

Duke-Imamogle の方法による奇数 weight の Saito-Kurokawa lifting

荒川 恒男 (立教大学理学部)

整数 weight $2k-2$ (k : 偶数) の楕円保型形式の空間から、次数 2、weight k の Siegel 保型形式の空間に、Hecke 作用素の作用と compatible な lifting があるという齋藤-黒川予想 ([Ku]) は、1980 年頃 Maass [Ma2], Andrianov [An] の仕事を経て、Eichler-Zagier ([E-Z]) により最終的に解決された (決定的な寄与は、Maass の仕事 [Ma2] のようである)。この証明で難しい点のひとつは、lift された保型形式の保型性 (modularity) を示すことにある。Eichler-Zagier (元は Maass による) は、Jacobi 形式を用いて、巧妙に示しているが、汎用性の少ない証明という欠点もある。最近、Duke-Imamogle [D-I] は、太田の逆定理 [Im] と Katok-Sarnak [K-S] による Shimura 対応の real analytic version とを用いて、lift された保型形式の保型性を証明した。これは、保型性の証明法を増やすという点でも興味深いものである。

他方、weight k が奇数の場合の Saito-Kurokawa lifting については、余り多くのことが知られていないようである (Maass に例外的で興味を惹かれる仕事 [Ma3] がある)。ここでは、Duke-Imamogle の方法を用いて、level 4 の weight $k-1/2$ の半整数 cusp 形式の空間から、同じ level の指標付きの weight k の Siegel 保型形式の空間への Saito-Kurokawa lifting を構成する。lifting を 2 通り構成し、その間の関係を調べることにより、保型性が示される点が興味深い。最後に Maass、Eichler-Zagier の方法によるアプローチにも言及したい。

元来の太田の逆定理 ([Im]) と Duke-Imamogle の仕事に関しては、伊吹山氏が大変丁寧な解説 [Ib] を書いているので、そちらを参照して下さい。この報告も [Ib] に負う所大とします。また逆定理については、菅野氏が、第 1 回整数論オータムワークショップ報告集 (伊吹山氏編) に Weissauer's Converse Theorem の題 [Su] で、将来役にたつであろう逆定理の解説を書いているので、併せてご覧下さい。

1 Saito-Kurokawa lifting

最初に、ごく簡単に Saito-Kurokawa lifting を復習しよう。

整数 $k > 0$ に対して、重さ $k - 1/2$ の合同部分群 $\Gamma_0(4)$ に関する半整数楕円保型形式の空間 $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ を、上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f で、次の (i)、(ii) を満たすものの成す $\mathbb{C}$ -線型空間とする。

(i) 任意の $M \in \Gamma_0(4)$ に対して $f(M\tau) = j(M, \tau)^{2k-1} f(\tau)$

(ii) 各 cusp で正則。

ここで、 $j(M, \tau)$ は Shimura の保型因子で、 $M \in \Gamma_0(4)$ のとき

$$j(M, \tau) = \frac{\theta(M\tau)}{\theta(\tau)} \quad \text{with} \quad \theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}$$

で与えられる。 $f \in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の Fourier 展開を

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e(n\tau)$$

とするとき、Fourier 係数の条件

$$(-1)^k n \equiv 1, 2 \pmod{4} \text{ ならば } c(n) = 0$$

を満たす f の成す $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の部分空間を $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ と記す。 $M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$, $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ の cusp 形式の成す部分空間を、 $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$, $S_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ と記す。

以下、この節では、 k は偶数とする。 $M_k(\Gamma_2)$ を重さ k 、次数 2 の Siegel modular 群 $\Gamma_2 = Sp_2(\mathbb{Z})$ に関する Siegel 保型形式の成す空間とする。さらに、Maass 部分空間 Ma_k を、 $F \in M_k(\Gamma_2)$ でその Fourier 係数 $a(T)$ が Maass relation

$$a \begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} = \sum_{0 < d | (m, r, n)} d^{k-1} a \begin{pmatrix} 1 & r/2d \\ r/2d & mn/d^2 \end{pmatrix} \quad ((m, r, n) \neq (0, 0, 0))$$

