

非整数次フーリエ変換と接合関数を適用したジャンプ付き平方根過程に従う累積デフォルト強度分布での誤方向リスク・モデリング：クレジット・デフォルト・スワップに対する信用評価調整への応用*

PwC コンサルティング合同会社 安達 哲也

Tetsuya Adachi

PwC Consulting LLC

東京工業大学情報理工学院 末重 拓己

Takumi Sueshige

School of Computing, Tokyo Institute of Technology

日本銀行金融研究所 吉羽 要直

Toshinao Yoshiba

Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan

1 はじめに

2007～08年の金融危機では、取引相手（カウンターパーティ、以下、Cpty）の信用が悪化しているときに、デリバティブ取引のエクスポージャーが増大するという誤方向リスクが顕現化した。これを受けて Basel Committee on Banking Supervision [2017] では、デリバティブ取引における Cpty の信用評価調整（Credit Valuation Adjustment: CVA）の規制上のモデリングにおいて誤方向リスクを考慮することが求められている。

こうした背景から安達・末重・吉羽 [2016] では、誤方向リスクを捉えた CVA 評価のモデル化手法を概観した。安達・末重・吉羽 [2017a] では、そのうち、構造モデルとデフォルト強度モデル、さらに接合関数アプローチを組み合わせた 3 手法の実装方法を詳述し、モデル化手法の差異を考察した。安達・末重・吉羽 [2017b] では、安達・末重・吉羽 [2017a] で示した手法のうち、デフォルト強度モデルと正規接合関数を組み合わせてクレジット・デフォルト・スワップ（Credit Default Swap: CDS）の CVA を評価する際の技術的問題を論じた。具体的には、ジャンプ付き平方根過程に従うデフォルト強度の累積値の特性関数でのリーマン面の取り扱いなどについて実装上の論点を提示した。本稿では、安達・末重・吉羽 [2017b] と同様の設定で、接合関数を拡張したうえで、安達・末重・吉羽 [2017b] で論じなかった論点として、非整数次フーリエ変換による特性関数から分布関数への変換、近似の精緻化と評価などを中心に、接合関数を用いて CDS の CVA を評価する際の技術的問題を論じる。

*本稿は、RIMS 共同研究（公開型）「ファイナンスの数理解析とその応用（2017 年 11 月 13～15 日）」で報告した研究の途中段階の内容を纏めたものである。本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

2 CDS の CVA 評価

本節では、CDS の CVA をデフォルト強度モデルを用いてシミュレーションで評価する。この際、接合関数アプローチを組み合わせると、参照体の残存満期までの累積デフォルト強度の確率分布が必要になることを示したうえで、この確率分布の近似計算に関する工夫を提示する。実際の市場データとして、2007～08 年の金融危機時の欧米の CDS データを用いて Cpty と CDS の参照体の各デフォルト強度モデルをキャリブレートする。デフォルト強度モデルには、安達・末重・吉羽 [2017b] と同様に、Cpty と参照体の双方に同時にジャンプが生じうるジャンプ付き平方根過程を想定し、ジャンプ幅は指数分布に従って上昇するものを想定する。ただし、安達・末重・吉羽 [2017b] で想定した共変動のジャンプに加え、独立のジャンプも想定する。接合関数としては、安達・末重・吉羽 [2017b] で考察した正規接合関数に加え、 t 、クレイトン、生存グンベルの各接合関数も用いて評価を行い、接合関数の違いによる CVA の評価についても論じる。

2.1 CDS 契約の設定

A 銀行（プロテクションの買い手）と C 銀行（Cpty、プロテクションの売り手）の間の参照体 R に関する元本 100 百万ドルの CDS 契約を想定する。具体的には、Brigo and Capponi [2010] に倣い、C 銀行を Lehman Brothers、参照体 R を Royal Dutch Shell として、2008 年 5 月 1 日のデータで分析する。表 1 の CDS スプレッド sp_R (bp) の期間構造を用いて C 銀行、参照体 R それぞれのデフォルト強度モデルのパラメータをキャリブレートするほか、取引対象の CDS の年限に応じて表 1 の参照体 R の CDS スプレッドの CDS 契約を想定する。

表 1: CDS スプレッド (bp 表示)

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
C 銀行	203	188.5	166.75	152.25	145	136.3	130	125.8	122.6	120
参照体 R	24	24.6	26.4	28.5	30	32.1	33.6	35.1	36.3	37.2

2.2 シミュレーションによる片方向 CVA 評価

評価時点を t_0 、満期を t_m として、 t_j ($j = 1, \dots, m$) の離散グリッドに分けて、片方向の CVA を評価する。本稿では時間グリッドは 1 か月 $\Delta = t_j - t_{j-1} = 1/12$ とする。パス i での C 銀行のデフォルト時刻 $\tau_C^{(i)}$ が各時間間隔 $(t_{j-1}, t_j]$ 内に入っているか $N = 10$ 万のパスでのシミュレーションで評価し、デフォルト判定したシミュレーション・パスでかつ参照体のデフォルト時刻 $\tau_R^{(i)}$ が $\tau_C^{(i)}$ 以後となるパスについて集計することで、デフォルト時エクスポージャーを計算する。すなわ

ち、CVA を (2.1) 式のように評価する。

$$CVA(t_0) = \frac{LGD_C}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m DF(t_0, t_j) V^{NoCVA}(t_j)^+ 1_{\{\tau_C^{(i)} \in (t_{j-1}, t_j], \tau_R^{(i)} > \tau_C^{(i)}\}} \quad (2.1)$$

$$V^{NoCVA}(t_j)^+ = \max(V^{NoCVA}(t_j), 0)$$

ただし、 $V^{NoCVA}(t_j)$ は CVA を考慮しない場合の時点 t_j での CDS 価値であり、想定元本を 100 百万ドルとし、百万ドル単位で、

$$V^{NoCVA}(t_j) = 100 \sum_{l=j+1}^m \{LGD_R PD_{R,j}(t_{l-1}, t_l) - sp_R \Delta (1 - PD_{R,j}(t_j, t_{l-1}))\} \quad (2.2)$$

