

Unbounded Derivation について

東工大理 生西明夫

C^* -代数および von Neumann 代数の対称な非有界 derivation について、最近の Brattei と Robinson の結果を紹介し、あわせて、対称でない derivation について述べる。

C^* -代数 A の稠密な対称部分代数 $D(\delta)$ から A への、次の性質をもつ線型写像 δ を derivation とする。

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y), \quad x, y \in D(\delta).$$

derivation δ に対して、次のように定義された δ^* は、また derivation である。

$$\delta^*(x) \equiv \delta(x^*)^*, \quad x \in D(\delta).$$

$\delta = \delta^*$ のとき δ は対称であるという。

τ_t を A の自己同型の強連続な 1 径数群とすると τ_t の生成作用素が A の稠密な derivation — 一般に有界でない — であり、特に、自己同型が自己対称ならば対称な derivation であることは容易に知られる、しかし、逆に、derivation が

すべて強連続なノルム教群を生成する訳ではない。

von Neumann 代数 M の場合には *derivation* δ の定義域は弱稠密であるとする。 τ_t が M の弱連続な自己同型のノルム教群でなれば、 τ_t の生成作用素 δ は弱閉な M の *derivation* である。 また、 ${}^{\tau}\tau_t$ を τ_t の M_* 上の双対とすると、 ${}^{\tau}\tau_t$ はバナハ空間 M_* 上の強連続なノルム教群であり、その生成作用は δ の双対であることに注意しよう。

以下で C^* -代数あるいは *von Neumann* 代数の *derivation* のノルム教群の生成作用素としての特徴付け述べる。

まず、一般の Banach 空間の場合の定理を挙げる。

定理 1. ([1]). $\delta \in$ Banach 空間 X における線型写像とする。

条件 (A), (B) は次のとおりである。

$$(A). \|\tau_t\| \leq N e^{\beta|t|}, \quad M \geq 1, \quad \beta \geq 0.$$

$$(B). \|(\alpha\delta + 1)^n(x)\| \geq N^{-1}(1 - |\alpha|\beta)^n \|x\|, \quad n \geq 1, \quad x \in \bigcap_n D(\delta^n).$$

ただし、 $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha|\beta < 1$, $N \geq 1$, $\beta \geq 0$ である。

次の条件は互いに同等である。

1. δ は条件 (A) を満たす X 上のノルム教群 τ_t の生成作用素である。

2. δ は閉かつ、条件 (B) を満たし、 $|\alpha|\beta < 1$ なる $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\overline{(\alpha\delta + 1)(D(\delta))} = X$ 。

3. δ は閉かつ、条件(B)を満たし、 δ に関して解析的要素の全体は X で稠密である、

さらに、 $N=1$ 、 $\beta=0$ の場合には、条件(B)は

$$\|(\alpha\delta+1)(x)\| \geq \|x\|, \quad x \in D(\delta), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

と同等である、

定理1よりたがちに、 C^* -代数の場合も定理を得る、

定理2^[1] δ は C^* -代数 A の derivation とする、条件(A),(B)は定理1と同じとする、

次の条件は同等である、

1. δ は A の自己同型 α の強連続な1径数群の生成作用素であり、条件(A)を満たす、

2. δ は閉かつ、条件(B)を満たし、 $|\alpha|\beta < 1$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、

3. δ は閉かつ、条件(B)を満たし、 δ に関して解析的要素の全体は A で稠密である、

さらに、 δ が対称の場合は、自己同型は対称で、条件(B)は条件

$$\|(\alpha\delta+1)(x)\| \geq \|x\|, \quad x \in D(\delta), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

で置きかえられる、

定理2より, von Neumann代数の場合には次の定理を得る.

定理3. ([2]) δ は von Neumann 代数 M の derivation とする.

条件 (A), (B) は定理1. と同じとする.

次の条件は同等である.

1. δ は M の自己同型の弱連続な1径数群の生成作用素であり, 条件 (A) を満たす.

2. δ は弱閉かつ, 条件 (B) を満たし, 任意の $|\alpha| < 1$ なる $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $(\alpha\delta + 1)(D(\delta))$ は M で弱稠密である.

3. δ は弱閉かつ, 条件 (B) を満たし, δ に関して解析的要素の全体は弱稠密である.

さらに, δ が対称の場合には, 自己同型は対称であり, 条件 (B) は条件

$$\|(\alpha\delta + 1)(x)\| \geq \|x\|, \quad x \in D(\delta), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

で置きかえられる.

さらに, δ が対称な derivation ならば, 条件 (B) は次の条件

$$(\alpha\delta + 1)(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0, \quad x \in D(\delta), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

で置きかえられる. ([1, 2])

次に不変な state をもつ場合について述べる. $\delta \in C^*$ -代数 A (von Neumann 代数 M) の自己同型の連続な1径数群の生成作用素とするとき, $A(M)$ の state ω が τ_t について不変であるためには $\omega \cdot \delta = 0$ であることが必要十分である.

命題 4. δ は C^* -代数 A (von Neumann 代数 M) の derivation とする. $\omega \circ \delta = 0$ なる A (M) の忠実な state ω (normal state) が存在するとする. $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を ω に伴う GNS 表現とする.

このとき,

1. δ は closable である.

