

A quick computation of all kinds of transversals for dissections of an arrangement

福井哲夫

TETSUO FUKUI

武庫川女子大学

MUKOGAWA WOMEN'S UNIV. *

関口次郎

JIRO SEKIGUCHI

東京農工大学

TOKYO UNIV. OF AGRICUL. AND TECH. †

Abstract

In this report, an algorithm for finding all kinds of transversals for dissections of given arrangement is proposed. The algorithm has been developed to solve the problem of classifying arrangements of n lines on a real projective plane. The calculation time of our algorithm is $\mathcal{O}(n^4)$ for an arrangement of n lines. That is quicker than exhaustive algorithm $\mathcal{O}((n-1)^n)$.

1 はじめに

我々は、8直線アレンジメントの分類について研究している [9]-[18]。アレンジメントに対する幾何学的知見を得るために、直線添加による様々なアレンジメントを機械的に生成して、分析を行ってきた [15]-[18]。アレンジメント生成のプログラムでは、与えられたアレンジメントに対し、可能な全ての横断線を計算し、それを添加して生成した。横断線の計算方法は、単純にアレンジメントに含まれる辺の組合せを総当たり法によって選び、計算幾何学のアルゴリズム [1],[2] を使って横断線を探索することによって見つけ出した [20]。そのとき目的とは別に、次のような性質が観察された。直線数 $n = 5, 6, 7$ において、 n が同じどんなアレンジメントを選んでも（一部の例外を除いて）、そのアレンジメントの分割が異なる可能な全ての横断線の数は一定であった [16],[17]。ここで、アレンジメントの分割が異なるとは、アレンジメントに含まれるフェイス [2]（辺やセル）の内、その横断線と交わる（結果としてフェイスを分割する）集合をゾーン [2] と呼び、そのゾーンが異なることを言う。

我々は、その事実を調べた結果、アレンジメントを構成する一つの直線には属さないどの3頂点も同一直線上にないならば、横断線の総数は直線の数 n に依存することを示した [19]。

本研究では、その定理の証明による副産物として、与えられたアレンジメントに対して、可能な全ての横断線の代表を生成する高速なアルゴリズムが得られたので、ここに報告する。

2 アレンジメントと横断線

n 本の直線集合 $H = \{l_1, \dots, l_n\}$ を考え、 H による実射影平面 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ に対するいろいろな次元の連結成分への分割をアレンジメントと呼び、 $\mathcal{A}(H)$ で表す。平面におけるアレンジメントの構成要素は、頂点、辺、

*fukui@mwu.mukogawa-u.ac.jp

†sekiguti@cc.tuat.ac.jp

セル（多角形）とそれらの隣接関係によって表される [2]。特に、本研究では、 H 内のいずれの 3 直線も 1 点で交わらない単純アレンジメントを扱う。

アレンジメント $\mathcal{A}(H)$ に含まれる n 個の辺 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ の集合を T としよう。直線 l_T が T の横断線であるとは、 T の各辺と交叉していることを言う。

定義 1 ($\mathcal{A}(H)$ に対する横断線) 直線 l_T が $\mathcal{A}(H)$ に対する横断線であるとは、 $\mathcal{A}(H \cup \{l_T\})$ が $n+1$ 直線の単純アレンジメントであることをいう。

ところで、横断線は双対平面で考えると扱いやすい場合がある [2]。双対変換とは、点 $p: (a, b)$ を直線 $L: y = 2ax - b$ に写し、逆に、直線 $l: y = cx + d$ を点 $P: (c/2, -d)$ に写す変換として定義され、 $\mathcal{D}$ で表す。このとき、2 点 p_1, p_2 を結ぶ辺 s と交叉する横断線を l_T とすると、双対点 $\mathcal{D}(l_T)$ は 2 直線 $\mathcal{D}(p_1)$ および $\mathcal{D}(p_2)$ が作る楔形の内部にある (図 2)。すなわち、 $\mathcal{D}(L_s) := \{D(l) : \forall l \cap s \neq \emptyset\}$ なる領域が図 2 の斜線部分である。逆に楔形の内部の点の双対変換は、必ず辺 s の横断線になっている。ここで、ユークリッド平面に対して、次のような定理が知られている [2]。

