

多粒子有限状態の無限過去を持つ時間発展 に対する情報系分解問題

伊藤 悠 (京都産業大学)
世良 透 (京都大学)
矢野 孝次 (京都大学)

1 Introduction

次の確率漸化式を考えよう:

$$X_k = N_k X_{k-1} \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

ここで、**観測過程** $X = \{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は可測空間 V に値をとり、**駆動ノイズ** $N = \{N_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の作用によって各時刻で発展する。また、 $N_k X_{k-1}$ はランダム写像 N_k の X_{k-1} における値を意味する; 値 $f(v)$ を簡単に fv と書く。より正確には、 V からそれ自身への写像から成るある可測空間 Σ 上の確率測度 μ に対して、 $\{X, N\}$ が μ -evolution であるとは、 $\{X, N\}$ が (1.1) を満たし、かつ、各時刻 k で N_k が共通の分布 μ を持ち過去 $\mathcal{F}_{k-1}^{X, N}$ と独立であることを言う。但し、

$$\mathcal{F}_{k-1}^{X, N} := \sigma(X_j, N_j : j \leq k-1). \quad (1.2)$$

このとき、組 (X, N) は $\mathbb{Z}$ で添字付けられた $V \times \Sigma$ -値 Markov 過程であり、その推移確率は次で与えられることに注意されたい:

$$\mathbb{P}((X_k, N_k) \in \cdot \mid \mathcal{F}_{k-1}^{X, N}) = \mu\{\sigma : (\sigma x, \sigma) \in \cdot\} \Big|_{x=X_{k-1}}. \quad (1.3)$$

情報系分解問題とは、 $\{X, N\}$ を μ -evolution とするとき、観測情報系 $\mathcal{F}_k^X = \sigma(X_j : j \leq k)$ に対して、次の分解を得ることである:

$$\mathcal{F}_k^X = \mathcal{G}_k \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \mathcal{H}_k \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

ここで、第1成分 $\mathcal{G}_k$ は駆動ノイズ $\mathcal{F}_k^N = \sigma(N_j : j \leq k)$ の部分 σ -集合体であり、第2成分 $\mathcal{F}_{-\infty}^X := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_k^X$ は無限過去を表し、第3成分 $\mathcal{H}_k$ は $\mathcal{F}_k^N (\supset \mathcal{G}_k)$ 、 $\mathcal{F}_{-\infty}^X$ 、 $\mathcal{H}_k$ が独立であるような σ -集合体である。また、 σ -集合体 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ に対して、 $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots)$ を $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \dots$ と書き、作用 $\vee$ を *join* と呼ぶ。

式 (1.1) を繰り返すと、 $j < k$ に対して、 $X_k = N_k N_{k-1} \cdots N_j X_{j-1}$ が得られる。したがって、以下が成り立つことが一般に期待されるかもしれない:

$$\mathcal{F}_k^X \subset \bigcap_{j < k} (\mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_j^X) \stackrel{?}{=} \mathcal{F}_k^N \vee \left(\bigcap_{j < k} \mathcal{F}_j^X \right) = \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X. \quad (1.5)$$

しかしながら、分解 (1.4) において非自明な第 3 成分 $\mathcal{H}_k$ があるとき、これは成り立たない。この誤りは intersection と join を交換したことにある; Kolmogorov と Wiener による有名な誤謬については [10, (1) of Remark 1.4] を見よ。また、関連する議論として [2, Section 2.5] を参照されたい。

Tsirelson [3] による強解を持たない確率微分方程式の例に動機付けられて、Yor [13] は状態空間が 1 次元トーラスの場合を研究した。すなわち、 $V = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とし、 $z \in \mathbb{T}$ と写像 $w \mapsto zw$ を同一視することで $\Sigma = \mathbb{T}$ とした場合の情報系分解問題である。Yor [13] は Fourier 級数とマルチンゲール収束定理を用いて、情報系分解問題に完全な解答を与えた。また、Akahori-Uenishi-Yano [1] 及び Hirayama-Yano [5] は Yor [13] の結果をコンパクト群の場合に一般化した。この話題に関する概説 Yano-Yor [12] も参照されたい。

