

量子カオスと散逸の起源

京大理学部 戸田幹人

1. はじめに

統計力学の基礎づけ、すなわち散逸の力学的起源の問題は、Boltzmann以来の長い歴史を持っている。近年、この問題に新たな興味が持たれているが、その理由として、次の2つが挙げられる。

1つは、カオスの研究により決定論的な力学が確率的に振る舞うメカニズムが解明されたことである。このこと自体は、Poincare 以来の数学者の研究に負うもので、物理で知られるようになった1番の原因は、少数自由度系でもカオスが存在するという事実が持ったインパクトであろう。従来、自由度が大きいこと、それゆえに力学についてそのすべてを知ることは不可能であるということが、統計力学の必然性なのだと考えられてきた。少数自由度のカオスは、この発想に疑問を投げ掛けたのである。

2つ目は、量子古典対応から、量子力学にもカオスが存在するのではないかという期待、そうであるならば、統計力学を量子系のカオスによって基礎づけられるのではないかという問題意識である。量子系のカオスの存在は、Rydberg原子を用いて、実験的に検証しうる段階にある[1]。また、Landauer による抵抗の公式以来、理論・実験の両面で盛んなメソスコピック系の物理も、量子力学における散逸の起源について、新たな考えを必要としている[2]。

カオスにもとづいて統計力学を基礎づけようとするとき鍵となるのは、系自体の力学の複雑さということである。これは、従来の、観測による粗視化が散逸の起源であるという立場と異なる。このとき、少数自由度系でも力学は複雑になりうるという事実が重要である。これは古典系ではよく知られるようになったが、量子系ではまだ一致した見方ではない。事実、例えばPrigogineの「存在から発展へ」では、古典系ではカオスが散逸の起源とされているのに対して、量子系では、散乱過程の存在、すなわち、連続スペクトルの存在が散逸の起源とされている[3]。

この小文の目的は、カオスが量子系の複雑さを産み出すこと、その複雑さが量子系の散逸の起源なのではないかという問題を提起することである。そのためにまず古典系のカオスの複雑さから始めよう。

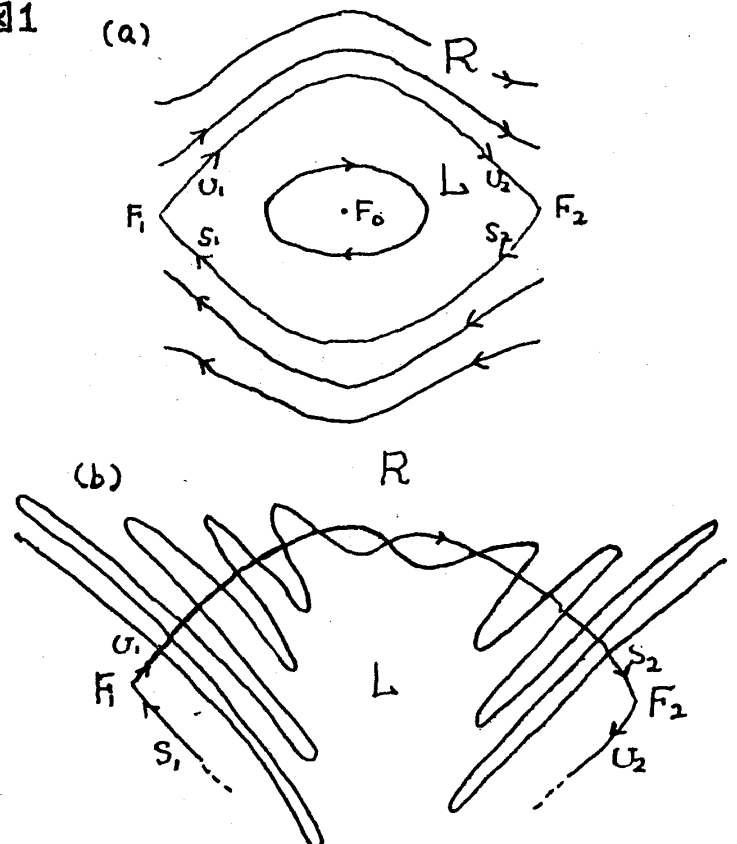
2. 古典系のカオスの複雑さ

2.1. ヘテロクリニック構造[4]