定理 1 (H. Edelsbrunner) T を $\mathbb{R}^2$ 内の n 本の有界な線分の集合とする。 $S(T)$ は高々 $n+1$ 個の凸多角形の合併となる。ただし、この中には有界でないものがあるかもしれない。凸多角形は、どの 2 つの多角形も高々 1 点でしか交わらず、それら凸多角形を分離する垂直線が存在する (図 2)。

したがって、 T の各辺に対するそれぞれの楔形の共通部分 $S(T) := \bigcap_{s_i \in T} \mathcal{D}(L_{s_i})$ を考えると (図 2)、その領域内の代表点を選べば、その双対変換が T の横断線である。 $S(T)$ のことを貫通領域と呼ぶ。

次章では、この議論を実射影平面に拡張して議論する。

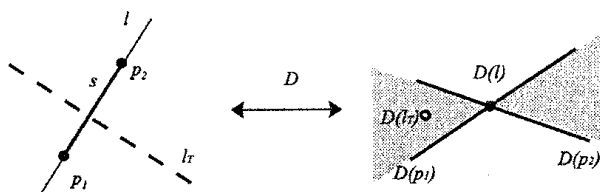


図 1: 辺と交叉する横断線の双対変換

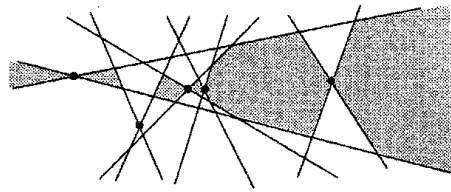


図 2: 辺の組 T と交叉する貫通領域

3 アレンジメントに対する横断線の総数

まず、アレンジメントの複雑さを表す次のような定理が知られている。

定理 2 実射影平面上単純 n 直線アレンジメント $\mathcal{A}(H)$, $H = \{l_1, \dots, l_n\}$ における、直線の本数を L_n , 頂点の本数を V_n , 辺の本数を S_n , セル（多角形）の本数を C_n とすると、

$$L_n = n, \quad (1)$$

$$V_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (2)$$

$$S_n = n(n-1), \quad (3)$$

$$C_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1. \quad (4)$$

(証明のヒント) 例えばセルの数に関しては、 n 直線アレンジメントに対する横断線がいつでも $C_{n+1} - C_n = n$ となっていることから解る。//

定義 2 (双対アレンジメント $\mathcal{A}(\mathcal{D}(H))$) アレンジメント $\mathcal{A}(H)$ の頂点 v_i , ($i = 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$) の双対直線 $\mathcal{D}(v_i)$ がつくるアレンジメント $\mathcal{A}(\tilde{H})$, $\tilde{H} = \{\mathcal{D}(v_i) | i = 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$ を双対アレンジメントと呼ぶことにする。

定理 3 実射影平面上単純 n 直線アレンジメント $\mathcal{A}(H)$, $H = \{l_1, \dots, l_n\}$ が、どれか一つの直線 l_j , ($j = 1, \dots, n$) だけには属さないどの 3 頂点も同一直線上にないとする。このとき、双対アレンジメント $\mathcal{A}(\mathcal{D}(H))$ における、直線の数 $\tilde{L}_n$, 頂点の数 $\tilde{V}_n$, 辺の数 $\tilde{S}_n$, セル (多角形) の数を $\tilde{C}_n$ とすると、

$$\tilde{L}_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad (5)$$

$$\tilde{V}_n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8} - \frac{n^2(n-3)}{2}, \quad (6)$$

$$\tilde{S}_n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} - n(n-1)(n-3), \quad (7)$$

$$\tilde{C}_n = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8} - \frac{n(n-2)(n-3)}{2} + 1. \quad (8)$$

証明のヒント)

双対アレンジメントは単純ではない。例えば、直線 l_i , ($i = 1, \dots, n$) 上の $n-1$ 個の頂点は、双対平面でみると 1 点で交差している (図 3)。したがて、 $\tilde{V}_n$ のマイナスの項は、双対アレンジメントが単純でない部分の差からくる (図 3)。 $\tilde{S}_n$ および $\tilde{C}_n$ ついても同じ。//