状態空間が有限集合の場合を考えよう。 $V = \{1, 2, \dots, \#V\}$ とし、 $\Sigma = \text{Map}(V)$ は V からそれ自身への写像の全体から成る、写像の合成を積とした有限半群である。このとき、Yano [11] は次を示した: 包含関係

$$\mathcal{F}_k^X \subset \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \quad (1.6)$$

が成り立つための必要十分条件は μ の台 $S(\mu)$ が *sync* なることである。但し、 $S(\mu)$ が *sync* であるとは、ある $g \in \bigcup_n S(\mu)^n$ に対して、像 $g(V)$ が一点集合となることである。しかし残念ながら、分解 (1.4) については一般的な結果も反例も今のところ得られていない。その難しさは駆動ノイズ $\mathcal{F}_k^N$ の最大部分 σ -集合体 $\mathcal{G}_k$ を見つけることにありと思われる。

本研究では、多粒子の時間発展に注目する。 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $\{\mathbb{X}, N\}$ が *m-particle μ -evolution* であるとは、 $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 、 $\mathbb{X}_k = (X_k^1, \dots, X_k^m)$ が V^m -値確率過程、 $N = \{N_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が V のランダム写像列、すなわち、 $\Sigma = \text{Map}(V)$ に値をとる確率過程であり、 $\{\mathbb{X}, N\}$ は確率漸化式

$$X_k^i = N_k X_{k-1}^i \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \text{ and } i = 1, \dots, m \quad (1.7)$$

を満たし、かつ、各時刻 k で N_k は共通の分布 μ を持ち過去 $\mathcal{F}_{k-1}^{\mathbb{X}, N}$ と独立であることとする。簡単のために stationary μ -evolution のみ考える。粒子数 m を

$$m = m_\mu := \inf\{\#g(V) : g \in \bigcup_n S(\mu)^n\} \quad (1.8)$$

のように選ぶことで、情報系分解問題に完全な解答を与えたい:

$$\mathcal{F}_k^{\mathbb{X}} = \mathcal{G}_k \vee \mathcal{F}_{-\infty}^{\mathbb{X}} \vee \mathcal{H}_k \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

この目的のために、代数的半群論より **Rees 分解** を利用する。これは位相半群に値をとる確率変数の無限積の理論において基本的な役割を果たす。詳しくは [6] などを参照されたい。

2 An illustration of Yor's result

この節では Yor [13] の結果を簡単な例で説明しよう. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ は $\mathbb{C}$ の通常の積に関してコンパクト群となることに注意されたい. 確率測度

$$\mu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1} \quad (2.1)$$

を考える. $\{X, N\}$ を stationary μ -evolution とする. すなわち, X と N は $\mathbb{T}$ -値確率過程であり, $\mathbb{C}$ の通常の積の意味で

$$X_k = N_k X_{k-1} \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

を満たし, N_k は共通の分布 μ を持ち過去 $\mathcal{F}_{k-1}^{X,N}$ と独立であって, かつ X_k は同分布であるとする. ここで, $\mathbb{T}$ の各要素 $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ を $z = h(z)s(z)$ と分解する. 但し,

$$h(z) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \theta < \pi), \\ -1 & (\pi \leq \theta < 2\pi), \end{cases} \quad s(z) = \begin{cases} z & (0 \leq \theta < \pi), \\ -z & (\pi \leq \theta < 2\pi). \end{cases} \quad (2.3)$$

このとき, 以下が示される:

- (i) ある確率変数 ξ が存在して $\xi = s(X_k)$ $\mathbb{P}$ -a.s. を満たす.
- (ii) 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 確率変数 $U_k := h(X_k)$ は $\mathbb{T}$ の部分群 $H := \{1, -1\}$ 上で一様に分布し, $\mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X$ と独立である.

上の (ii) で一様性は独立性の証明において重要な役割を果たすことに注意されたい. 以上により, 分解

$$\mathcal{F}_k^X = \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \mathcal{H}_k \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

が得られる. 但し,

- (i) $\mathcal{F}_{-\infty}^X = \sigma(\xi)$ $\mathbb{P}$ -a.s.
- (ii) $\mathcal{H}_k = \sigma(U_k)$ for $k \in \mathbb{Z}$.