を満たすものの全体とする。

そこで、 $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e(n\tau) \in M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ とする。2 次の半正定値半整数対称行列 T ($T \neq 0$) に対して $a(T)$ を

$$a \begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} = \sum_{0 < d | (m, r, n)} \chi(d) d^{k-1} c \left(\frac{\det 2T}{d^2} \right)$$

で定義する。 d は m, r, n の最大公約数 (m, r, n) を割る正の整数を動く。 $a(0)$ は

$$a(0) = c_k = -\frac{2k}{B_{2k}} \quad (B_{2k} \text{ は Bernoulli 数である})$$

とおく ([E-Z, p.43])。さらに、2 次 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}_2$ 上の関数 $\iota(f)(Z)$ を

$$\iota(f)(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e(\text{tr}(TZ)),$$

で定義する。ただし、 T は 2 次の半正定値半整数対称行列全体を動く。次の定理が主定理 ([Ma2], [E-Z], [An]) である。

定理 1.1 $f \in M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ とする。

- (i) $\iota(f) \in Ma_k$.
- (ii) $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4)) \cong Ma_k$. 同型は $f \rightarrow \iota(f)$ で与えられる。
- (iii) この同型 ι は、Hecke 環の作用と compatible である。

注意) Shimura 対応により、 $M_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \cong M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ であるので、2 つの同型を繋げると、 $M_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ から Ma_k への同型になり、(iii) の結果は、対応する L -関数の言葉に翻訳されている ([E-Z])。

2 奇数 weight の場合

以下、 k は正の奇数とする。 χ を mod 4 の自明でない指標とする。 $\Gamma_0^{(2)}(4)$ を $M \in \Gamma_2 := Sp_2(\mathbb{Z})$ で $c(M) \equiv 0 \pmod{4}$ を満たす M の成す Γ_2 の合同部分群とする ($c(M)$ は M の左下 block を表す)。 $M_k(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi)$ を、

$$F(MZ) = \chi(\det c) \det(cZ + d)^k F(Z) \quad \text{for } \forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(2)}(4)$$

を満たす 2 次 Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}_2$ 上の正則関数 $F(Z)$ の成す空間とする。 $S_2(\mathbb{Z})$ (resp. $S_2^*(\mathbb{Z})$) を 2 次整数 (resp. 半整数) 係数対称行列の成す集合とする。 $S_2(\mathbb{Z})^+$ (resp. $S_2^*(\mathbb{Z})^+$) を $S_2(\mathbb{Z})$ (resp. $S_2^*(\mathbb{Z})$) の正定値な元からなる部分集合とする。 $e(z) = \exp(2\pi iz)$ と略記する。 $F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi)$ は、次の形に Fourier 展開される。

$$F(Z) = \sum_{T \in S_n^*(\mathbb{Z}), T \geq 0} a(T) e(\text{tr}(TZ)).$$

Maass 部分空間 $\widetilde{Ma}(k, \chi)$ を、 $F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi)$ でその Fourier 係数 $a(T)$ が、任意の $T = \begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} \in S_2^*(\mathbb{Z})$, $T \geq 0$, $T \neq 0$ に対し、Maass relation

$$a \begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} = \sum_{0 < d | (m, r, n)} \chi(d) d^{k-1} a \begin{pmatrix} 1 & r/2d \\ r/2d & mn/d^2 \end{pmatrix} \quad ((m, r, n) \neq (0, 0, 0))$$

を満たすものの全体とする。

このような χ 付きの Maass 部分空間は、 k が偶数の場合に、小嶋氏により導入された ([Ko])。さらに、部分空間 $Ma(k, \chi)$ を

$$Ma(k, \chi) = \widetilde{Ma}(k, \chi) \cap \left\{ F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi) \mid F \left(Z + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \right) = F(Z) \right\}$$

とする。 $F \in Ma(k, \chi)$ に対し、

$$F \left(Z + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \right) = F(Z)$$

の条件は、 F が

$$F(Z) = \sum_{T \in S_2(\mathbb{Z}), T \geq 0} a(T) e(\text{tr}(TZ))$$

と Fourier 展開されることを意味するので、Fourier 係数は

$$a \begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix} = \sum_{0 < d \mid (m, r, n)} \chi(d) d^{k-1} a \begin{pmatrix} 1 & r/d \\ r/d & mn/d^2 \end{pmatrix}$$