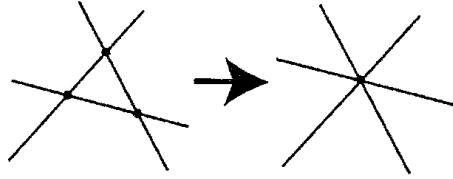


図 3: $n-1$ 個の頂点が双対平面では 1 点で交叉する直線となる

補題 1 実射影平面上単純 n 直線アレンジメント $\mathcal{A}(H)$ の可能なすべての横断線を見つけることは、 $\mathcal{A}(H)$ の $V_n = \frac{n(n-1)}{2}$ 個の頂点をあらゆる異なった 2 組に平面分割する直線を見つけることに等しい。

補題 2 $\mathcal{A}(H)$ の頂点集合をあらゆる異なった 2 組に分ける平面分割の集合と $\mathcal{A}(H)$ の双対アレンジメントに含まれるセル全体との間に全単射が存在する (図 4)。

証明)

ここでは、簡単のために、無限遠点を除き実射影平面 $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ とユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ を同一視して議論し、どの直線も垂直でないとする。ただし、2 点を結ぶ線分 $\overline{p_1 p_2}$ だけでなく、2 点を通る直線 l から線分 $\overline{p_1 p_2}$ を除いた補集合である (ユークリッド平面では) 非有界な線分 $l - \overline{p_1 p_2}$ (以後、非有界線分 $\overline{p_1 p_2}$ と表す) も連結として扱う。また、平面上の点 $p: (a, b)$ と直線 $l: y = cx + d$ との間に、 $b > ca + d$ (あるいは $b < ca + d$) なる関係が成り立つとき、点 p は直線 l の上 (あるいは下) にあるといい、便宜上 $p > l$ (あるいは $p < l$) と表すことにする。このとき双対変換の性質として次が成り立つ。

$$p > l \rightarrow \mathcal{D}(l) > \mathcal{D}(p), \quad p < l \rightarrow \mathcal{D}(l) < \mathcal{D}(p) \quad (9)$$

$\mathcal{A}(H)$ に含まれる V_n 個全ての頂点集合を V とする。今、ある直線 l による平面分割によって頂点集合が二つの部分集合 $U \subset V$ と $D \subset V$ ($U \cap D = \emptyset, U \cup D = V$) に分けられたとき、 $U > l > D$ または

$U < l < D$ が成り立つ。また、二つの分割 $V = U_1 + D_1$ と $V = U_2 + D_2$ が異なるとは、 $U_1 \neq U_2$ かつ $D_1 \neq D_2$ となることをいう。

任意の平面分割を与える直線 l に対して、(9) より、双対点 $D(l)$ は必ず双対アレンジメント $A(\tilde{H})$ のどれかのセル C に属する。そこで、平面分割全体の集合から双対アレンジメントのセル全体の集合への写像 f を、分割直線の双対点が属するセル C に対応させることによって定義する。

同じ平面分割 $V = U + D$ を与える 2 つの直線を l_1 と l_2 とすると、

(i) $U > l_1, l_2 > D$ 、(ii) $U < l_1, l_2 < D$ 、(iii) $U > l_1 > D, U < l_2 < D$ 、(iv) $U < l_1 < D, U > l_2 > D$ のいずれかである。このとき双対アレンジメントの 2 つのセルを $D(l_1) \in C_1$ および $D(l_2) \in C_2$ とおくと、もし、 $C_1 \neq C_2$ ならば、線分 $\overline{D(l_1)D(l_2)}$ および非有界線分 $\overline{D(l_1)D(l_2)}$ と交わる直線 $D(u)$, ($u \in U$) または $D(d)$, ($d \in D$) がそれぞれ存在する。(i) および (ii) の双対変換の大小関係を考えると、明らかに線分 $\overline{D(l_1)D(l_2)}$ と交わる直線との大小関係が矛盾する。また、(iii) および (iv) の双対変換の大小関係を考えると、非有界線分 $\overline{D(l_1)D(l_2)}$ と交わる直線との大小関係が矛盾する。したがって、 $C_1 = C_2$ を得る。すなわち、写像 f は平面分割を与える直線の選び方によらず定義され、全射であることが示された。