と評価される。 $PD_{R,j}(t_{l-1}, t_l)$ は、時点 t_j で評価した参照体 R の期間 $(t_{l-1}, t_l]$ でのデフォルト確率であり、求め方は後述する。 sp_R は取引対象の CDS のスプレッドであり、本稿では満期の年限に応じて表 1 のように与えられる。デフォルト時損失率は市場慣行に従い、 $LGD_C = LGD_R = 0.6$ で確定的とする。割引率 $DF(t_0, t_j)$ は、時点 t_0 (= 2008 年 5 月 1 日) の OIS (Overnight Index Swap) カーブについて、1 年以上の OIS は金利交換が四半期に一度として算出する。算出に用いた年限の OIS レートとその年限の割引率は表 2 のように与えられる。表 2 に与えられていない四半期ごとの金利については、表 2 の前後の OIS 金利を線形補間して算出している。

表 2: OIS 金利と割引率

期間	OIS 金利 (%)	割引率
1M	0.828	0.99931
2M	0.848	0.99859
3M	0.865	0.99784
4M	0.893	0.99703
5M	0.917	0.99619
6M	0.935	0.99535
9M	1.003	0.99253
1Y	1.077	0.98930
1.5Y	1.208	0.98205
2Y	1.334	0.97367
3Y	1.528	0.95514
4Y	1.672	0.93515
5Y	1.774	0.91482
7Y	1.925	0.87322
10Y	2.072	0.81136

2.3 デフォルト強度のモデル化と生存確率

Brigo and Chourdakis [2009] や Brigo and Capponi [2010] では、Cpty や参照体のデフォルト強度に平方根過程を想定している[†]。一方、Jarrow, Lando, and Yu [2005] では、信用スプレッドのリスク・プレミアムを確率的デフォルト強度モデルで捉える場合、拡散項では不十分でジャンプの要素が重要であることを指摘している。そうした認識を踏まえ、Brigo and El-Bachir [2010] では、ジャンプ付きの平方根過程を想定して CDS オプションの価格評価を提案している。

本稿では、Cpty、参照体のデフォルトについて、いずれもリスク中立の確率測度 $\mathbb{Q}$ のもとで (2.3) 式のようなジャンプ付き平方根過程に従う確率的なデフォルト強度 $\lambda_k(t)$ ($k = C, R$) を想定する。

$$\begin{aligned} d\lambda_k(t) &= \kappa_k(\theta_k - \lambda_k(t))dt + \sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}dW_k(t) + dJ(t) \\ J(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} z dN^\eta(z, s), \quad z_k \sim \text{Exp}(\zeta_k) \\ d\langle W_C, W_R \rangle(t) &= \rho_{C,R}^{jump} dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで、ジャンプ $J(t)$ の強度は η とし、各主体 $k = C, R$ のデフォルト強度 $\lambda_k(t)$ は同時に上昇ジャンプすると想定する。ジャンプの幅は各主体に応じて $\text{Exp}(\zeta_k)$ の指数分布に従うものとする。各ジャンプについては、(1) 共変動のジャンプ（すなわち、 $z_C = \zeta_C z, z_R = \zeta_R z, z \sim \text{Exp}(1)$ と表現できるもの）と、(2) 独立のジャンプの双方を想定する。比較のため、ジャンプを含まない平方根過程に従うデフォルト強度のモデル化として、(2.4) 式のモデル化も考察する。

$$\begin{aligned} d\lambda_k(t) &= \kappa_k(\theta_k - \lambda_k(t))dt + \sigma_k\sqrt{\lambda_k(t)}dW_k(t) \\ d\langle W_C, W_R \rangle(t) &= \rho_{C,R} dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

ジャンプを含む (2.3) 式のブラウン運動間の相関 $\rho_{C,R}^{jump}$ は、 $d\lambda_C(t)$ と $d\lambda_R(t)$ の相関が (2.4) 式のジャンプを含まない場合と一致するように調整する。すなわち、同時・共変動ジャンプの場合は (2.5) 式を満たすように、同時・独立ジャンプの場合は (2.6) 式を満たすように $\rho_{C,R}^{jump}$ を設定する。

$$\rho_{C,R}^{jump} = \frac{\rho_{C,R}\sqrt{\sigma_C^2\theta_C+2\eta\zeta_C^2}\sqrt{\sigma_R^2\theta_R+2\eta\zeta_R^2}-2\eta\zeta_C\zeta_R}{\sigma_C\sigma_R\sqrt{\theta_C\theta_R}} \quad (2.5)$$

$$\rho_{C,R}^{jump} = \frac{\rho_{C,R}\sqrt{\sigma_C^2\theta_C+2\eta\zeta_C^2}\sqrt{\sigma_R^2\theta_R+2\eta\zeta_R^2}-\eta\zeta_C\zeta_R}{\sigma_C\sigma_R\sqrt{\theta_C\theta_R}} \quad (2.6)$$