を満たす。

$\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の、Fourier 展開 $\varphi(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e(n\tau)$ に対し、 $a(T)$ ($T \in S_2(\mathbb{Z})^+$), $b(T)$ ($T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+$) を

$$a \begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix} = \sum_{0 < d \mid (m, r, n)} \chi(d) d^{k-1} c \left(\frac{\det T}{d^2} \right)$$

resp.

$$b \begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix} = \sum_{0 < d \mid (m, r, n)} \chi(d) d^{k-1} c \left(\frac{\det 2T}{d^2} \right)$$

で定義する。さらに、 $Z \in \mathfrak{H}_2$ に対し、

$$\iota(\varphi)(Z) = \sum_{T \in S_2(\mathbb{Z})^+} a(T) e(\text{tr}(TZ)), \quad \tilde{\iota}(\varphi)(Z) = \sum_{T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+} b(T) e(\text{tr}(TZ))$$

とする。次が成り立つ。

定理 2.1 $\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ ならば $\iota(\varphi) \in Ma(k, \chi)$, $\tilde{\iota}(\varphi) \in \widetilde{Ma}(k, \chi)$ である。

注意) $\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の像 $\iota(\varphi)$, $\tilde{\iota}(\varphi)$ は Siegel cusp 形式になると予想されるが、目下のところ証明できない。

$\varphi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ に対し、 $\psi(\tau) = \sqrt{2}(-1)^{\frac{k-1}{2}} 4^{1/2-k} \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{1}{2}-k} \varphi\left(-\frac{1}{4\tau}\right)$ とおくと、 $\psi \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ である。そこで、

$$F(Z) = \iota(\varphi)(Z), \quad G(Z) = \tilde{\iota}(\psi)(Z) \quad \text{とおく.}$$

定理 2.2 このとき、 $F(-(4Z)^{-1}) = \det\left(\frac{2Z}{i}\right)^k G(Z)$ となる。さらに、

$$\psi \in S_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4)) \implies F(-(4Z)^{-1}) = \det\left(\frac{2Z}{i}\right)^k F(Z) \quad \text{i.e., } F = G.$$

証明の方針： Duke-Imamogle の方法で定理 2.2 を示すと、定理 2.2 $\implies$ 定理 2.1 は容易に従う。

以下に、Duke-Imamogle の方法の紹介を兼ねて 定理 2.2 の証明の概略を述べる。Introduction でも述べたが、伊吹山 [Ib] がこの方法の大変良い解説になっている。

最初に、Maass wave form の定義を与えよう。

定義 (Maass wave form) $v: \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ が、重さ 0 の Maass wave form であるとは、次の 3 条件が満たされるときをいう。

- (i) $v(Mz) = v(z) \quad \forall M \in SL_2(\mathbb{Z})$
- (ii) v は、 x, y について C^∞ -関数で、ある $\lambda \in \mathbb{C}$ について $\Delta v = -\lambda v$ を満たす。ただし、 $\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ は $\mathfrak{H}$ 上の $SL_2(\mathbb{R})$ -不変微分作用素である。
- (iii) (growth condition) $\exists \alpha > 0$ に対し、 $v(x + iy) = O(y^\alpha) \quad (y \rightarrow \infty)$.

$\mathcal{P}_2$ を 2 次正定値対称行列の成す集合とし、その行列式 1 の元から成る部分集合を

$$\mathcal{PS}_2 = \{Y \in \mathcal{P}_2 \mid \det Y = 1\}$$

とする。群 $SL_2(\mathbb{R})$ は $Y \rightarrow {}^t g^{-1} Y g^{-1}$ で $\mathcal{P}_2$ 及び $\mathcal{PS}_2$ に作用する。上半平面 $\mathfrak{H}$ は $\mathcal{PS}_2$ と $SL_2(\mathbb{R})$ の作用と compatible な微分同型になる。すなわち、 $z = x + iy$ に対し、

$$Y(z) = \begin{pmatrix} y^{-1} & -xy^{-1} \\ -xy^{-1} & y^{-1}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