カオスが複雑な軌道を生み出すメカニズムは、双曲的な固定点の安定多様体と不安定多様体の交差（ヘテロクリニック構造）、それによる引き伸ばしと折り畳みである。図1(a)に示すのは重力振り子の位相空間での軌道の様子である。振り子の軌道は、下向きに静止している安定な固定点の回りで振れる運動と、ぐるぐる回る運動の2種類からなる。この2種類の軌道の境界をなすのは、振り子が上向きに静止する不安定な固定点（双曲的固定点）と、それから出発し（不安定多様体）、また漸近していく（安定多様体）セパトリックスである。安定多様体と不安定多様体が一致してセパトリックスを構成するのが、可積分系の特徴である。

重力振り子に摂動を加えたとき、安定多様体と不安定多様体はもはや一致せず、交わるようになる（ヘテロクリニック構造）。この様子を図1(b)に示す（Poincare 断面）。このとき不安定多様体は双曲的不動点に漸近するにつれて、

図1



引き伸ばされ折り畳まれて馬のひずめの様な形へと変わっていく (Morse・Smaleの馬蹄形力学)。この過程で、振動を行っていた軌道の一部は、回転運動の領域へと移り、他方、回転を行っていた軌道の一部は振動の領域へと移動する。摂動を受けた重力振り子の軌道は、このようにして双曲的固定点の傍を通り過ぎる度に振動Lか回転Rかどちらかに割り振られていく。

この割り振りをを用いて、軌道にRとLからなる記号列を対応させることが出来る。このとき、任意の記号列に対して、少なくとも1つの軌道が対応することが証明できる。記号RとLをコインの表裏と考えれば、これは、決定論的な力学が、確率的な挙動を内包していることを意味する。粗視化ということを使わなくても、系自体が確率的な運動を行なうのである。

2.2. 記号力学

上記のように、軌道そのものではなく、それを記号化したものを用いることを記号力学という。これによって、力学の本質的な部分を議論することができるのである。その一例として、周期軌道の数の評価してみよう。位相空間で一周して元に戻る周期軌道を素な周期軌道と呼ぶことにしよう。記号力学を用いれば、次のようにして、周期 n を漸近的に無限大にした時の素な周期軌道の数 K_n を評価することが出来る。用いる記号の数を m 個とすると長さ n の記号列の数は m^n で与えられる。これらの記号列のうち、より短い周期を持つものの割合は、 n を基本周期とするものに比べて漸近的には無視できるであろう。また、周期軌道であることから、始めの場所のとり方には、 n 個の自由がある。以上のことから、

$$K_n \approx e^{n \log m} / n$$

であることがわかる。ここで、 $s = \log m$ はトポロジカルエントロピーという量である。上の式は、素な周期軌道の数が増加することを示しており、古典力学のカオスの複雑さを特徴づけていると良い。ちなみに可積分系では、素な周期軌道数は周期の多項式で増加する。またこの式は素数定理のアナロジーであり、量子カオスとRiemannのゼータ関数の関係を示している[5]。

記号力学のもっとも簡単な例として、パイコネ変換を説明しておこう。カオスとしては人工的な例であると思われるかも知れないが、パイコネ変換の量子力学も存在しており[6]、また後程示すように思考実験にも適しているという点で有用な例である。パイコネ変換は次の式

$$X_{k+1} = 2X_k \bmod 1, \quad P_{k+1} = \begin{cases} P_k/2 & 0 \leq X_k < 1/2 \\ (P_k+1)/2 & 1/2 \leq X_k < 1 \end{cases}$$

