frac{\pi}{K} a_{\pi}^{*}$$

(ここで x, y, x', y' は変数)

帰納法の仮定より $I_S^{(e)}(x^{\eta}, x^{\eta})$ であるから $I_S^{(e)}(\Delta_1, \Delta_1)$

を仮定すると $I_S^{(e)}((\exists x^{\eta})\Delta_1, (\exists x^{\eta})\Delta_1)$ が成り立つ.

従って $\Delta^{\eta}, \Delta_1^{\eta}$ を考えたとき $(\exists x^{\eta})$ 以下の式を Δ_1 と考えると同様の事が成り立つ.

以上の事より ML^{ν} において ML^{ν} の ω 次 Δ, Δ_1 が内包的同型であれば $EL^{\nu+1}$ の ω 次 $\Delta^{\eta}, \Delta_1^{\eta}$ が $EL^{\nu+1}$ において外延的同型となることがわかる.

(証明終)

さらに翻訳 η に対する逆変換 η' を考えると $\overline{EL}^{\nu+1}$ における外延的同型では η' によつて ML^{ν} における内包的同型に翻訳される. $\overline{EL}^{\nu+1}$ は ML^{ν} を翻訳 η によつて外延的言語に訳した言語であり $EL^{\nu+1}$ の部分言語であり, η' は $\overline{EL}^{\nu+1}$ から ML^{ν} への翻訳である. $EL^{\nu+1}$ と $\overline{EL}^{\nu+1}$ の本質的相異は領域 $\mathcal{U}^{\nu+1}$ における変数が $\overline{EL}^{\nu+1}$ の場合は K (カッパ) のみであることである.

また η の逆変換 η^{-1} については $\overline{EL}^{\nu+1}$ に対して定義可能なのは明らかである。

第4章

(ML^{ν} , $EL^{\nu+1}$ における一階述語計算について)

ML^{ν} , $EL^{\nu+1}$ における一階述語計算体系を考えると、翻訳 η に対し ML^{ν} の一階述語計算 $LPC(ML^{\nu})$ の定理 P と $EL^{\nu+1}$ の一階述語計算 $LPC(\overline{EL}^{\nu+1})$ の定理 P^{η} が同値となる。

(証明の詳細については文献[1] N 30 参照)

(公理)

$$(A1) \quad (\underline{N}) \underline{P} \supset \underline{P} \wedge \underline{P}$$

$$(A2) \quad (\underline{N}) (\underline{P} \wedge \underline{Q}) \supset \underline{P}$$

$$(A3) \quad (\underline{N}) (\underline{P} \supset \underline{Q}) \supset [\sim(\underline{P} \wedge \underline{Q}) \supset \sim(\underline{P} \wedge \underline{Q})]$$

$$(A4) \quad (\underline{N}) (\forall x) (\underline{P} \supset \underline{Q}) \supset [(\forall x) \underline{P} \supset (\forall x) \underline{Q}]$$

$$(A5) \quad (\underline{N}) \underline{P}_1 \supset (\forall x) \underline{P}_1 \quad (\underline{P}_1 \text{ で } x \text{ は自由でない})$$

$$(A6) \quad (\underline{N}) (\forall x) \underline{\Phi}(x, y) \supset \underline{\Phi}(y, y)$$

$$(A7) \quad (\underline{N}) \underline{N}(\underline{P} \supset \underline{Q}) \supset (\underline{N} \underline{P} \supset \underline{N} \underline{Q})$$

$$(A8) \quad \underline{P}_1 \supset \underline{N} \underline{P}_1 \quad (\underline{P}_1 \text{ は modelly closed})$$

$$(A9) \quad (\underline{N}) \underline{N} \underline{P} \supset \underline{P}$$

ここで $(\underline{N})$ は全称記号又は様相記号の列を表わしており、その範囲はあとに続く式全体である。

LPC(EL^{V+1})の公理 : (A1) ~ (A6)

LPC(ML^{V+1})の公理 : (A1) ~ (A9)

(推論規則は *modus ponens*.)