とおくと、 $Y(z) \in \mathcal{PS}_2$ であり、 $Y(gz) = {}^t g^{-1} Y(z) g^{-1}$ となる。この同型を通して Maass wave form は $\mathcal{PS}_2$ 上の関数とみなされる。さらに、それを $\mathcal{P}_2$ 上にまでのばした関数を Maass の量指標と、このノートではよぶことにする。すなわち、 $u: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ が Maass の量指標とは、

- (i) $\forall c > 0$ と $Y \in \mathcal{P}_2$ に対し、 $u(cY) = u(Y)$.
- (ii) ある Maass wave form v に対し、 $u(Y) = v(z) \quad (Y \in \mathcal{PS}_2)$. ただし、 z は Y に対応する $\mathfrak{H}$ の点 ($Y = Y(z)$) である

が満たされるときをいう。Maass の量指標については [Mal] に詳しい。

以下、 $Y \in \mathcal{P}_2$ に対し $Y(z) = \frac{1}{\sqrt{\det Y}} \cdot Y$ の関係で定まる $z \in \mathfrak{H}$ を z_Y と記す。

さらに、半整数 weight 保型形式と整数 weight 保型形式の間の Shimura 対応の、Katok-Sarnak [K-S] による Maass wave form version を記述するために、weight $1/2$ の Maass wave form を定義する。

定義 (weight $1/2$ の Maass wave form) $r \in \mathbb{C}$ に対して、次の 3 条件 (i) ~ (iii) を満たす関数 $g: \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ の成す $\mathbb{C}$ -線型空間を T_r^+ と記す:

(i) g は、 x, y について C^∞ -関数で

$$g(Mz) = g(z)j(M, z)|cz + d|^{-1/2}, \quad \forall M \in \Gamma_0(4)$$

をみたし、各 cusp である増大条件をみたす: $\exists \alpha > 0$ が存在し、 $\forall M \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し、

$$|g(Mz)| = O(y^\alpha) \quad (y \rightarrow \infty).$$

(ii) g は、 $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B(n, y)e(nx)$ と Fourier 展開され、さらに $n \neq 0$ のとき、 $B(n, y)$ は

$$B(n, y) = b(n)W_{\text{sign } n/2, ir/2}(4\pi y|n|), \quad W_{\alpha, \beta} \text{ (は Whittaker 関数)}$$

(iii) $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ならば、 $B(n, y) = 0$.

次の定理は、weight 0 の Maass wave form の空間から weight $1/2$ の Maass form への Shimura 対応を記述する。 v が cusp 形式のときが Katok-Sarnak [K-S] により、定数関数と Eisenstein 級数のときは Duke-Imamogle [D-I] による。

定理 2.3 (Katok-Sarnak, Duke-Imamogle) v を weight 0 の Maass wave form とし、 $\Delta v = -(\frac{1}{4} + r^2)v$ とする。さらに、 v は even、すなわち、 $v(-\bar{z}) = v(z)$ を満たすとする。このとき、 $g \in T_r^+$ で、負の Fourier 係数 $b(-n)$ について、

$$b(-n) = n^{-3/4} \sum_{T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+ / SL_2(\mathbb{Z}), \det 2T = n} v(z_T) |Aut T|^{-1} \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

をみたすものが存在する。ただし、 $Aut T$ は T の単数群 $\{U \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid {}^t U T U = T\}$ である。 T は $S_2^*(\mathbb{Z})^+$ の元の $SL_2(\mathbb{Z})$ -同値類をわたる。

注意) (i) g は unique に決まるわけではない。

(ii) v が even という仮定が、後の保型性の証明には、重要な意味をもつ (後述)。 v が even ということ、対応する Maass 量指標 u の言葉で述べると

$$v \text{ even} \iff u(I_0 Y I_0) = u(Y) \quad \left(I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

となることに注意する。 $u(I_0 Y I_0) = -u(Y)$ のとき、 u を (従って v も) odd という。

定理 2.2 の証明に戻る。 $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)e(nz) \in S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ に対し、前述のように、 ψ を

$$\psi(z) = \sqrt{2}(-1)^{\frac{k-1}{2}} 4^{1/2-k} \left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}-k} \varphi\left(-\frac{1}{4z}\right)$$