デフォルト強度について、平方根過程や（指数分布に従う上昇方向の）ジャンプ付き平方根過程を想定する利点は、デフォルト強度の非負性が担保されるとともに、生存確率が解析的に表現できるという点である。Cpty と参照体 ($k = C, R$) の累積デフォルト強度 $\Lambda_k(t)$ を

$$\Lambda_k(t) \equiv \int_{t_0}^t \lambda_k(s) ds \quad (2.7)$$

[†]平方根過程は、Cox, Ingersoll, and Ross [1985] で短期金利の確率過程として採用されたことから、CIR 過程とも呼ばれる。

と定義すると、生存確率 $Q(\tau_k > t)$ は、 $E^Q[\exp(-\Lambda_k(t))]$ という期待値で表現される。平方根過程や指数ジャンプ付き平方根過程は、アフィン・ジャンプ拡散過程の一種であり、この期待値（生存確率）は、時点 t_0 での主体 k のデフォルト強度 $\lambda_k(0)$ を用いて、(2.8) 式のように指数アフィン形式で解析的に表現される。

$$Q(\tau_k > t) = \exp(\bar{\alpha}(t) - \bar{B}(t)\lambda_k(0)) \quad (2.8)$$

このように解析的に表される生存確率を用いれば、各時点 t までの累積デフォルト確率は $1 -$ 生存確率で求められ、時点 t_{l-1} までの生存確率と時点 t_l までの生存確率の差を求めれば、各主体 k の期間 $(t_{l-1}, t_l]$ でのデフォルト確率が求められることになる。

2.4 キャリブレーション

時点 t_0 で市場で観測される CDS スプレッドは、(2.2) 式で示される CDS の価値について、時点 t_0 で参照体 R、C 銀行の双方に関してゼロとなるような CDS スプレッドであると考えられる。一方、(2.2) 式に含まれる期間デフォルト確率は、前述のとおり、デフォルト強度のパラメータを与えれば解析的に計算できる。このことから、表 1 の各主体 $k = C, R$ の CDS スプレッドの期間構造から、各主体 k のデフォルト強度のパラメータをキャリブレートできる。具体的には、1Y から順に時間に対して線形のデフォルト強度を仮定し、インプライされる生存確率を求めていく。各年限でインプライされた生存確率とモデルから導出される生存確率の比が 1 に近づくように最適化し、モデルのパラメータをキャリブレートする。各年限で生じた誤差については、デフォルト時エクスポージャー（CDS 価値）に含まれる期間デフォルト確率の計算において、確定的なシフト項として考慮する。

ジャンプを含まない (2.4) 式のパラメータは、表 3 のように与えられる。

表 3: 平方根過程に従うデフォルト強度のキャリブレーション

k	κ_k	θ_k	σ_k	$\lambda_k(0)$
C 銀行	0.5667	0.0155	0.1327	0.0394
参照体 R	0.4884	0.0068	0.0100	0.0021

同時ジャンプを含む (2.3) 式のパラメータは、ジャンプのパラメータについては、共変動、独立のそれぞれで (2.5) や (2.6) 式での調整により $\rho_{C,R}^{jump}$ が $(-1, 1)$ の値に調整されるように先験的に設定する。具体的には、同時・共変動ジャンプについては $\zeta_k = 0.05, \eta = 0.01$ 、同時・独立ジャンプについては $\zeta_k = 0.05, \eta = 0.02$ を前提として、残りのパラメータをキャリブレートする。その結果は、表 4、5 のように与えられる。

表 4: 同時・共変動ジャンプを含むデフォルト強度のキャリブレーション

k	κ_k	θ_k	σ_k	$\lambda_k(0)$	ζ_k	η
C 銀行	0.5681	0.0147	0.1293	0.0394	0.05	0.01
参照体 R	0.4867	0.0058	0.0100	0.0021		

表 5: 同時・独立ジャンプを含むデフォルト強度のキャリブレーション

k	κ_k	θ_k	σ_k	$\lambda_k(0)$	ζ_k	η
C 銀行	0.5694	0.0139	0.1257	0.0394	0.05	0.02
参照体 R	0.4829	0.0049	0.0100	0.0021		

2.5 接合関数アプローチ

(2.7) 式の累積デフォルト強度を用いて、Cpty のデフォルト時までの Cpty、参照体の累積デフォルト確率 U_C 、 $U_{R|C}$ を (2.9) 式で定義する。

$$U_C = 1 - \exp \{-\Lambda_C(\tau_C)\}, \quad U_{R|C} = 1 - \exp \{-\Lambda_R(\tau_C)\} \tag{2.9}$$

接合関数アプローチでは、Cpty デフォルト直前の Cpty の累積デフォルト確率 U_C と Cpty デフォルト後の（満期までのある時点の）参照体の累積デフォルト確率 U_R について、(2.10) 式のように接合関数 $C(u_C, u_R)$ で依存性を持たせる。

$$\mathbb{Q}(U_C < u_C, U_R < u_R) = C(u_C, u_R) \tag{2.10}$$

Cpty が時点 $\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]$ でデフォルトしたという条件での参照体の生存確率は、(2.11) 式のように Cpty がデフォルトした後の参照体の累積デフォルト強度についての分布関数 $F_{\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)}(\cdot)$ と参照体の累積デフォルト確率に関する条件付き接合関数 $C_{R|C}(u_R; U_C)$ を用いて求められる。

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \mathbb{Q}(\tau_R > t | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_R > \tau_C\}} \int_{U_{R|C}}^1 F_{\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)} \left(\log \frac{1 - U_{R|C}}{1 - u_R} \right) dC_{R|C}(u_R; U_C) \end{aligned} \tag{2.11}$$

ここで、条件付き接合関数 $C_{R|C}(u_R; U_C)$ は (2.12) 式のように与えられる。

$$C_{R|C}(u_R; U_C) \equiv \frac{\frac{\partial C(u_C, u_R)}{\partial u_C} \Big|_{u_C=U_C} - \frac{\partial C(u_C, U_{R|C})}{\partial u_C} \Big|_{u_C=U_C}}{1 - \frac{\partial C(u_C, U_{R|C})}{\partial u_C} \Big|_{u_C=U_C}} \tag{2.12}$$

Cpty が時点 $\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]$ でデフォルトしたパスについて、参照体の残存満期までの生存確率を求めれば、デフォルト時エクスポージャー $V^{NoCVA}(t_j)^+$ を算出できる。