であり, 3つの σ -集合体 $\mathcal{F}_k^N$, $\mathcal{F}_{-\infty}^X$, $\mathcal{H}_k$ は独立となる.

3 Infinite convolutions

この節では, 第4節で主定理を述べるために, 無限 convolution 積の理論を簡単に説明する.

3.1 半群論

S を半群とする. すなわち, S は空でない集合であって結合的な積演算が定義されているとする. S の部分集合 A, B に対して, $AB = \{st : s \in A, t \in B\}$ と書く. S の空でない部分集合 I が $IS \cup SI \subset I$ を満たすとき, I を *ideal* と呼ぶ. S が proper ideal を持たないとき *simple* という. $e \in S$ が $e^2 = e$ を満たすとき *idempotent* と呼び, S の idempotent 全体を $E(S)$ と書く. $e \in E(S)$ が *primitive* であるとは, $[ex = xe = x \in E(S)]$ ならば $x = e$ が成り立つあることをいう. S が simple かつ primitive idempotent を持つとき *completely simple* という. S が completely simple ならば S の全ての idempotent は primitive であることに注意されたい.

定理 3.1 (Rees 分解). 半群 S が completely simple であると仮定する. $e \in E(S)$ を固定し, $L = Se, G = eSe, R = eS$ とおく. このとき, 以下が成り立つ:

- (i) G は群である.
- (ii) $S = E(L)GE(R)$.
- (iii) 積写像 $\psi : E(L) \times G \times E(R) \ni (x, g, y) \mapsto xgy \in S$ は全単射である.

分解写像 ϕ とその射影 $\phi_{E(L)}, \phi_G, \phi_{E(R)}$ を次式で導入する:

$$\psi^{-1}(z) =: \phi(z) =: (\phi_{E(L)}(z), \phi_G(z), \phi_{E(R)}(z)), \quad z \in S. \quad (3.1)$$

ここで, $RL = eSSe \subset eSe = G, (x_1g_1y_1)(x_2g_2y_2) = x_1(g_1y_1x_2g_2)y_2$ であるから, $z_1, z_2 \in S$ に対して, $\phi_{E(L)}(z_1z_2) = \phi_{E(L)}(z_1), \phi_{E(R)}(z_1z_2) = \phi_{E(R)}(z_2)$ であることに注意されたい.

半群 S に位相構造を入れよう. S が局所コンパクトであって可算基を持ち, 積写像 $(x, y) \mapsto xy$ が結合連続であるとき, *LCCB 半群* という. もしも, S が LCCB 半群でありかつ S の全ての元が逆元を持つならば, 逆元を取る演算 $x \mapsto x^{-1}$ も連続となり, 結果的に S は位相群となる (これは Ellis の定理として知られている).

定理 3.2 (Rees–Suschkewitsch 分解). LCCB 半群 S が completely simple であると仮定する. このとき, Rees 分解の積写像 $\psi : E(L) \times G \times E(R) \ni (x, g, y) \mapsto xgy \in S$ は同相写像である.

3.2 Convolution idempotents

S を LCCB 半群, $\mathcal{B}(S)$ を S の Borel 集合体, $\mathcal{P}(S)$ を S 上の確率測度の全体とする. このとき, $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ に対して *convolution 積* $\mu\nu \in \mathcal{P}(S)$ が

$$(\mu\nu)(B) = \iint 1_B(xy)\mu(dx)\nu(dy), \quad B \in \mathcal{B}(S) \quad (3.2)$$

によって定義され, $\mathcal{P}(S)$ に半群構造が与えられる (記号として $\mu * \nu$ ではなく $\mu\nu$ を用いることにする). すると convolution 積写像 $(\mu, \nu) \mapsto \mu\nu$ は弱収束の位相に関して結合連続である (しかし, S がコンパクトでない限り, 位相は局所コンパクトではない). $\mu \in \mathcal{P}(S)$ および $x \in S$ における Dirac mass δ_x の convolution 積を次で表す:

$$x\mu := \delta_x\mu \quad \text{and} \quad \mu x := \mu\delta_x. \quad (3.3)$$

また, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ の位相的台を $S(\mu)$ で表す:

$$S(\mu) = \{x \in S : \mu(U) > 0 \text{ for all open neighborhood of } x\}. \quad (3.4)$$