次に、2 つの異なる平面分割 $V = U_1 + D_1$ および $V = U_2 + D_2$ を与える任意の直線を m_1, m_2 とし、 $D(m_1) \in C_1$ および $D(m_2) \in C_2$ とする。各セルは $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ 上の凸多角形であるから、同一セル内のどの 2 点も境界直線と交わることなく線分または非有界線分によって結べるはずである。ところが、 $U_1 \neq U_2$ かつ $D_1 \neq D_2$ であるから、(I) $u_{1a} > m_2 > u_{1b}$ なる $u_{1a}, u_{1b} \in U_1$ または (II) $d_{1a} > m_2 > d_{1b}$ なる $d_{1a}, d_{1b} \in D_1$ が存在する。(I) の場合、(I-a) $u_{1a}, u_{1b} > m_1$ のとき、 $D(m_2) < D(u_{1b}) < D(m_1)$ であるから、線分 $\overline{D(m_2)D(m_1)}$ は直線 $D(u_{1b})$ と交わる。また、 $D(u_{1a}) < D(m_1), D(m_2)$ であるから、非有界線分 $\overline{D(m_2)D(m_1)}$ は直線 $D(u_{1a})$ と交わる。(I-b) $u_{1a}, u_{1b} < m_1$ の場合も、 $D(m_1) < D(u_{1a}) < D(m_2)$ であるから、線分 $\overline{D(m_1)D(m_2)}$ は直線 $D(u_{1a})$ と交わる。また、 $D(u_{1b}) > D(m_1), D(m_2)$ であるから、非有界線分 $\overline{D(m_1)D(m_2)}$ は直線 $D(u_{1b})$ と交わる。(II) の場合も、同様に 2 点 $D(m_1)$ と $D(m_2)$ は非連結となる。したがって、 $C_1 \neq C_2$ が成り立つ (単射)。//

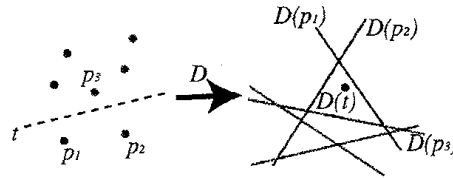


図 4: 頂点分割と双対平面

以上の定理 3 および補題 1, 2 によって、アレンジメントに対する異なる横断線ごとに双対アレンジメントの異なるセルが対応しており、次のような総数定理を得る。

定理 4 実射影平面上単純 n 直線アレンジメント $A(H)$, $H = \{l_1, \dots, l_n\}$ において、どれか一つの直線 l_j , ($j = 1, \dots, n$) だけには属さないどの 3 頂点も同一直線上にないならば、 $A(H)$ の可能なすべての横断線の総数は、 $A(H)$ の双対アレンジメントのセルの数 $\tilde{C}_n$ (式 (8)) に等しい。

4 横断線の高速アルゴリズム

さて、アレンジメントに対する可能な全ての横断線を計算するアルゴリズムについて議論する。

4.1 総当たり法による横断線探索 [20]

[総当たり法によるアルゴリズム]

初期化: n 直線アレンジメント $A(H)$ に対して、その n 直線配置 $H = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ における、直線 l_i ($i = 1, \dots, n$) に含まれる辺を s_{ij} ($j = 1, \dots, n-1$) とする。

反復: すべての辺の組 $T = \{s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}\}$ に対して、以下を繰り返す

判定: もし、横断線が存在したら、横断線 l_T 決定。

出力: $n+1$ 直線配置 $\{l_1, \dots, l_n, l_T\}$

このアルゴリズムの反復回数は $(n-1)^n$ 通りで、膨大な試行錯誤を繰り返す。しかも、横断線の判定には、双対変換を行い、図 2 のような貫通領域を計算しなければならない [20] ため、時間を要する。

4.2 横断線計算の高速アルゴリズム

本研究で提案する高速アルゴリズムは、第 3 章の横断線総数定理に至る考え方を使って、無駄なく横断線を求めることができる。すなわち、補題 1, 2 より、双対アレンジメントにおける一つのセル内にある 1 点 (代表点) を選べば、その双対変換による $P^2(\mathbf{R})$ 上の直線が求める横断線の一つに他ならない。したがって、アルゴリズムは次のような Step1)~4) を行えばよい。