で定義し、Fourier 展開を $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e(nz)$ とおく。このとき、

$$F(Z) = \iota(\varphi)(Z) = \sum_{T \in S_2(\mathbb{Z})^+} c(T)e(\text{tr}(TZ))$$

$$G(Z) = \tilde{\iota}(\psi)(Z) = \sum_{T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+} a(T)e(\text{tr}(TZ))$$

と書くと、 $c(T)$, $a(T)$ の定義より

$$c\left(\begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix}\right) = \sum_{d|(m,r,n)} \chi(d)d^{k-1}c\left(\frac{\det T}{d^2}\right)$$

および、

$$(2.1) \quad a\left(\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix}\right) = \sum_{d|(m,r,n)} \chi(d)d^{k-1}a\left(\frac{\det 2T}{d^2}\right)$$

である。この表示から、次の評価がただちに従う。

ある正定数 M (φ, ψ に依存する) が存在し、

$$(2.2) \quad \left|c\left(\begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix}\right)\right| < M(mn)^{k+1/2}, \quad \left|a\left(\begin{pmatrix} m & r/2 \\ r/2 & n \end{pmatrix}\right)\right| < M(mn)^{k+1/2}$$

となる。

さて、 $\mathcal{P}_2$ 上の Maass 量指標 u を任意にとる。 u に対応する Maass wave form を v ($\Delta v = -(\frac{1}{4} + r^2)v$) とし、定理 2.3 により定まる T_r^+ に属する weight $1/2$ の Maass wave form を g とする。そこで、 F と G の Mellin 変換を計算する。

$$\xi_2(G, u; s) := \int_{\mathcal{R}} G\left(\frac{iY}{2}\right) (\det Y)^s u(Y) dv(Y)$$

とおく。ただし、 $\mathcal{R}$ は $\mathcal{P}_2$ の $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用による基本領域を表し、

$$dv(Y) = (\det Y)^{-3/2} dy_{11} dy_{12} dy_{22} \quad (Y = (y_{ij}))$$

とする。Maass [Ma] の結果を使った形式的な計算により、

$$\xi_2(G, u; s) = 2\pi^{1/2} \pi^{-2s} \Gamma\left(s - \frac{1}{4} + \frac{ir}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{4} - \frac{ir}{2}\right) D_2(G, u, s).$$

ここで、 $D_2(G, u, s)$ は G の 量指標 u 付きの Koecher-Maass 級数を表す：

$$D_2(G, u, s) = \sum_{T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+ / SL_2(\mathbb{Z})} \frac{a(T)u(T)}{|Aut(T)|(\det T)^s}.$$

$D_2(G, u, s)$ は、 $a(T)$ の評価 (2.2) より $\operatorname{Re}(s)$ が十分大のとき絶対収束するので、その範囲で $\xi_2(G, u; s)$ も絶対収束し、 s の正則関数を表す。 $a(I_0 T I_0) = a(T)$ であるので、 u が odd のときは $D_2(G, u, s) = 0$ となり、 u が even のとき (従って v も even) だけ考えれば十分である。 $\operatorname{Prim}_2^*(\mathbb{Z})^+$ を原始的 (primitive) 正定値半整数対称行列の集合とする。 $a(T)$ の表示 (2.1) を利用して

$$\begin{aligned} D_2(G, u, s) &= \sum_{T_0 \in \operatorname{Prim}_2^*(\mathbb{Z})^+ / SL_2(\mathbb{Z})} \sum_{e=1}^{\infty} \frac{a(eT_0)u(eT_0)}{|Aut(eT_0)|(\det eT_0)^s} \\ &= \sum_{T_0 \in \operatorname{Prim}_2^*(\mathbb{Z})^+ / SL_2(\mathbb{Z})} \sum_{e=1}^{\infty} \sum_{0 < d|e} \chi(d) d^{k-1} \frac{a(\det(2eT_0)/d^2)u(T_0)}{|Aut(T_0)|e^{2s}(\det T_0)^s} \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{T_0 \in \operatorname{Prim}_2^*(\mathbb{Z})^+ / SL_2(\mathbb{Z})} \chi(d) d^{-2s+k-1} \frac{a(\det(2mT_0))u(mT_0)}{|Aut(mT_0)|(\det mT_0)^s} \\ &= L(2s - k + 1, \chi) \sum_{T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+ / SL_2(\mathbb{Z})} \frac{a(\det 2T)u(T)}{|Aut(T)|(\det T)^s} \end{aligned}$$