定理 3.3 (Convolution idempotents). $\mu \in \mathcal{P}(S)$ が convolution idempotent, すなわち, $\mu^2 = \mu$ を満たすと仮定する. このとき, 以下が成り立つ:

- (i) $K := S(\mu)$ は S の極小 ideal であり, completely simple である. したがって, $e \in E(K)$ を固定し, $L = Ke$, $G = eKe$, $R = eK$ とすると, Rees 分解 $S(\mu) = E(L)GE(R)$ が得られる.
- (ii) 群 G はコンパクトである. コンパクト群 G が誘導する Haar 確率測度を ω_G と表す.
- (iii) convolution 積による測度分解

$$\mu = \mu_{E(L)}\omega_G\mu_{E(R)} \quad (3.5)$$

が得られる. ここで, $\mu_{E(L)} = \mu \circ \phi_{E(L)}^{-1}$, $\mu_{E(R)} = \mu \circ \phi_{E(R)}^{-1}$ である. 言い換えると, もし Z が S -値確率変数であり, Z の分布が μ であるならば, 3つの確率変数 $\phi_{E(L)}(Z)$, $\phi_G(Z)$, $\phi_{E(R)}(Z)$ は独立であり, $\phi_G(Z)$ の分布は ω_G である.

定理 3.3 は, S がコンパクト群の場合, 1940 年の Kawada–Itô [7] にさかのぼる. その後, 1962 年に Pym [9] によって, 1963 年に Heble–Rosenblatt [4] によって独立に, S がコンパクト半群の場合に一般化された. 一般の場合は 1971 年に Mukherjee–Tserpes [8] によって証明された.

3.3 Infinite convolutions

S を LCCB 半群とし, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ を固定する.

定理 3.4. convolution 積の列 $\{\mu^n\}$ が tight であると仮定する. $\{\mu^n\}$ の部分列極限の全体を $\mathcal{K}$ とおく. このとき, 以下が成り立つ:

- (i) Cesàro 和 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu^k$ は $n \rightarrow \infty$ のときある convolution idempotent ν に収束する.
- (ii) $\mathcal{K}$ はコンパクト可換群である. $\mathcal{K}$ の単位元を η とおく.

(iii) $S(\nu)$ と $S(\eta)$ の Rees 分解及び ν と η の convolution 積による測度分解

$$S(\nu) = E(L)GE(R), \quad \nu = \eta_{E(L)}\omega_G\eta_{E(R)} \quad (3.6)$$

$$S(\eta) = E(L)HE(R), \quad \eta = \eta_{E(L)}\omega_H\eta_{E(R)} \quad (3.7)$$

が得られる. ここで, $e \in E(S(\eta))$, $L = S(\nu)e$, $R = eS(\nu)$, $G = eS(\nu)e$, $H = eS(\eta)e$ である. さらに, H は G の正規部分群である.

(iv) ある写像 $g(\cdot) : \mathcal{K} \rightarrow G$ が存在し,

$$g(\cdot) : \mathcal{K} \ni \lambda \mapsto g(\lambda)H \in G/H \quad (3.8)$$

は位相同型かつ群同型であり, 各 $\lambda \in \mathcal{K}$ に対して,

$$S(\lambda) = E(L)g(\lambda)HE(R), \quad \lambda = \eta_{E(L)}g(\lambda)\omega_H\eta_{E(R)} \quad (3.9)$$

が得られる ($\lambda = \eta$ でない限り, $S(\lambda)$ は S の部分半群ではなく, (3.9) は Rees 分解でもないことに注意されたい).

S が有限半群の場合, 定理 3.4 は以下を導く.