Brigo and Chourdakis [2009] や Brigo and Capponi [2010] に倣い、接合関数として $\rho = \rho_{C,R}^{copula}$ をパラメータとする正規接合関数 $C^G(u_C, u_R; \rho)$ を用いる場合、(2.12) 式の条件付き接合関数に含まれる接合関数の偏微分は、(2.13) 式で与えられる。

$$\frac{\partial C^G(u_C, u_R; \rho)}{\partial u_C} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_R) - \rho \Phi^{-1}(u_C)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \quad (2.13)$$

ただし、 $\Phi(\cdot)$ は 1 変量の標準正規分布の累積分布関数である。正規接合関数は、 $\lim_{u \rightarrow 0} C(u, u)/u$ で定義される下側裾依存係数が 0 に収束する。ここでのアプローチのように累積デフォルト確率に接合関数を当てはめた場合、この点は、稀に生じ得るデフォルトが独立に発生し、同時に生じることがほとんどないことを意味し、金融危機のような状況を捉えていないとの批判がある。そこで、下側裾依存度が高い接合関数として、 t 接合関数 (Student- t 接合関数)、クレイトン接合関数、生存グンベル接合関数を考える。これらの接合関数は正規接合関数と同様、パラメータで形状が決まるパラメトリックな接合関数であり、そのパラメータについては、正規接合関数の ρ を基準として、順位相関の 1 つであるケンドールのタウが一致するように調整する。各接合関数のパラメータ、順位相関、下側裾依存係数を纏めると、表 6 のようになる。

表 6: 各接合関数の順位相関 (ケンドールのタウ) と下側裾依存係数

接合関数	パラメータ	順位相関	下側裾依存係数
正規	ρ	$(2/\pi) \arcsin \rho$	0
Student- t	ρ, ν	$(2/\pi) \arcsin \rho$	$2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(1-\rho)(\nu+1)}{1+\rho}} \right)$
クレイトン	α	$\alpha/(\alpha+2)$	$2^{-1/\alpha}$
生存グンベル	γ	$1 - 1/\gamma$	$2 - 2^{1/\gamma}$

t 接合関数は、国際金融危機を受けて、金融機関の与信ポートフォリオリスク把握や統合リスク把握で用いられている接合関数である。接合関数として $\rho = \rho_{C,R}^{copula}$ をパラメータとする自由度 ν の t 接合関数 $C^{t(\nu)}(u_C, u_R; \rho)$ を用いる場合、(2.12) 式の条件付き接合関数に含まれる接合関数の偏微分は、(2.14) 式で与えられる。

$$\frac{\partial C^{t(\nu)}(u_C, u_R; \rho)}{\partial u_C} = t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + t_{\nu+1}^{-1}(u_R)^2}} \left\{ \frac{t_{\nu+1}^{-1}(u_R) - \rho t_{\nu+1}^{-1}(u_C)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right\} \right) \quad (2.14)$$

ただし、 $t_{\nu}(\cdot)$ は自由度 ν の t 分布の累積分布関数である。

Lee and Capriotti [2015] では、下側裾依存性を考慮して CVA 評価を行う際にクレイトン接合関数を利用している。接合関数として α をパラメータとするクレイトン接合関数 $C^C(u_C, u_R; \alpha)$ を用いる場合、(2.12) 式の条件付き接合関数に含まれる接合関数の偏微分は、(2.15) 式で与えら

れる。

$$\frac{\partial C_{C,R}^C(u_C, u_R; \alpha)}{\partial u_C} = u_C^{-\alpha-1} (u_C^{-\alpha} + u_R^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha-1} \quad (2.15)$$

正規接合関数や t 接合関数と順位相関を揃えるため、パラメータ α は正規接合関数や t 接合関数の ρ から (2.16) 式で設定する。

$$\alpha = \frac{4 \arcsin \rho}{\pi - 2 \arcsin \rho} \quad (2.16)$$

扱いやすい接合関数としては、アルキメデス型接合関数のクラスが知られている。このクラスに属する接合関数で唯一、極値接合関数の性質を持つものがグンベル接合関数である。極値は極めて大きい値として定義されるため、グンベル接合関数は上側で強い裾依存性を持つ。ここでは下側で強い裾依存性を考えたいため、上下を反転させた生存グンベル接合関数を考える。接合関数として γ をパラメータとする生存グンベル接合関数 $C^{SGu}(u_C, u_R; \gamma)$ を用いる場合、(2.12) 式の条件付き接合関数に含まれる接合関数の偏微分は、(2.17) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^{SGu}(u_C, u_R; \gamma)}{\partial u_C} &= 1 - \exp \left[- \{ (-\log(1 - u_C))^\gamma + (-\log(1 - u_R))^\gamma \}^{1/\gamma} \right] \\ &\times \{ (-\log(1 - u_C))^\gamma + (-\log(1 - u_R))^\gamma \}^{1/\gamma-1} \frac{(-\log(1 - u_C))^{\gamma-1}}{1 - u_C} \end{aligned} \quad (2.17)$$

正規接合関数や t 接合関数と順位相関を揃えるため、パラメータ γ は正規接合関数や t 接合関数の ρ から (2.18) 式で設定する。

$$\gamma = \frac{\pi}{\pi - 2 \arcsin \rho} \quad (2.18)$$

2.6 参照体の残存満期までの生存確率

Cpty のデフォルト時 τ_C に残存している CDS の価値 $V^{NoCVA}(\tau_C)$ について、 τ_C 直前の Cpty の累積デフォルト確率と τ_C 以後の参照体の残存満期までの累積デフォルト確率に接合関数で依存関係を持たせて評価するには、厳密には $\mathbb{Q}(\tau_R > t | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j])$ を $t = t_{j+1}, \dots, t_m$ を接合関数を考慮して評価する必要がある。しかし、 $t = t_{j+1}, \dots, t_m$ のすべての時点について接合関数を考慮して精緻に評価すると、時間がかかってしまう (Cpty がデフォルトした 1 つのパスについて 40 分程度)。そこで本稿では、Li [2000] が CDO (Collateralized Debt Obligation) の評価で満期でのデフォルトのみを接合関数で考慮したことに倣い、 $\mathbb{Q}(\tau_R > t_m | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j])$ は接合関数を考慮して精緻に求め、 $t_l, l = j+1, \dots, m-1$ については、解析的に評価できる生存関数 $\mathbb{Q}(\tau_R > t_l | \lambda_R(t_j))$ を用いて、近似的に評価する。近似手法とその精度については、3.2 節で議論する。