で与えられる $0 \leq X < 1, 0 \leq P < 1$ の上の保測変換である。言葉で説明するよりも絵で見た方がわかりやすいであろう。図2(a)に示すのがパイコネ変換である。時刻 k における初期条件を2進展開して

$$X_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k,i} / 2^i, \quad P_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k,i} 2^{i+1}, \quad a_i = 0 \text{ or } 1$$

とする時、パイコネ変換は2進展開のずらし

$$a_{k+1,i} = a_{k,i+1}$$

となる。これは初期条件の情報がマイクロからマクロへ、またマイクロへと、ところてん式に流れていると捉えることも出来る(図2(b))。

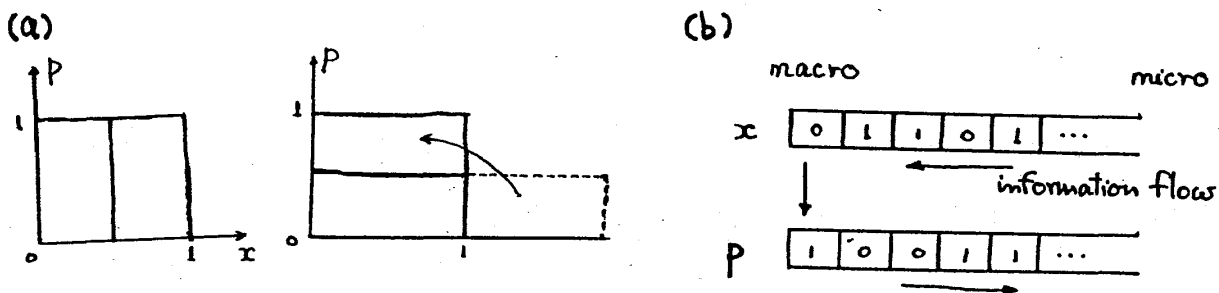


図 2

3. 統計力学の基礎づけとしての複雑さ

この小文の目的は、統計力学の基礎にある力学の複雑さについて解説することである。前の節でカオスの複雑さとして周期軌道の数 N の指数的発散を示したが、ここではより一般的に複雑さについて述べてみよう。

3.1. Kolmogorov の複雑さ[7]

Kolmogorovは測度論、すなわちアンサンブルに基づく確率論を公理化したことで有名だが、他方で次のような、いうなれば個物に基づく理論も提出している。長さ n の 0 と 1 からなるビット列が与えられたとする。この時、Turing機械を用いて、このビット列を複製することを考える。そのためには、Turing 機械にプログラムとデータを与えなければならない。必要なプログラムとデータは、プログラムの書き方によって長くもなれば短くもなるだろうが、最低限どうしてもこの程度の長さは必要であるという最小の長さがあるであろう。その長さは、元のビット列によるので、この長さ、正確にはその対数を元のビット列の複雑さとしよう。これがKolmogorov による複雑さである。

例えば 01 が n 回繰り返すビット列がある時、この複雑さは $n \rightarrow \infty$ で漸近的に $\log \log n$ となる。これは簡単な例であるが、一般にはKolmogorov の複雑さは、定義可能であるが計算不能である (Goedel の不完全性定理)。ほとんどのビット列については、それをそのまま複製する他なく、複雑さはビット列の長さ n そのものの対数 $\log n$ となる。この2つが両極端であるが、具体的にあるビット列を示してその複雑さを計算したいというとき、その計算方法を与える汎用のアルゴリズムは存在しない。Kolmogorovの複雑さとカオスの関係は、パイコネ変換を考えれば明らかであろう。パイコネ変換の軌道の複雑さは、初期条件を2進展開した時のビット列の複雑さに他ならない。

Kolmogorov の複雑さの計算不能性は、エルゴード仮説のように個々の軌道をアンサンブルにすり替える仮説を入れずに、あくまでも個々の力学軌道から統計力学を基礎づけようとする時、克服するのが原理的に不可能な障壁となるであろう。従って、ここでの我々の立場は、やはり軌道のアンサンブルを前提にするものとなる。カオスの力学がつくり出す軌道の多様性を複雑さの指標とするのである。前節で導入した周期軌道の数 N がそれである。