定理 3.5. S を有限半群と仮定し, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ とする. $\nu, \mathcal{K}, \eta$ などは定理 3.4 の通りとする. このとき, 以下が成り立つ:

(i) ある $p \in \mathbb{N}$ が存在し, $\mu^p \eta = \eta$ かつ $\mu^i \eta \neq \eta$, $i = 1, \dots, p-1$.

(ii) $\nu = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \mu^i \eta$.

(iii) $\mathcal{K} = \{\eta, \mu\eta, \dots, \mu^{p-1}\eta\}$.

(iv) ある $g_0 \in G$ が存在し, $g(\mu^i \eta) = g_0^i$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ かつ $g_0^p = e$. したがって, $G/H = \{H, g_0H, \dots, g_0^{p-1}H\}$,

$$\mu^i \eta = \eta_{E(L)}g_0^i\omega_H\eta_{E(R)} \quad \text{for } i = 0, \dots, p-1. \quad (3.10)$$

4 Resolution problem for multiparticle finite-state evolution

$V = \{1, 2, \dots, \#V\}$ を有限集合とし, Σ を V からそれ自身への写像の全体とする. $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)$ を固定する. μ の台は $S(\mu) = \{f \in \Sigma : \mu\{f\} > 0\}$ となる.

$m \in \mathbb{N}$ と $\Lambda \in \mathcal{P}(V^m)$ に対して, $\{\mathbb{X}, N\}$ が (Λ, μ) -evolution であるとは, $\{\mathbb{X}, N\}$ が m -particle μ -evolution であり, 各 k で $\mathbb{X}_k = (X_k^1, \dots, X_k^m)$ が分布 Λ を持つこととする. (Λ, μ) -evolution が存在することの必要十分条件は, Λ が μ -invariant, すなわち, $\mu\Lambda = \mu$ であることに注意されたい. また, 確率 1 で $\{X^1, \dots, X^m\}$ が distinct ならば, (Λ, μ) -evolution は *non-degenerate* であるという.

補題 4.1. $\mu \in \mathcal{P}(\Sigma)$, $\Lambda \in \mathcal{P}(V^m)$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(i) もし (Λ, μ) -evolution $\{\mathbb{X}, N\}$ が non-degenerate ならば,

$$m \leq m_\mu := \min\{\#g(V) : g \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S(\mu)^n\} \quad (4.1)$$

であり, かつ, 確率 1 で任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\{X_k^1, \dots, X_k^m\}$ は distinct である.

(ii) Non-degenerate (Λ, μ) -evolution が存在するための必要十分条件は, Λ が μ -invariant かつ $S(\Lambda) \subset V_\times^m := \{(v^1, \dots, v^m) : \text{distinct}\}$ なることである.

以下, $\Lambda \in \mathcal{P}(V_\times^{m_\mu})$ に対する (Λ, μ) -evolution のみを考える. このとき Λ は μ -invariant である. Theorem 3.5 を $S = \Sigma$ に対して用いると以下を得る.

命題 4.2. ある部分集合 $W \subset E(R)V_\times^{m_\mu}$ が存在し,

$$\Lambda = \int_W (\nu x) \Lambda_W(dx) \quad (4.2)$$

が成り立ち, かつ, W の任意の distinct な要素 x, x' に対して νx と $\nu x'$ は互いに素な台を持つ. ここで, $\Lambda_W = \eta_{E(R)} \Lambda$ とした. さらに, $\{Y, N\}$ を $(\nu e, \mu)$ -evolution とし, $\mathbb{Z}_W$ を分布 Λ_W を持つ W -値確率変数とし, $\{Y, N\}$ と $\mathbb{Z}_W$ は独立であるとする. このとき,

$$\mathbb{X}_k = Y_k \mathbb{Z}_W \quad \text{for } k \in \mathbb{Z} \quad (4.3)$$

とすると,

$$\sigma(\mathbb{X}_k) = \sigma(Y_k, \mathbb{Z}_W) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}\text{-a.s.} \quad (4.4)$$

が得られ, したがって,

$$\mathcal{F}_k^{\mathbb{X}} = \mathcal{F}_k^Y \vee \sigma(\mathbb{Z}_W) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}\text{-a.s.} \quad (4.5)$$

が得られる.