2.7 強度モデルのみでの CVA 比較

接合関数を組み合わせずに、Cpty のデフォルト後の参照体 R のデフォルトは Cpty に依らず独立に決まると想定し、デフォルト強度モデルのみで以下の 5 つの設定で比較を行う。表 1 の満期

1～10 年の参照体 R の CDS に対する CVA を算出した結果は、図 1 のように与えられる。ブラウン運動間の相関は CVA にほとんど寄与しない一方、同時ジャンプは CVA の上昇に大きく寄与し、長期ほど寄与することがわかる。また、同時・独立ジャンプは同時・共変動ジャンプよりも強度変動の局所相関は低く（ $0.3 < 0.4$ ）設定されているものの、頻度 η が 0.02 と同時・共変動ジャンプの頻度 $\eta = 0.01$ よりも大きいこともあって、CVA は同時・共変動ジャンプよりも大きく算出されている。

1. 相関なし：誤方向リスクを考慮しないモデルで、具体的には (2.4) 式で与えられるジャンプを含まないモデルでかつ $\rho_{C,R} = 0$ として、 λ_C と λ_R に依存性を想定しない。
2. ジャンプなし・相関 0.3：(2.4) 式で与えられるジャンプを含まないモデルでブラウン運動間の相関を $\rho_{C,R} = 0.3$ として誤方向リスクを考慮する。
3. 同時・独立ジャンプ：(2.3) 式で与えられる同時ジャンプでジャンプ幅は独立として誤方向リスクを考慮したモデルで、ブラウン運動間の相関については (2.6) 式に $\rho_{C,R} = 0.3$ を代入して得た $\rho_{C,R}^{jump}$ を設定してモデル化する。
4. ジャンプなし・相関 0.4：(2.4) 式で与えられるジャンプを含まないモデルでブラウン運動間の相関を $\rho_{C,R} = 0.4$ として誤方向リスクを考慮する。
5. 同時・独立ジャンプ：(2.3) 式で与えられる同時ジャンプでジャンプ幅は共変動として誤方向リスクを考慮したモデルで、ブラウン運動間の相関については (2.5) 式に $\rho_{C,R} = 0.4$ を代入して得た $\rho_{C,R}^{jump}$ を設定してモデル化する。

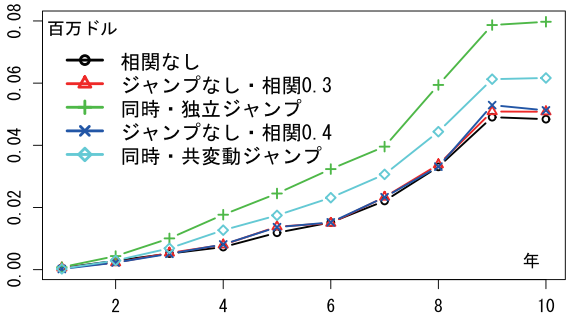


図 1: 強度モデルのみでの CVA

2.8 接合関数の違いと CVA

デフォルト強度モデルについては、同時・独立ジャンプを含む（局所的な強度変動の相関が 0.3）モデルに絞ったうえで、2.5 節で導入した 4 つの接合関数の違いによって、CVA の期間構造にどの

ような差が生じるかを考察する。比較に際しては、接合関数の相関パラメータは、順位相関（ケンドールのタウ）が一致するように調整して正規接合関数の相関パラメータ $\rho_{C,R}^{copula}$ で比較を行う。 $\rho_{C,R}^{copula}$ について低相関の場合と高相関の場合で CVA の期間構造を比較すると図 2 のようになる。低相関では、 $t > \text{生存グンベル} > \text{クレイトン} > \text{正規}$ の順、高相関では、 $\text{クレイトン} > \text{生存グンベル} > t > \text{正規}$ の順の CVA が算出されており、相関 $\rho_{C,R}^{copula}$ に応じて各接合関数で得られる CVA に違いが生じている。ただし、いずれも正規接合関数の CVA は低めであることがわかる。

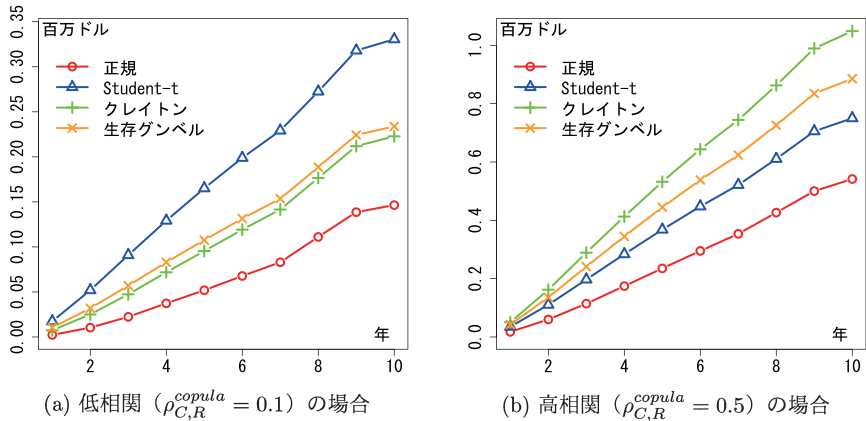
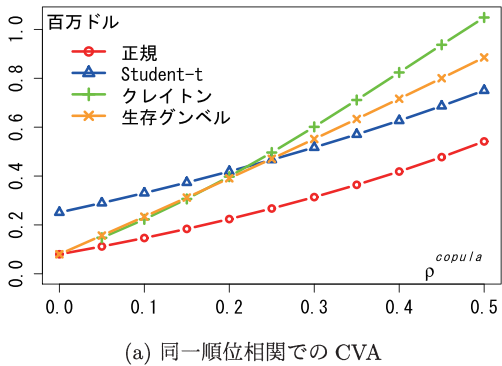