3.2. 世界の多様性

カオス軌道の多様性といったが、これで我々の住む世界の現象の多様性をすべて尽くしているかといえば、決してそうではない。この節では、今までの議論で尽くされていない質の多様性を列挙してみよう。ただし、この話は小文の主要な目的ではないので、列挙するにとどめる。

(1) カオスとトーラスの共存

一般の力学系の位相空間ではカオスとトーラスが並存している。このような場合には、位相空間がカオスのみからなる時には見られない現象、例えば $1/f$ 雑音[8]、マルチフラクタル[9]などが見られる。

(2) カオスの非一様性

前述のパイコネ変換では、記号 0 の領域と 1 の領域の面積が同じであったが、一般にそれぞれの記号に対応する領域の面積が異なる変換を考えることも出来る。周期軌道の数については、前節の評価がそのまま成り立つが、それらの出現頻度は異なる。トポロジカルエントロピーではこれらを区別できないが、測度論的エントロピーを用いれば区別することが出来る。

(3) 情報の流れの非一様性

パイコネ変換では、初期値の情報がミクロからマクロへ、またミクロへと一方向のみに流れていたが、淀み、部分的な再帰など、もっと多様な流れを持った力学系を考えることが出来る。このような系では、例えば、外部からの雑音によって、カオスからよりオーダーした運動へと変化する[10]など、可積分系では見られない性質を持っていることが知られる。

(4) その他

以上に挙げた例以外にも、フラストレーション、絡み合い、障害物などを持った様々な力学系を考えることが出来るであろう。これらの系において、ミクロの力学とマクロの現象の関係を調べるという問題は、広い意味での統計力学の基礎づけと考えることが出来る。

3.3. まとめ

古典系のカオスの複雑さを特徴づけるものとして、周期軌道の数の指数的増大を述べた。以下では、これが量子力学でどのような役割を果たすのかを述べていくことになる。

4. 量子カオスの断熱不変性

量子系の散逸を論ずる場合いろいろな切口があるが、ここでは断熱不変性から考えることにする。Ehrenfest の断熱定理[11]からわかるように、断熱不変性は量子力学と古典力学を結ぶ概念であるとともに、力学と統計力学を繋ぐ要でもあるからである。ただしここでの議論はまだ作業仮説の段階のものであり、より一層の理論的研究、あるいは、数値実験による検証が必要であることをお断りしておく。

以下の内容を概括しておく。まず、量子系の断熱性について、特に時間スケールの問題を指摘する。その後、量子カオス系に特徴的な時間スケールの存在を、記号力学とそれを用いた思考実験で示す。以下、この時間スケールの持つ物理的意味を、断熱不変性、およびトレース公式を持ちいた半古典的な量子化条件において論ずる。最後に、カオスの複雑さの反映として、波動関数の位相の複雑さについて論ずる。

4.1. 量子系の断熱不変性の特徴的な時間

量子系の断熱不変性の特徴づける時間とは何かというのがここでの問題である。Planck定数をエネルギー準位の間隔で割ったもの

$$T_A \approx h/\Delta E$$

というのが普通の考えであろう。確かに、量子系の断熱近似で良く知られているように、外部パラメーターがよりゆっくり変化した時、隣あった準位への遷移はなく、量子数は保存する。しかし、これが即、熱力学的な意味での断熱性を意味するのかは疑問である。なぜなら、自由度の巨視的な系では、エントロピーの加算性からわかるように、状態数は自由度 N の指数関数で増大する。

$$S_N = \log \Omega_N \approx O(N), \quad \Omega_N \approx e^{O(N)}$$

アボガドロ数程度の自由度の系ではこの時間 T_A は宇宙的な時間となるであろう。従ってこの時間スケールで我々の日常的な世界での断熱性を議論するのは不適當である。熱力学的な断熱性のためには自由度についてもっと緩やかに増大する時間スケールが存在しなければならない[12]。