[横断線計算の高速アルゴリズム]

Step 1) n 直線 H から $\tilde{H} = \mathcal{D}(H)$ への双対変換を行い、

Step 2) 双対アレンジメント $A(\tilde{H})$ を構成し、フェイスとそれらの隣接関係を決定する。

Step 3) $A(\tilde{H})$ に含まれる全てのセル内の代表点を計算する。

Step 4) 計算した代表点の双対直線 (横断線) を出力する。

ここで、Step 3) および 4) は定理 4 にあるように、セルの総数 $\widetilde{C}_n$ にわたって繰り返す。

4.3 アルゴリズムの計算機による比較

我々は、計算機 (PowerPC 1GHz) を使用して計算時間の比較を行った。アルゴリズムのインプリメンテーションには、数式処理システム Mathematica 4.2 を使用した。ただし、実験に使用したサンプルは全て有理数係数をもつ直線のみを扱い、厳密に計算した。

6 直線から全横断線計算を行った結果を表 1 に示す。次に 7 直線アレンジメントの全横断線を計算した結果を表 2 に示す。

表 1, 2 の 1 列目の直線アレンジメントサンプルのタイプの違いは文献 [3]-[8] を参照していただきたい。カラム "exhaustive" が総当たり法による計算時間、カラム "quick" が我々の提案するアルゴリズムによる計算時間を表している。平均して、6 直線アレンジメントの横断線計算比較は 9545 倍、7 直線では約 19 万倍とかなり高速であることが解る。

表 1: 6 直線アレンジメントの横断線計算時間

Type of 6 lines	exhaustive (T_e sec.)	quick (T_q sec.)	T_e/T_q
O	1701.9	0.18	9455
I	1758.6	0.17	10345
II	1634.4	0.19	8602
III	1662.3	0.17	9778
mean	1689.3	0.18	9545

表 2: 7 直線アレンジメントの横断線計算時間

Type of 7 lines	exhaustive (T_e sec.)	quick (T_q sec.)	T_e/T_q
A	79605.3	0.45	176901
B1	60161.3	0.46	130785
B2	82763.2	0.49	168904
B3	126425.0	0.46	274837
B4	112770.0	0.47	239936
B5	134241.0	0.50	268482
C1	95511.6	0.58	164675
C2	72987.5	0.63	115853
C3	173544.0	0.67	259021
C4	73233.8	0.64	114428
D1	170361.0	0.93	183184
D2	207006.0	0.72	287508
D3	57981.9	0.50	115964
D4	82714.0	0.46	179813
mean	109236.1	0.57	191449

5 まとめと考察

以上、提案したアルゴリズムによって全横断線の計算を、総当たり法と比べて高速に行うことができた。

n 直線アレンジメントにおける反復回数を比べてみると、総当たり法は $(n-1)^n$ 回、一方、高速アルゴリズムでは第 4 章で述べたように $\widetilde{C}_n$ 回であるから、単純に計算時間を見積もると、それぞれ $O((n-1)^n)$ および $O(n^4)$ となり、 n が大きいほど高速であることが解る。

実際に $n = 5, 6, 7$ の場合に対して、理論値と実験値とを比べたものが表 3 である。単純予想による速度比は $(n-1)^n/\widetilde{C}_n$ であったが、実際の計算時間比 T_e/T_q は前者より 1 桁以上も大きい。むしろ、 T_e/T_q の各値は $(n-1)^n$ とほぼ同じオーダーに見える。このことは、総当たり法の判定処理に計算時間のほとんどを要しており、しかもその判定を反復しているのに対し、高速アルゴリズムではほぼ反復 1 回分の計算で結果を出していることになる。実際、総当たり法の判定処理は、双対平面における貫通領域計算を行っており、部分的に双対アレンジメントのセルの構成を行っている。一方、高速アルゴリズムではこれと同様の計算を全セルにわたって構成しているが、1 回だけで済む。いずれにしても、横断線計算において双対アレンジメントにおけるセルの構成が一番重要であることは間違いない。結局、実験結果から予想されることは、セルの構成を部分的に行っても、全セルについて行ってもそれほど差はなかったということである。