図 2: CVA 期間構造の接合関数間比較

図 3 では、さらに CDS について 10 年の CDS に絞り、正規接合関数や t 接合関数の $\rho_{C,R}^{copula}$ と同一の順位相関を持つクレイトン接合関数、生存グンベル接合関数を用いて計算した CVA を比較している。



接合関数	切片	$\rho_{C,R}^{copula}$
正規	0.055	0.916
t ($\nu = 3$)	0.232	0.993
クレイトン	0.011	2.030
生存グンベル	0.073	1.610

(b) $\rho_{C,R}^{copula}$ の CVA への線形回帰結果

図 3: 同一の順位相関（ケンドールのタウ）を持つ接合関数での CVA 比較

(2.16)、(2.18) 式より、相関 $\rho_{C,R}^{copula} = \rho \rightarrow 0$ で、 $\alpha \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 1$ となるため、このとき、正規、クレイトン、生存グンベル、クレイトンの各接合関数の下側裾依存係数 $\lim_{u \rightarrow 0} C(u, u)/u$ は 0 に

なる（表 6 を参照）。一方、 t 接合関数は、 $\rho \rightarrow 0$ で下側裾依存係数が $2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1})$ となって依存性が残ることがわかる。したがって、 $\rho_{C,R}^{copula} = \rho \rightarrow 0$ での CVA は正規、クレイトン、生存グンベル、クレイトンで同じ値に近づく一方で、 t 接合関数での CVA はそれよりも大きな値に近づいていると解釈できる。

3 数値計算上の論点

3.1 特性関数と累積分布関数

接合関数アプローチでは、Cpty のデフォルト時点 τ_C での Cpty の累積デフォルト確率（1- 生存確率）のほか、 $s = \tau_C$ 以後の参照体 R の累積強度 $\Lambda_R(s, t)$ に関する確率分布（累積分布関数）が必要となる。

主体 $k = C, R$ の生存確率 $\mathbb{Q}(\tau_k > t | \tau_k > s)$ は、累積デフォルト強度 $\Lambda_k(s, t) \equiv \int_s^t \lambda_k(y) dy$ を用いて、 $E_s^{\mathbb{Q}}[\exp(-\Lambda_k(s, t))]$ と表現され、(2.8) 式と同様に指数アフィン形式で解析的に評価できる。参照体 R の累積強度 $\Lambda_R(s, t)$ の特性関数 $\phi_{s,t}(u) \equiv E_s^{\mathbb{Q}}[\exp(iu\Lambda_R(s, t))]$ も生存確率と同様に (3.1) 式のように指数アフィン形式で解析的に表現される（Duffie, Pan, and Singleton [2000]）。

$$\phi_{s,t}(u) = \exp(\alpha_J(s, t) + \alpha_D(s, t) + iuB(s, t)\lambda_R(s)) \quad (3.1)$$

ただし、安達・末重・吉羽 [2017b] で示されたように、特性関数には無限多価関数の $\log$ 関数を含むため、リーマン面の層を特定して計算する必要がある。

Cpty のデフォルト時点 τ_C までの累積デフォルト確率については 2.3 節のとおり解析的に評価可能である。 $s = \tau_C$ 以後の参照体 R の累積強度 $\Lambda_R(s, t)$ に関する確率分布については、前段のように特性関数が定まれば、逆フーリエ変換で密度関数を導くことができ、密度関数を累積すれば、累積分布関数を導くことができる。

特性関数から密度関数への変換には、高速フーリエ変換の 1 つである Bailey and Swarztrauber [1991] の非整数次フーリエ変換（fractional fast Fourier transform : FRFT）を用いると効率的である。FRFT では、グリッド数 L 、グリッド幅 χ と波数 ω に関する $\omega\chi = 2\pi/L$ という制約がないためである。昇順のベクトル $\mathbf{u}$ に対し、特性関数ベクトル $\phi_{s,t}(\mathbf{u})$ をリーマン面を考慮して求め、FRFT を適用すると、 Δx のグリッドのベクトル $\mathbf{x}$ に対する密度関数ベクトル $f_{s,t}(\mathbf{x})$ が得られる。

$x = x_l$ での分布関数の値は、(3.2) 式のように密度関数ベクトルを累積することで得られる。

$$F_{s,t}(x_l) = \sum_{x=x_1}^{x_l} f_{s,t}(x) \Delta x \quad (3.2)$$

$s = \tau_C$ とすれば、ジャンプ付き平方根過程の累積値に関する累積分布関数 $F_{\Lambda_R(t)-\Lambda_R(\tau_C)}(x)$ が得られる。

通常のフーリエ変換では、累積強度を表す x は時間領域であり、周波数領域の変数は u で表される。FRFT の適用に当たっては、 x の最大値 $x_{\max}$ 、 u の最大値 $u_{\max}$ 、グリッド数 L を設定する必要