第5章

5.1 [外延的言語の内包的言語への翻訳について]

ここで今度は EL^{V+1} の ML^V への翻訳を考える. このためには EL^{V+1} と ML^V のセマンティックスを内包的言語(様相言語)で表わす必要がある. この内包的言語として ML^V をとる. つまり ML^V のセマンティックスを自分自身で表現することにもなる.

5.2 [EL^{V+1} の対象(object)(外延)の絶対概念による表現]

2.3においては各タイプの対象のクラスを Ω^V で表現したがここではこれを ML^V で絶対概念(文献[3] §17参照)のクラス Ω^{V+1} ($\alpha \in \mathcal{A}^{V+1}$)によって表わす. (この絶対概念の存在については証明されている, (詳細については文献[1] V56参照)). ML^V の中ではこの絶対概念は ML^V の変数によって表わされる.

(a) $\mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_r$ は各々 $\mathfrak{d}_r(\mathfrak{r})$ ($r=1, \dots, r$) によって表わされる.

(b) $\mathfrak{d}_{r+1}$ は $E\mathfrak{d}$ なるタイプ $\langle(((1)))\rangle$ の変数によって表わされる. ここで $E\mathfrak{d}$ は第2章 2.2 の elementary possible case

のクラスと考えられる。(E $\mathcal{L}'$ の正確な定義、概念については文献[1]参照のこと)

上記の(a)(b)により $EL^{\nu+1}$ の領域を定義することにより $\Omega^{\nu+1}_{\pm}$ は $\Omega^{\nu}_{\pm}$ と同様に定義される。

$$(a) \quad \Omega^{\nu+1}_{\pm} = \mathcal{D}_{\pm} \quad (\pm = 1, \dots, \nu)$$

$$(b) \quad \Omega^{\nu}_{(\pm_1, \dots, \pm_n)} \text{ は直積 } \Omega^{\nu+1}_{\pm_1} \times \dots \times \Omega^{\nu+1}_{\pm_n} \text{ の中集合}$$

$$(c) \quad \Omega^{\nu}_{(\pm_1, \dots, \pm_n: \pm_0)} \text{ は直積 } \Omega^{\nu+1}_{\pm_1} \times \dots \times \Omega^{\nu+1}_{\pm_n} \text{ から } \Omega^{\nu}_{\pm_0} \wedge \text{ の関数のクラス}$$

$$(d) \quad \Omega^{\nu+1}_{\nu+1} = E\mathcal{L}'$$

ここで $EL^{\nu+1}$ の wff を ML^{ν} の wff に翻訳するためにタイプの変換が必要となる。この変換を* (star) とすると次のようになる。

$$(a) \quad \pm^* = \pm \quad (\pm = 1, \dots, \nu)$$

$$\pm^* = (((1))) \quad (\pm = \nu+1)$$

$$(b) \quad \pm^* = (\pm_1^*, \dots, \pm_n^*) \quad (\pm = (\pm_1, \dots, \pm_n))$$

$$(c) \quad \pm^* = (\pm_1^*, \dots, \pm_n^*: \pm_0^*) \quad (\pm = (\pm_1, \dots, \pm_n: \pm_0))$$

5.3 [外延の内包への翻訳規則]

第2章と逆にここでは $EL^{\nu+1}$ を ML^{ν} で表現する翻訳規則* が定義できる。

[Rule*] ($EL^{\nu+1} \rightarrow ML^{\nu}$) (詳細については文献[1] N56参照)

$$(T_1^*) \quad \underline{v}_{\pm n} \rightarrow \underline{v}_{\pm 4n} \quad (\pm^* = \pm \text{のとき})$$

$$\underline{v}_{\pm n} \rightarrow \underline{v}_{\pm 4n+2} \quad (\pm^* \neq \pm \text{のとき})$$

$$(T_2^*) \quad \underline{c}_{\pm n} \rightarrow \underline{c}_{\pm 4n} \quad (\pm^* = \pm \text{のとき})$$

$$\underline{c}_{\pm n} \rightarrow \underline{c}_{\pm 4n+2} \quad (\pm^* \neq \pm \text{のとき})$$

$$(T_3^*) \quad \Delta_1 = \Delta_2 \rightarrow \Delta_1^* = \Delta_2^*$$

$$(T_4^*) \quad \Delta_0(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \rightarrow \Delta_0^*(\Delta_1^*, \dots, \Delta_n^*)$$