Katok-Sarnak の定理を使った Duke-Imamogole の trick を用いて

$$\begin{aligned} D_2(G, u, s) &= 4^s L(2s - k + 1, \chi) \sum_{T \in S_2^*(\mathbb{Z})^+ / SL_2(\mathbb{Z})} \frac{a(\det 2T)v(z_T)}{|Aut(T)|(\det 2T)^s} \\ &= 4^s L(2s - k + 1, \chi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)b(-n)}{n^{s-3/4}}. \end{aligned}$$

結局、

$$\xi_2(G, u; s) = 2\pi^{1/2} \pi^{-2s} 4^s \Gamma\left(s - \frac{1}{4} + \frac{ir}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{1}{4} - \frac{ir}{2}\right) L(2s - k + 1, \chi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)b(-n)}{n^{s-3/4}}$$

となる。この形を眺めると、保型形式 ψ 、 g の積とある Eisenstein 級数との Rankin-Selberg 型積分になっていることがわかる。そこで、合同群 $\Gamma_0(4)$ の χ 付きの Eisenstein 級数を復習する。

$$E_{\infty}(z, s) = \sum_{M \in \Gamma_{\infty} \backslash \Gamma_0(4)} \chi(d) \left(\frac{cz + d}{|cz + d|} \right)^k (\operatorname{Im} Mz)^s$$

とおくと、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ で収束し、 $\Gamma_0(4)$ の cusp ∞ での Eisenstein 級数になる。さらに、cusp 0 での Eisenstein 級数を

$$E_0(z, s) = \left(\frac{z}{|z|} \right)^k E_\infty \left(-\frac{1}{4z}, s \right)$$

で定義する。gamma 因子を付けて

$$\tilde{E}_\infty(z, s) = 2^{3s} \pi^{-s} \Gamma(s + k/2) L(2s, \chi) E_\infty(z, s)$$

$$\tilde{E}_0(z, s) = 2^{3s} \pi^{-s} \Gamma(s + k/2) L(2s, \chi) E_0(z, s)$$

とおく。これらの Eisenstein 級数は全 s -平面の有理型関数に解析接続され、関数等式

$$\tilde{E}_\infty(z, s) = (-i) \tilde{E}_0(z, 1-s)$$

を満たす。 $g \in T_r^+$ に対して、関数 g_0 を

$$g_0(z) = \sqrt{2} \left(\frac{z}{i} \right)^{-1/2} |z|^{1/2} g(-1/4z)$$

で定義すると、

$$g_0(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} B(4m, y/4) e^{2\pi i m x}$$

と Fourier 展開されることが知られている ([D-I], [Ib])。

$$\Lambda_\infty(\psi, g, s) = \int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathfrak{H}} y^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}} \psi(z) g(z) \tilde{E}_\infty(z, s) \frac{dx dy}{y^2}$$

$$\Lambda_\infty(\varphi, g_0, s) = \int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathfrak{H}} y^{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}} \varphi(z) g_0(z) \tilde{E}_\infty(z, s) \frac{dx dy}{y^2}$$

とおくと、これらは s の全平面で正則な関数になり、Eisenstein 級数の関数等式により、関数等式

$$\Lambda_\infty(\varphi, g_0, s) = 2^{k-3/2} \Lambda_\infty(\psi, g, 1-s)$$

を満たす。積分 $\Lambda_\infty(\psi, g, s)$, $\Lambda_\infty(\varphi, g_0, s)$ の右辺を unfold して忠実に計算すると、本質的にそれぞれ、 $\xi_2(G, u; s)$, $\xi_2(F, u; s)$ に一致することがわかる。すなわち、

$$\xi_2(G, u; s) = c(k) 2^s \Lambda_\infty \left(\psi, g, s - \frac{k-1}{2} \right)$$

$$\xi_2(F, u; s) = c(k) 2^{3/2-s} \Lambda_\infty \left(\varphi, g_0, s - \frac{k-1}{2} \right)$$