2. $\mathcal{H}$ 上の closable な作用素 H が存在して,

$$D(H) = \pi(D(\delta))\xi, \quad D(\delta) D(H) \subset D(H),$$

$$\pi(\delta(x))\eta = i[H, \pi(x)]\eta, \quad \eta \in D(H), x \in D(\delta).$$

さらに δ が対称ならば, H も対称である.

定理 5 ([1,2]) δ は C^* -代数 A (von Neumann 代数 M) の対称な derivation とする. $\omega \circ \delta = 0$ なる忠実な state ω (normal state) が存在するとする. このとき, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$(\alpha\delta + 1)(D(\delta))$ が A において稠密 (M において弱稠密) あるいは, δ に関する解析的要素の全体が稠密 (弱稠密) ならば

δ の閉包 $\bar{\delta}$ は対称自己同型の強 (弱) 連続な / 径数群の生成作用素である.

[2] において, 次の Conjecture が提出されている.

Conjecture. M をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の分離かつ, 巡回的ベクトル ξ を持つ von Neumann 代数とする. $\delta \in M$ の対称な derivation で $\mathcal{H}$ 上の自己対称作用素 H によって与えられて

いるとする。すなわち, $D(\delta) D(H) \subset D(H)$,

$$\delta(x)\eta = i[H, x]\eta, \quad x \in D(\delta), \eta \in D(\delta).$$

さらに, $\xi \in D(H)$, $H\xi = 0$ かつ H は $D(\delta)\xi$ 上で本質的自己对称とある。このとき,

$$e^{itH} M e^{-itH} = M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

であるか?

この Conjecture は δ が $\omega_\xi \circ \tilde{\delta} = 0$ なる M の自己同型の弱連続 1 径数群の生成作用素 $\tilde{\delta}$ に拡張できるかどうかということにほかならない。また, $D(\tilde{\delta}) = \{x \in M \mid [H, x]\eta \in M \text{ かつ } [H, x] \text{ は有界}\}$ 上で $\tilde{\delta}(x) = \overline{i[H, x]}$ によって定義される M の derivation が M の自己同型の弱連続 1 径数群の生成作用素になるかということとでもある。

定理 6. (Bratteli, Robinson [2,3]) Conjecture の仮定のもとで, また, $D(\tilde{\delta}), \tilde{\delta}$ は上のとおりとするとき, 次の条件は同等である。

1. $e^{itH} M e^{-itH} = M, \quad t \in \mathbb{R},$
2. $(1 \pm iH)^{-1} M \subset D(\tilde{\delta})$
3. $(1 \pm iH)^{-1} M_+ \subset \overline{M_+}$
4. $e^{itH} M_+ \subset \overline{M_+}, \quad t \in \mathbb{R}$

$$5. \quad e^{itH} V_{1/4} \subset \overline{V_{1/4}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ここで, } V_{1/4} = \overline{\Delta^{1/4} M_+ \xi}.$$

定理 7. Conjecture の仮定のもとで, 次の条件 1-3 は

$$e^{itH} M e^{-itH} = M, \quad t \in \mathbb{R}$$

であるための十分条件である.

1. $D(\delta)$ の弱稠密な自己対称部分空間 B があって,

$\delta(B) \subset B$ かつ任意の $x \in B$ に対して, $t_x \neq 0$ があって,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|}{n!} \|\delta^n(x)\| < +\infty, \quad |t| < t_x.$$

2. M は可換である.

3. ω_ξ は trace である.

次の定理は対称でない自己同型群についてのものである.

定理 8. $\tau_t \in C^*$ -代数 A (von Neumann 代数 M) の自己同型の強(弱)連続な 1 径数群とする. $\delta \in \tau_t$ の生成作用素とする. さらに, τ について不変な state (normal state) ω が存在するとする. $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$ を ω に伴う GNS 表現とする. このとき,

1. $\mathcal{H}$ 上の強連続な 1 径数群 T_t が存在して, $\pi(\tau_t) \cdot \pi^{-1} = \text{Ad } T_t$ かつ T_t の生成作用素を K とすると, $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$

$$\pi(\delta(x))\eta = [K, \pi(x)]\eta, \quad x \in D(\delta), \eta \in D(K).$$

2. $\|\tau_t\| \leq e^{\beta|t|}$ ($\beta \geq 0$) かつ, $D(\delta) \cap D(\delta)^*$ が稠密
 ならば, 対称な derivation δ_1 と δ_2 が存在して, δ_1 は生
 成作用素, δ_2 は有界であり, かつ, $\delta = \delta_1 + i\delta_2$

よして,

$$\tau_t = e^{t\delta_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \quad e^{-t_1\delta_1} \delta_2 e^{t_1\delta_1} \cdots \\ \cdots e^{-t_n\delta_1} \delta_2 e^{t_n\delta_1}.$$

である。

References

1. O. Bratteli and D. W. Robinson, Unbounded derivations of C*-algebras.
II., CNRS Preprint
2. ———, Unbounded derivations of von Neumann algebras, CNRS
Preprint
3. ———, Unbounded derivations and invariant trace states.
CNRS Preprint
4. H. Araki, Expansion in Banach algebras, RIMS
5. T. Kato, Perturbation theory for linear operator, Springer Verlag
Berlin (1966)