(ここで Δ_0 は $(\pm_1, \dots, \pm_n)$ 又は $(\pm_1, \dots, \pm_n : \pm_0)$ なる
タイプをもつ EL^{V+} の wff)

$$(T_5^*) \quad \sim \Delta \rightarrow \sim \Delta^*$$

$$(T_6^*) \quad \Delta_1 \wedge \Delta_2 \rightarrow \Delta_1^* \wedge \Delta_2^*$$

($\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ は matrix)

$$(T_7^*) \quad (\forall \underline{v}_{\pm n}) \Delta_1 \rightarrow (\forall \underline{v}_{\pm n}^*) (\underline{v}_{\pm n}^* \in \underline{v}_{(\pm)}^* \supset \Delta_1^*)$$

$$(T_8^*) \quad (\exists \underline{v}_{\pm n}) \Delta_1 \rightarrow (\exists \underline{v}_{\pm n}^*) (\underline{v}_{\pm n}^* \in \underline{v}_{(\pm)}^* \wedge \Delta_1^*)$$

5.4 $[ML^V$ による ML^V の内包の定義]

前述したようにここでは ML^V のセマンティックスを ML^V 自身で表現しているので内包を ML^V で定義する。

$I_{\pm}(\underline{y}, \underline{y})$: タイプ $\pm$ の $\underline{y}$ の内包が $\underline{y}$ であることを意味する。
($\pm \in \mathcal{T}^V$)

$$(a) \quad I_{\pm}(\underline{y}, \underline{y}) \stackrel{D}{=} \underline{y} \in \underline{v}_{(\pm)}^* \wedge (\forall \underline{u}) [\Delta(\underline{u} \supset \underline{y}(\underline{u}) = \underline{y})]$$

($\pm = 1, \dots, V$ のとき)

- (b) $I_{\pm}(\overline{y}, y) \stackrel{D}{=} (\forall \overline{x}, \dots, \overline{x}_n, u) \{ N(\overline{y}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n, u) \equiv (\exists \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \wedge \Diamond [\mid u \wedge y(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \bigwedge_{i=1}^n I_{\pm_i}(\overline{x}_i, \underline{x}_i)]] \}$
 $(\pm = (\pm_1, \dots, \pm_n) \text{ のとき})$
- (c) $I_{\pm}(\overline{y}, y) \stackrel{D}{=} (\forall \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \{ N(\overline{y}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) = (\neg \overline{x}_0) \equiv (\exists \underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n) \wedge [N(\underline{x}_0 = y(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \bigwedge_{i=1}^n I_{\pm_i}(\overline{x}_i, \underline{x}_i)] \}$
 $(\pm = (\pm_1, \dots, \pm_n; \pm_0) \text{ のとき})$

(ここで $\mid u$ は "possible case y が現実起きる" ことを意味し、
 u は possible case y を表わす変数である。詳細は文献(1)
 N 59 参照)

この $I_{\pm}(\overline{y}, y)$ の定義より $\overline{y}$ は y の L -確定的内包 (文献[2] § 22 参照) であり外延 (対象) でもある。またこの定義をもとに ML^P をメタ言語として内包的同型を定義することもできる。しかしこのとき翻訳規則 $\eta, *$ を考察し、 ML^P の ω 対 Δ について $\eta, *$ を順に適用した ML^P の ω 対 $\Delta^{\eta*}$ を考えると Δ と $\Delta^{\eta*}$ は内包的同型ではない。

(これは Rule η , Rule $*$ より明らか)。

[参考文献]

- (1) Aldo Bressan : General Interpreted Modal Calculus,
 Yale University Press. 1972.

[2] R. Carnap : Meaning necessity, Chicago University Press. 1956 .

(邦訳, 永井成男他訳: 「意味と必然性」, 紀伊国屋書店. 1974)

[3] R. Carnap : Introduction to Semantics, Harvard University Press. 1942.

(邦訳, 遠藤弘訳: 「意味論序説」, 紀伊国屋書店 1975)