である。ただし、 $c(k) = 2^{3k/2-2}\pi^{1/4-k/2}$ 。

この表示より、 $\xi_2(F, u; s)$ と $\xi_2(G, u; s)$ は全 s -平面の正則関数（整関数）で、任意の垂直帯状領域で有界であり、関数等式

$$\xi_2(F, u; s) = \xi_2(G, u; k - s)$$

をみたすことが従う。任意の量指標 u についてこれらのことが成り立つので、太田 (Imai) の逆定理 ([Im], [Ib], [Su] 参照) が使えて、

$$F(iY^{-1}/2) = (\det Y)^k G(iY/2),$$

すなわち、

$$F(-(4Z)^{-1}) = \det \left(\frac{iZ}{2} \right)^k G(Z)$$

となる。 $\psi \in S_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ のとき、 $F = G$ は容易に従う。

注意) Siegel 保型形式に付随する Koecher-Maass 級数については、[Ma1] 参照。また、Koecher-Maass 級数に関連する話題については、第 1 回整数論オータムワークショップ報告集「Koecher-Maass 級数について」(1998, edited by T. Ibukiyama) に面白いことが、一杯詰まっている。

3 Maass および Eichler-Zagier の方法

ここでは、2 節で扱った lifting を Maass [Ma2]、Eichler-Zagier [E-Z] の方法で考えてみる。最初に関係する Jacobi 形式の空間を定義する。 k は正の奇数とする。

$\mathfrak{h} \times \mathbb{C}$ 上の正則関数 $\phi(\tau, z)$ で、次の 3 条件

- (i) $\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e(-\lambda^2\tau - 2\lambda z)\phi(\tau, z) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$
- (ii) $\phi(M(\tau, z)) = \chi(d)(c\tau + d)^k e\left(-\frac{cz^2}{c\tau + d}\right)\phi(\tau, z) \quad \forall M \in \Gamma_0(4)$
- (iii) ϕ は各 cusp で正則。

を満たすものの成す $\mathbb{C}$ -線型空間を $J_{k,1}(\Gamma_0(4), \chi)$ と記す。 $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(4), \chi)$ は

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n, r \in \mathbb{Z}, 4n \geq r^2} c(n, r) e(n\tau + rz)$$

と Fourier 展開される。2 変数 τ, z の theta 級数、 $\theta_0(\tau, z)$ 、 $\theta_1(\tau, z)$ を

$$\theta_0(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2\tau + 2nz), \quad \theta_1(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e((n + 1/2)^2\tau + 2(n + 1/2)z)$$

で定義する。いつものように、任意の $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(4), \chi)$ はこの theta 級数の線型結合で書ける：

$$\phi(\tau, z) = h_0(\tau)\theta_0(\tau, z) + h_1(\tau)\theta_1(\tau, z).$$

theta 級数については、次の変換公式はよく知られている：

$$\begin{pmatrix} \theta_0(M(\tau, z)) \\ \theta_1(M(\tau, z)) \end{pmatrix} = e\left(-\frac{cz^2}{c\tau + d}\right) \begin{pmatrix} j(M, \tau) & 0 \\ 0 & \mu(M, \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0(\tau, z) \\ \theta_1(\tau, z) \end{pmatrix}$$

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4).$$

$j(M, \tau)$ は Shimura の保型因子であり、 $\mu(M, \tau)$ も $\Gamma_0(4)$ の保型因子となる。 $|\mu(M, \tau)| = |c\tau + d|^{1/2}$ である。保型因子 $\mu(M, \tau)$ 付きの weight $k-1/2$ の保型形式の空間 $M_{k-1/2}^*(\Gamma_0(4))$ は、 $\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f で条件

- (i) $f(M\tau)\mu(M, \tau) = \chi(M)(c\tau + d)^k f(\tau) \quad \forall M \in \Gamma_0(4)$
- (ii) 各 cusp で正則