がある。 $u_{\max}$ については、 $u_{\max} = \min \{u \mid |\phi_{s,t}(u)| < 10^{-6}\}$ と設定する。 $x_{\max}$ については、生存確率で考えると、 $\exp(-15) \cong 10^{-6}$ となることから、 $x_{\max} = 15$ と設定する。グリッド数 L については、 $L = 2^{l_{\sup}}$ とし、 $l_{\sup} = \min \{l \in \mathbb{Z}^+ : 2^l > 2u_{\max}\}$ と設定し、グリッド幅 $\chi = x_{\max}/L$ と波数 $\omega = u_{\max}/L$ を設定する。Cpty のデフォルト時点でのデフォルト強度が極端に小さいとき、短い満期についての計算では、グリッド数 L が膨大になる。これにより計算負荷が重くなり、必ずしも「準解析的」といえるほど高速な計算にはならないことがある。そこで、3.2 節では、参照体の残存満期 $t_m - \tau_C$ については接合関数を考慮して精緻に求め、それまでのグリッド t_l , $l = j+1, \dots, m-1$ については、解析的に評価できる生存関数 $Q(\tau_R > t_l | \lambda_R(t_j))$ を用いて、近似的に評価する手法を示す。

ここでは、FRFT の精度評価について考察する。(2.8) 式で解析的に評価可能な生存確率は、独立接合関数を適用した場合の満期での生存確率となる。これを用いれば、FRFT の精度を評価することができる。(2.11) 式右辺の積分について、グリッド幅 χ を用いて $\log \frac{1-U_{R|C}}{1-u_R} = n\chi$ と離散化し、独立接合関数を想定すると、 $C_{R|C}(u_R; U_C) = \frac{u_R - U_{R|C}}{1-u_R} = e^{n\chi} - 1$ となる。したがって、(2.11) 式右辺の積分で示される生存確率は

$$\int_{U_{R|C}}^1 F_{\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)} \left(\log \frac{1 - U_{R|C}}{1 - u_R} \right) dC_{R|C}(u_R; U_C) \cong \sum_{n=1}^L F_{\Lambda_R(t) - \Lambda_R(\tau_C)}(n\chi) e^{n\chi} (e^\chi - 1) \quad (3.3)$$

で計算できる。(3.3) 式各グリッド $n\chi$ について、 $t - s = n\chi$ として、(2.8) 式の解析的な生存確率と比較すれば、FRFT の精度を評価することができる。ここでは特に、デフォルト強度について同時・独立ジャンプを含むものを想定し、10 万パスでのシミュレーションで評価を行う。ある 1 回のシミュレーションでは 10 万パスのうち、 $\tau_R^{(i)} > \tau_C^{(i)}$ となるパス i は 19,281 回生じた。残存満期の生存確率、すなわち、 $\tau_C \in (t_{j-1}, t_j]$ として、 $t - s = t_m - t_j = n\chi$ の生存確率について、(3.3) 式の評価を (2.8) 式の解析的な評価と比較する。その差の絶対値（常用対数値）をヒストグラムにすると、図 4 のとおり 10^{-5} 程度の精度となった。

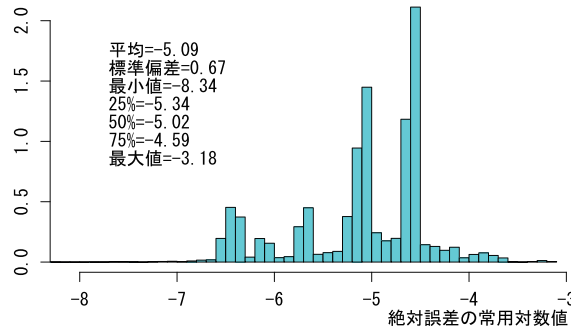


図 4: FRFT による生存確率の絶対誤差のヒストグラム

3.2 参照体の残存満期までの生存確率の近似手法とその精度

2.6節で記述したように、Cpty がデフォルトしたパスについて、参照体の残存満期のすべてのグリッドについて生存確率を接合関数を考慮して求めるのではなく、残存満期のみの生存確率、すなわち、 $Q(\tau_R > t_m | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j])$ については、接合関数を考慮して精緻に求め、 $t_l, l = j+1, \dots, m-1$ については、(2.8) 式の解析的な生存確率 $Q(\tau_R > t_l | \lambda_R(t_j))$ を用いて (3.4) 式のように案分する。

$$Q(\tau_R > t_l | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \cong \exp \left[\log Q(\tau_R > t_m | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \frac{\log Q(\tau_R > t_l | \lambda_R(t_j))}{\log Q(\tau_R > t_m | \lambda_R(t_j))} \right] \quad (3.4)$$

これは、生存確率 $Q(\tau_R > t)$ が平均デフォルト強度 $\bar{\lambda}$ を用いて $\exp(-\bar{\lambda}t)$ と表せることから、平均デフォルト強度で案分する考え方である。安達・末重・吉羽 [2017b] では、(3.5) 式のように生存確率そのものを案分した近似になっており、精度が悪かった。

$$Q(\tau_R > t_l | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \cong Q(\tau_R > t_m | \tau_C \in (t_{j-1}, t_j]) \frac{Q(\tau_R > t_l | \lambda_R(t_j))}{Q(\tau_R > t_m | \lambda_R(t_j))} \quad (3.5)$$

残存満期の直前の時間グリッドまでを (3.4) 式のように案分する考え方の精度を評価する。(3.4) 式の近似を用いて評価した残存価値 $V_{CDS}^{Approx}(t_j)$ について、近似を行わず残存満期のすべての時間グリッドについて生存確率を接合関数を考慮して計算した残存価値 $V_{CDS}^{BF}(t_j)$ と比較した精度を 2 万パスの $\{V_{CDS}^{Approx}(t_j) - V_{CDS}^{BF}(t_j)\} / V_{CDS}^{BF}(t_j)$ で計測する。2 万パスで Cpty がデフォルトしたパスの数は 3,872 と少ないが、近似を行わない場合、デフォルトしたパス当たりで 36 分程度の計算時間を要し、2 万パスでの総計算時間は 2,295 分、すなわち、38.3 時間程要したため、10 万パスでの計算を断念した。これに対し、近似を行った場合の計算時間は 24.7 分であり、近似による計算速度の向上は、総計算時間の比率では約 93 倍、デフォルトしたパスでの比率の平均では約 770 倍と評価できる。精度については、表 7 のとおり、[1%, 99%] 区間で 6% 以内となった。この精度で十分かどうかは状況によると考えられるが、安達・末重・吉羽 [2017b] で採用した (3.5) 式の近似法と同程度の時間でより高い精度が得られている。