次の節では、量子カオスに特徴的な時間スケールの存在を議論するのだが、その前に、可積分系、特に双曲的な不動点を持つ可積分系の断熱不変性を論ずることにしよう。良く知られているように、可積分系では次の積分

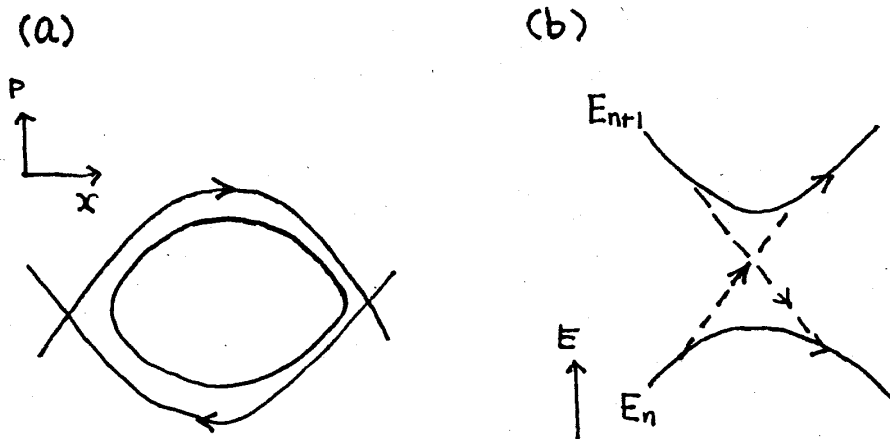
$$I = \int p dx$$

が断熱不変である。この積分がPlanck定数の整数倍となるというのが、半古典的な量子化条件を与える。これがEhrenfest の断熱定理だが、すでに彼自身が気付いていたように、双曲的な不動点が存在する時にはこの定理は成り立たない。

直観的には、次のように考えることが出来る。古典系のトーラスで断熱性が成り立つためには、パラメーターの変化がトーラスの周期より十分長ければ良いであろう。ところが双曲的な不動点の回りでは周期は無限大に発散する。従ってどんなにゆっくりパラメーターを変化させても双曲的な不動点の近傍では断熱不変性は破綻する。一般に双曲的な不動点の回りではトポロジカルに異なる軌道が隣あっているから、この近傍での非断熱性は、これらが混じり合い大きな乱れを生じることを意味する。

量子力学では、隣合ったトーラスはプランク定数だけ異なる積分を持たなければならない。このため、双曲的不動点の近傍で量子化されるトーラスは有限個となり、古典論では発散する時間に上限を設定する。この時間より十分ゆっくりパラメーターが変化すれば、トーラスに対応する量子数は断熱不変であろう。従って、Planck定数で決まる或る時間 T_h が存在し、この時間よりゆっくりしたパラメーターの変化の下で、量子論の時間発展は対応する古典論のそれと異なるものとなる。図3にその様子を示した[13]。

図3



量子論では、量子化されるトーラスの数が有限である（セパトリックスと、実線で示したトーラスの間の面積はプランク定数より小さい）

T_h よりゆっくりしたパラメーターの変化の下では量子論は実線をたどる。古典論では点線をたどる。

カオスでは周期が長くなるにつれ周期軌道の数はい指数関数的に増大する。しかも個々の軌道は双曲的だから、それぞれの軌道の近傍に周期が無限に発散する周期軌道が存在する。従って個々の軌道については断熱不変性は成り立たない。この時には、等エネルギー面で囲まれる位相空間の体積が断熱不変であることが知られる。断熱不変性を特徴付ける時間は、エルゴード性、すなわち時間平均が位相空間平均に等しくなるのに要する時間である[14]。

量子カオスでは、古典論で無限に発散する周期に上限が存在することが期待できる。この時には、前述した可積分系の双曲的不動点の場合と同様のことが期待できるであろう。その議論に入る前に、量子カオスで存在する特徴的な時間について説明しよう。