表 3: 計算時間の理論値 (左) と実験地 (右) の比較

n	$(n-1)^n$ (ways)	$\widetilde{C}_n$ (cells)	$(n-1)^n/\widetilde{C}_n$	exhaustive (mean sec.)	quick (mean sec.)	T_e/T_q
5	1024	31	33	58.58	0.06	976
6	15625	70	223	1689.3	0.18	9545
7	279936	141	1985	109236.1	0.57	191449

参 考 文 献

- [1] B. Grünbaum: Convex Polytopes, *Interscience*, 1967, Chap.18.
- [2] H. Edelsbrunner: Algorithms in Combinatorial Geometry, *Springer*, Heidelberg, 1987.
- [3] J. Sekiguchi: Cross ratio varieties for root systems, *Kyushu J. Math.*, **48**, 1994, 123–168.
- [4] J. Sekiguchi: Cross ratio varieties for root systems II: the case of the root system of type E_7 , *Kyushu J. Math.*, **54**(1), 2000, 7–37.
- [5] J. Sekiguchi: Geometry of 7 lines on the real projective plane and the root system of type E_7 , *RIMS Kokyuroku*, **986**, 1–8.
- [6] J. Sekiguchi and T. Tanabata: Tetradiagrams for the root system of type E_7 and its application, *Reports of Faculty of Science*, Himeji Inst. Tech., **7**, 1996, 1–10.
- [7] J. Sekiguchi and M. Yoshida: The $W(E_6)$ -action on the configuration space of six points of the real projective plane, *Kyushu J. Math.*, **51**, 1997, 297–354.
- [8] J. Sekiguchi: Configurations of seven lines on the real projective plane and the root system of type E_7 , *J. Math. Soc. Japan*, **51**(4), 1999, 987–1013.
- [9] T. Fukui and J. Sekiguchi: A remark on labelled 8 lines on the real projective plane, *Reports of Faculty of Science*, Himeji Inst. Tech., **8**, 1997, 1–11.
- [10] 福井哲夫, 関口次郎: 数式処理の実射影平面上 N 本直線配置問題への応用事例, 数理解析研究所講究録, **1030**, 1998, 62–74.
- [11] 関口次郎, 福井哲夫: 実射影平面上の 8 直線アレンジメント I, 数式処理, **7**(1), 1998, 33–35.
- [12] 福井哲夫, 関口次郎: 実射影平面上の 8 直線アレンジメント II: 構成実験の分析, 数式処理, **7**(1), 1998, 36–38.
- [13] T. Fukui and J. Sekiguchi: Eight lines arrangements on the real projective plane and the root system of type E_8 , *Proc. ATCM '98*, Springer, Singapore, 1998, 377–388.
- [14] T. Fukui and J. Sekiguchi: Experimental computation on configurations of eight lines on the real projective plane, *Reports of Faculty of Science*, Himeji Inst. Tech., **9**, 1998, 1–11.
- [15] 福井哲夫, 関口次郎: 貫通直線構成による実射影平面上アレンジメントの生成とその分類, 数式処理, **10**(2), 2003, 26–27.
- [16] 福井哲夫, 関口次郎: 貫通直線探索法による実射影平面上 8 直線アレンジメントの生成実験, 代数と計算 2003 講究録, <http://tnt.math.metro-u.ac.jp/ac/2003/>, 2004, 1–7.
- [17] 福井哲夫, 関口次郎: 実射影平面上 8 直線アレンジメントの観測による幾何学的性質, 数理解析研究所講究録, **1395**, 2004, 150–156.
- [18] T. Fukui, J. Sekiguchi, K. Ohta: Experimental computation of eight lines arrangements generated by all possible transversals on a real projective plane for image production, *Kansei Engineering International* (015), **4**(3), 2004, 1–10.
- [19] 福井哲夫, 関口次郎: 実射影平面上単純直線アレンジメントを分割する横断線の総数, *Designs, Codes, Graphs and their Links V (preprint)*, 2004.
- [20] 福井哲夫, 関口次郎: アレンジメントを分割する横断線探索アルゴリズム, 武庫川女子大学紀要 (自然科学), **52**, 2005, 33–40.