4 おわりに

デフォルト強度の接合関数アプローチは、Cpty デフォルト後の累積デフォルト確率とエクスポージャー（参照体の累積デフォルト確率）の相互依存関係を表現するものであり、これにより Cpty デフォルト直前の累積デフォルト確率の高まりと残存満期での参照体のデフォルト確率の高まりという誤方向リスクを強く表現することができる。接合関数を用いると、強い依存関係を表現できるものの、正規接合関数を用いた場合はやや弱めの CVA となる。 t 接合関数を用いた場合は、相関パラメータ $\rho_{C,R}^{copula} = 0$ としても、裾依存係数はゼロにならず、一定の CVA が算出される。 $\rho_{C,R}^{copula}$ に対する CVA の上昇率は正規接合関数と同程度となった。クレイトン、生存グンベル接合関数では、 $\rho_{C,R}^{copula}$ の増加に伴い、CVA は大きく上昇する。上昇率は、正規 $< t <$ 生存グンベル $<$ クレイトンの順となった。

表 7: 残存満期の近似に伴う参照資産価値の精度

	正規	Student- <i>t</i>	クレイトン	生存グンベル
平均	-0.46%	-0.62%	-0.79%	-0.79%
標準偏差	0.58%pt	1.55%pt	0.96%pt	2.48%pt
最小値	-13.19%	-29.67%	-8.14%	-136.94%
1%	-1.60%	-5.63%	-3.38%	-5.31%
10%	-1.25%	-2.41%	-2.19%	-2.33%
25%	-0.92%	-1.11%	-1.47%	-1.18%
50%	-0.30%	-0.08%	-0.45%	-0.24%
75%	0.00%	0.12%	0.00%	0.01%
90%	0.09%	0.31%	0.08%	0.12%
99%	0.26%	1.93%	0.27%	0.28%
最大値	7.03%	24.97%	8.95%	1.24%

数値計算上の論点として、ジャンプ付き平方根過程に従う強度の累積値に関する特性関数は、特に短期の期間について、減衰が遅い。したがって、FRFT で密度関数に変換する際に、精度を保持しようとすると、必要なグリッド数 L が爆発し、計算負荷が極めて重くなることが示された。すなわち、フーリエ変換を用いた評価はしばしば「準解析的」と表現されるものの、そうとはいえない状況が生じている。こうした問題は、Heston モデルを用いたデリバティブ・プライシングなど、フーリエ変換を用いた他の評価でも生じないか、考察を進める必要があろう。また、残存満期までのすべてのグリッドについて接合関数を考慮するのは、極めて非効率であることを確認した。残存満期のみ接合関数を考慮し、残りのグリッドについては平均強度を案分するように近似すると、近似精度も良く、大幅な計算時間圧縮に繋がることが示された。

参考文献

安達哲也・末重拓己・吉羽要直、「CVA における誤方向リスク・モデルの潮流」、『金融研究』、第 35 巻第 3 号、2016 年、35～88 頁

安達哲也・末重拓己・吉羽要直、「CVA における誤方向リスク・モデル：実装と比較」、『金融研究』、第 36 巻第 1 号、2017a 年、115～161 頁

安達哲也・末重拓己・吉羽要直、「ジャンプ付き平方根過程に従う強度の累積値に関する分布関数計算と CDS の CVA への応用」、『京都大学数理解析研究所講究録 No.2029 「Financial Modeling and Analysis ファイナンスの数理解析とその応用 2016/11/28-2016/11/30」』、2017b 年

- Bailey, David H., and Paul N. Swartztrauber, "The fractional Fourier transform and applications," *SIAM Review*, **33**(3), 1991, pp.389–404.
- Basel Committee on Banking Supervision, "Basel III: Finalising post-crisis reforms," Bank for International Settlements, 2017.
- Brigo, Damiano, and Agostino Capponi, "Bilateral counterparty risk with application to CDSs," *Risk*, **23**(3), 2010, pp.85–90.
- Brigo, Damiano, and Kyriakos Chourdakis, "Counterparty Risk for Credit Default Swaps: Impact of Spread Volatility and Default Correlation," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **12**(7), 2009, pp.1007–1026.
- Brigo, Damiano, and Naoufel El-Bachir, "An Exact Formula for Default Swaptions' Pricing in the SSRJD Stochastic Intensity Model," *Mathematical Finance*, **20**(3), 2010, pp.365–382.
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**(2), 1985, pp.385–407.
- Duffie, Darrell, Jun Pan, and Kenneth J. Singleton, "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions," *Econometrica*, **68**(6), 2000, pp.1343–1376.
- Jarrow, Robert A., David Lando, and Fan Yu, "Default Risk and Diversification: Theory and Empirical Implications," *Mathematical Finance*, **15**(1), 2005, pp.1–26.
- Lee, Jacky, and Luca Capriotti, "Wrong-way risk done right," *Risk*, **28**(9), 2015, pp.74–79.
- Li, David X., "On Default Correlation: A Copula Function Approach," *Journal of Fixed Income*, **9**(4), 2000, pp.43–54.

PwC Consulting LLC, Tokyo 100-6921, Japan

E-mail address: tetsuya.adachi@pwc.com

PwC コンサルティング合同会社 安達 哲也

School of Computing

Tokyo Institute of Technology, Yokohama-shi 226-8502, Kanagawa, Japan

E-mail address: sueshige.t.aa@m.titech.ac.jp

東京工業大学情報理工学院 末重 拓己

Institute for Monetary and Economic Studies

Bank of Japan, Tokyo 103-8660, Japan

E-mail address: toshinao.yoshiba@boj.or.jp

日本銀行金融研究所 吉羽 要直