4.2. 量子カオスの隠れた変数

この節では、量子カオスにおける記号力学を考え、それが観測の問題で良く知られている隠れた変数であることを示す。量子力学が隠れた決定論的記述を持たないことが、量子力学で用いられる記号列の長さに上限を設定する。

思考実験に最適なものは、パイコネ変換の量子力学である。通常の観測では、1つの系に対して1回のみ観測を行なうが、ここでは同一の系に対して複数回の観測を行なう。観測するのは、記号力学の記号である。具体的には、ヤングのスリット実験、または波数空間でのフィルター、あるいはそれらの組合せを用いることになる。

或る波動関数で記述される系に対して、1回パイコネ変換を行なう度に記号の観測を行なうとする。これを n 回繰り返して、長さ n の記号列を得たとする。このような複数回の観測の組を、同じ波動関数で記述される系のアンサンブルに繰り返せば、そのアンサンブルにおける記号列の出現頻度を得ることが出来る。ある記号列 $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ の確率を、

$$P(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

とする。この時、時刻 $k=[n/2]$ での座標 X_k 、運動量 P_k は、

$$X_k \approx \sum_{i=[n/2]+1}^{n-1} a_i/2^i, \quad P_k \approx \sum_{i=0}^{[n/2]} a_i/2^{[n/2]-i}$$

となる([]はGaussの記号)。記号列の長さ n はいくらでも長くとることが出来るので、これから、時刻 $k=[n/2]$ での座標、運動量の値をいくらでも精密に測定できることとなり、量子力学の不確定性原理に矛盾する。この矛盾はどこに現れるであろうか。量子力学との矛盾が現れる時刻は次の式で得られる。

$$T_R = \log h/s$$

これより長い記号列の観測に対しては、排反事象の確率の加算性、が成り立たないことが予想できる。仮に、この加算性が常に成り立っていたとすると、量子力学の不確定性を記号列という隠れた変数で決定論的に（コイン投げと等価な古典的確率論で、といっても良い）記述できることになるからである。

以上の議論から、量子カオスに特徴的な時間 T_R が得られた。ただし次のような疑問を抱く方がおられるかも知れない。ここで記号列を隠れた変数といってきたが、この変数は観測可能であって、隠れてはいないではないか。確かにパイコネ変換では、記号に対応する領域が簡単な形であったので、記号を観測することが出来る。しかし一般の多自由度系では、位相空間を記号に対応する領域に分割すること（マルコフ分割という）は可能ではあるが、その領域の形を観測するのは困難である。特に、自由度の多い系では、マルコフ分割の各領域の境界が解析的でなくなるといわれる。この場合には、記号の観測はエルミート演算子で表現できないので、記号の観測は確かに隠れたものとなる。このような時にも、隠れた変数による記述と量子力学を区別する思考実験が可能であるかはまだわからない。

4.3. 量子系の断熱性再論

前節で導入した時間スケールを多自由度に拡張してみよう。位相空間の大きさ Ω_N は自由度 $N \rightarrow \infty$ で漸近的に、指数関数で増大する。従って、荒い評価として、自由度に比例する時間スケール

$$T_R \approx \log(h^N/O(e^N)) \approx O(N)$$

が得られる。これが量子カオスで存在する周期軌道の周期の上限を与える。

他方Gutzwillerによる半古典的なトレース公式によれば[15]、エネルギーレベルの全体と古典論の周期軌道の全体の対応関係が得られる。しかし、可積分の時にそれぞれのレベルにトーラスが対応したような、各レベルに対する量子化条件はカオスでは得られない[16]。しかしこのような場合にも、次のような予想を立てることは出来る。量子カオスに特徴的な時間 T_R より短い周期を持つ周期軌道は、量子力学では近似的に1次独立である。これに対して、長い周期を持つ軌道は独立ではあり得ず、それぞれの軌道は別の軌道群の重ね合わせで表現できる。これらの軌道は集団としてトレース公式に寄与するであろう。このように、トレース公式に対する寄与の仕方が、時間スケール T_R を境にして、全く異なることが予想される。