幾つか記号を準備する. 分解写像 $\phi = (\phi_{E(L)}, \phi_G, \phi_{E(R)})$ を簡単のために

$$\phi(f) = (\phi_{E(L)}(f), \phi_G(f), \phi_{E(R)}(f)) =: (f^{E(L)}, f^G, f^{E(R)}) \quad (4.6)$$

と書く. したがって, 分解は $f = f^{E(L)} f^G f^{E(R)}$ と表される.

$$C := \{e, g_0, \dots, g_0^{p-1}\} \quad (4.7)$$

とおく. $g \in G$ に対して, $gH = g^C H$ を満たす $g^C \in C$ が一意的に存在する. したがって, $g^H = (g^C)^{-1} g$ と書くと, 分解 $g = g^C g^H$ が得られる. 以上の記号と仮定の下, 主定理を述べる.

定理 4.3. 以下の分解が成り立つ:

$$\mathcal{F}_k^{\mathbf{X}} = \mathcal{G}_k \vee \mathcal{F}_{-\infty}^{\mathbf{X}} \vee \mathcal{H}_k \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}, \mathbb{P}\text{-a.s.} \quad (4.8)$$

ここで,

- (i) $\mathcal{G}_k := \sigma(Y_j^{E(L)}, Y_j^G(Y_{j-1}^G)^{-1} : j \leq k)$, かつ, $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}_k^N$ $\mathbb{P}$ -a.s.;
- (ii) $\mathcal{F}_{-\infty}^{\mathbf{X}} = \sigma(Y_C, \mathbb{Z}_W)$ $\mathbb{P}$ -a.s. ここで, Y_C は C -値確率変数であり, 全ての $k \in \mathbb{Z}$ に対して, 確率 1 で $Y_k^C = g_0^k Y_C$ を満たす;
- (iii) $\mathcal{H}_k := \sigma(Y_k^H)$, かつ, Y_k^H は分布 ω_H を持つ;
- (iv) 3つの σ -集合体 $\mathcal{F}_k^N$, $\mathcal{F}_{-\infty}^{\mathbf{X}}$, $\mathcal{H}_k$ は独立である.

参考文献

- [1] J. Akahori, C. Uenishi, and K. Yano. Stochastic equations on compact groups in discrete negative time. *Probab. Theory Related Fields*, 140(3-4):569–593, 2008.
- [2] L. Chaumont and M. Yor. *Exercises in probability*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012. A guided tour from measure theory to random processes, via conditioning.
- [3] B. S. Cirel'son. An example of a stochastic differential equation that has no strong solution. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 20(2):427–430, 1975.
- [4] M. Heble and M. Rosenblatt. Idempotent measures on a compact topological semi-group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14:177–184, 1963.
- [5] T. Hirayama and K. Yano. Extremal solutions for stochastic equations indexed by negative integers and taking values in compact groups. *Stochastic Process. Appl.*, 120(8):1404–1423, 2010.
- [6] G. Högnäs and A. Mukherjea. *Probability measures on semigroups*. Probability and its Applications (New York). Springer, New York, second edition, 2011. Convolution products, random walks, and random matrices.
- [7] Y. Kawada and K. Itô. On the probability distribution on a compact group. I. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3)*, 22:977–998, 1940.
- [8] A. Mukherjea and N. A. Tserpes. Idempotent measures on locally compact semi-groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29:143–150, 1971.

- [9] J. S. Pym. Idempotent measures on semigroups. *Pacific J. Math.*, 12:685–698, 1962.
- [10] R. van Handel. On the exchange of intersection and supremum of σ -fields in filtering theory. *Israel J. Math.*, 192(2):763–784, 2012.
- [11] K. Yano. Random walk in a finite directed graph subject to a road coloring. *J. Theoret. Probab.*, 26(1):259–283, 2013.
- [12] K. Yano and M. Yor. Around Tsirelson’s equation, or: The evolution process may not explain everything. *Probab. Surv.*, 12:1–12, 2015.
- [13] M. Yor. Tsirel’son’s equation in discrete time. *Probab. Theory Related Fields*, 91(2):135–152, 1992.