を満たすものの成す $\mathbb{C}$ -線型空間とする。

次の命題が成り立つ（証明は、上記の theta 級数の変換公式より容易に従う）。

Proposition 3.1 同型 $J_{k,1}(\Gamma_0(4), \chi) \longrightarrow M_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \oplus M_{k-1/2}^*(\Gamma_0(4))$ が成り立つ。この同型は写像 $\phi \mapsto (h_0(\tau), h_1(\tau))$ で与えられる。

各 $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_0(4), \chi)$ と自然数 m に対して Eichler-Zagier の作用素 V_m を

$$(\phi|_{k,1} V_m)(\tau, z) = m^{k-1} \sum_{M \in \Gamma_0(4) \backslash M_2^*, \det M = m} \chi(a)(c\tau + d)^{-k} e\left(-\frac{cz^2}{c\tau + d}\right) \phi\left(M\tau, \frac{mz}{c\tau + d}\right)$$

で定義する。ここで、 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と書いた。また、

$$M_2^* = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det M \neq 0, c \equiv 0 \pmod{4}, (a, 2) = 1 \right\}$$

とした。

Maass 部分空間 $\widetilde{M}_a(k, \chi)$ については、次の定理が基本的である。

定理 3.2 *Jacobi* 形式の空間 $J_{k,1}(\Gamma_0(4), \chi)$ は *Maass* 部分空間 $\widetilde{Ma}(k, \chi)$ に同型である。同型 $l: J_{k,1}(\Gamma_0(4), \chi) \rightarrow \widetilde{Ma}(k, \chi)$ は

$$l(\phi) \begin{pmatrix} \zeta & z \\ z & \tau \end{pmatrix} = \phi_0(\tau, z) + \sum_{m=1}^{\infty} (\phi|_{k,1} V_m)(\tau, z) e(m\zeta)$$

で与えられる。ただし、

$$\phi_0(\tau, z) = \left(\frac{(2/i)^{k-1} \Gamma(k) L(k, \chi)}{\pi^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0 < d|n} \chi(d) d^{k-1} \right) e(n\tau) \right) c(0, 0)$$

で、 $c(0, 0)$ は、 ϕ の最初の *Fourier* 係数とする。さらに、 l は同型 $l: M_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \rightarrow Ma(k, \chi)$ を引き起こす。この同型は、 $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ 上では ι に一致する。

参考文献

- [An] Andrianov, A. N.: Modular descent and the Saito-Kurokawa conjecture. **53**(1979), 267-280.
- [D-I] Duke, W. and Imamoglu, Ö.: A converse Theorem and the Saito-Kurokawa Lift, *International Mathematics Research Notices* **7**(1996), 347-355.
- [E-Z] Eichler, M. and Zagier, D.: *The Theory of Jacobi forms*, Birkhäuser, 1985.
- [Ib] Ibukiyama, T.: A survey on the new proof of Saito-Kurokawa lifting after Duke and Imamoglu, 第5回整数論サマースクール報告集「Siegel 保形形式入門」pp.134-176.
- [Im] Imai, K.: Generalization of Hecke's correspondence to Siegel modular forms, *Amer. J. Math.* **102**(1980), 903-936.
- [K-S] Katok, S. and Sarnak, P.: Heegner points, cycles and Maass forms, *Israel J. Math.* **84**(1984), 193-227.
- [Ko] Kojima, H.: On construction of Siegel modular forms of degree two. *J. Math. Soc. Japan* **34**(1982), 393-412.
- [Ku] Kurokawa, N.: Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two. *Inv. Math.* **49**(1978), 149-165.
- [Ma1] Maass, H.: Maass, H.: *Siegel's modular forms and Dirichlet series*, *Lecture Notes in Math.* **216**, Springer 1971.

- [Ma2] Maass, H.: Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades I, II, III. *Inv. Math.* **52**(1979), 95-104. **53**(1979), 249-253, **53**(1979), 255-265.
- [Ma3] Maass, H.: Über ein Analogon zur Vermutung von Saito-Kurokawa. *Inv. Math.* **60**(1980), 85-104
- [Su] Sugano, T.: Weissauer's Converse Theorem. 第1回整数論オータムワークショップ報告集「Koecher-Maass 級数について」, 1998. pp. 81-98.

Tsuneo Arakawa
Department of Mathematics
Rikkyo University
Nishi-Ikebukuro
Tokyo 171
Japan