ここでは仮に、周期が T_R より短い周期軌道がそれぞれ固有状態に対応するとしてみよう。この時、量子状態に対応する周期軌道の数 K は自由度に対して、

$$K \approx O(e^N)$$

となる。従って、周期軌道の周期の間隔が時間スケール T_A といつて良い。エネルギーレベル1つ1つが不変であるためには、パラメーターはこの時間スケールよりゆっくり変化しなければならない。しかしこの時間は、熱力学の時間としては長過ぎる。熱力学における断熱性を特徴付ける時間スケールは、これら2つの時間の間にあるはずである。それはまだ特定されていない。

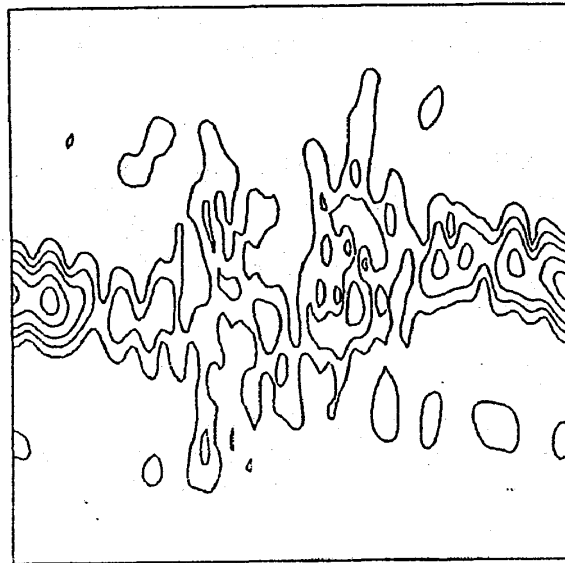
4.4. 量子カオスにおける位相の複雑さ

時刻 T_R より長い時間スケールでは何が起きているのだろうか。図4に示すのは、次の写像[17]

$$p_{k+1} = p_k + K \sin x_k, \quad x_{k+1} = x_k + p_{k+1}$$

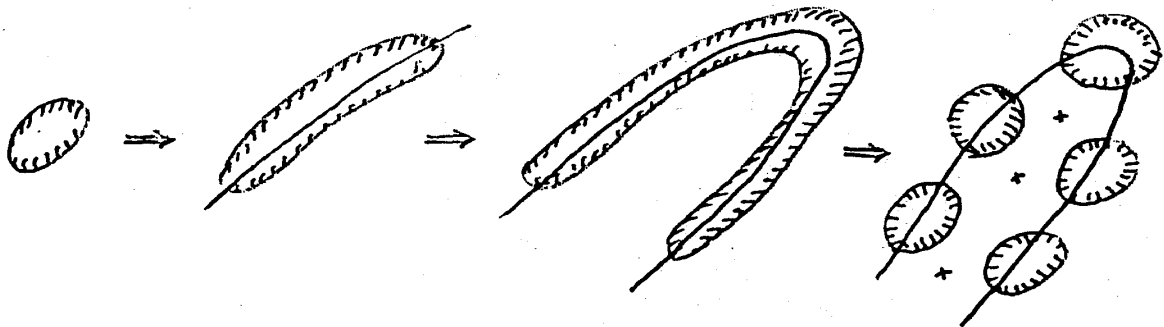
に対応する量子力学で波束を時間発展させたものを位相空間表示で示したものである。

図4



模式的に言えば、次の図5のようになる。波束はまず不安定性によって指数的に引き延ばされ、次に折り畳まれる。この構造がプランク定数より細かい構造を成す時、量子力学では折り畳まれた波束の枝の間で量子干渉が発生する。このようにして量子カオスは、対応する古典系の複雑さに応じて、複雑な量子干渉をつくり出す[18]。

図5



このような位相の複雑さが散逸の起源となり得るかという問題はこれまで考えられてこなかった。従来のエントロピー生成は von Neumann が与えたものだが、彼によればエントロピー生成は次のように定義される[19]。

$$\sum_{n,m} \rho_{n,m} \log \rho_{n,m} \rightarrow \sum_n \rho_n \log \rho_n$$

たとえば、座標表示での固有関数を波数空間で観測すれば、最大のエントロピー生成が得られる。このエントロピー生成は位相の情報を失うことによるが、この時失われる情報は、座標方向の一様なずらしに相当するもので、波動関数そのものの複雑さとは関係がない。実際、この時には、波動関数の形に対する情報は復元することが出来る（位相回復問題）。位相の情報の複雑さとい

う概念がないことが、従来のエントロピー生成の記述の欠点である。筆者は、波動関数の絶対値の情報から、位相の情報（即ち、波動関数の形）を復元できるかという問題を考え、可積分の場合と非可積分の場合で違いがあることを発見した[20]。このような立場から、散逸の起源を論ずるにはまだしなければならないことが多いが、新しい見方を提供できるものと考えている。

5. 結論

カオスの複雑さとして、周期軌道の数が増大することをあげた。量子力学では、記号列の長さに上限が存在する。この上限の物理的意味を、断熱不変性、半古典量子化の問題から論じた。カオスの複雑さが量子力学では位相の複雑さに現れることから、位相の複雑さを特徴付ける問題を指摘した[21]。散逸の起源を基礎付けるには、まだ距離は大きい、筆者の問題意識が理解していただければ幸いである。

参考文献

- [1] J.Bayfield & D.W.Sokol Phys. Rev. Lett. 61(1988)p.2007
E.J.Calvez, B.E.Sauer, L.Moorman, P.M.Koch & D.Richard Phys. Rev. Lett. 61(1988)p.2007
G.Casati & L.Molinari Prog. Theor. Phys. Suppl. 98(1989)p.287
- [2] R.Landauer Z.Phys. B68(1987)p.217
- [3] I. プリゴジン 存在から発展へ (みすず書房1984)
- [4] J.Moser Stable and Random motions in dynamical systems (Princeton 1973)
アーノルド&アベズ 古典力学のエルゴード問題 (吉岡書店1972)
- [5] 戸田、足立 & 長谷川 量子カオスとゼータ関数 日本物理学会誌 44(1989)p.599
- [6] N.L.Balazs & A.Voros Ann. Phys. 190(1989)p.1
- [7] A.N.Kolmogorov IEEE Information Theory 14(1968)p.662
- [8] Y.Aizawa et. al. Prog. Theor. Phys. Suppl. 98(1989)p.36
- [9] M.C.Gutzwiller Physica D38(1989)p.160
- [10] K.Matsumoto & I.Tsuda J.Stat.Phys. 31(1983)p.87
- [11] P.Ehrenfest Phil. Mag. 33(1917)p.500
in Sources of Quantum Mechanics ed. B.L.Van der Waerden(Dover 1968)
- [12] S.K.Ma Statistical Mechanics (World Scientific 1985) p.403
- [13] M.V.Berry J. Phys. A17(1984) p.1225
- [14] T.Kasuga Proc. the Academy of Japan 37(1961) p.366-382
- [15] M.C.Gutzwiller J. Math. Phys. 8(1967)p.1979,10(1969)p.1004,
11(1970)p.1791,12(1971)p.343
- [16] A.Voros J. Phys. A21(1988) p.685
- [17] V.Chirikov Phys. Rep. 52(1979)p.263
- [18] K.Takahasi & N.Saito Phys. Rev. Lett. 55(1985)p.645
- [19] J.v. ノイマン 量子力学の数学的基礎 (みすず書房1957)
- [20] 戸田 量子カオスにおける位相回復 物性研究53(1990)No.2 p.608
- [21] 位相の複雑さに関する興味深い例として
M.C.Gutzwiller Physica 7D(1983) p.341