

複素多様体のモデル理論

東海大・理・情報数理 桔梗宏孝 (Hirotaka Kikyo)

Dept. of Math. Sci., Tokai University

kikyo@ss.u-tokai.ac.jp

1 はじめに

Hrushovski は関数体上の Mordell-Lang 予想をモデル論的手法で証明した [3]. そこで使われた手法を別の状況で使うと何がわかるかという研究が行われているが, ここでは, Pillay と Scanlon による複素多様体に対する応用を紹介する.

Hrushovski の証明では, Zariski 幾何における場合分け定理が重要であったが, すべての複素多様体とか複素空間をそれぞれソートとし, 解析的に定義できる関係を基本関係 (述語) として考えた一階の構造 $\mathcal{A}$ においても, Zariski 幾何に関する結果が使えることを Hrushovski と Zilber がすでに指摘していた [4].

複素数体で論理式で定義可能な群は代数群になることが Hrushovski と van den Dries によって示されており, それが Mordell-Lang 予想の証明でも重要な要素になっていたが, 同じ方法により, 上に述べた巨大な構造 $\mathcal{A}$ において定義可能な群は本質的に有理形群というものになることがわかる. この有理形群に対しても Chevalley の定理の拡張が成り立つこと, すなわち, 連結な有理形群 G は, 線形代数群の複素トーラスによる拡大になっていることを Pillay と Scanlon は示した [7]. この記事ではこの証明のさわりを紹介する. この結果の特別な場合が藤木 [1] によって得られており, 証明の一部で使われている.

2 複素多様体と複素空間

定義 2.1 複素多様体 M の部分集合 X が局所的に有限個の正則関数の共通零点になっているとき, X を解析的と呼ぶ. 解析的集合を Zariski 閉集合とも呼ぶ. Zariski 閉集合全体は位相 (Zariski 位相) を定義する.

事実 2.2 (Zilber) A_i ($i \in I$) を M の有限個の直積の解析的部分集合全体とするとき, これらを関係としてできる一階の構造 $\mathcal{M} = (M, A_i)_{i \in I}$ を考えると, $\text{Th}(\mathcal{M})$ は QE を許し, その Morley 階数は有限で, $\mathcal{M}$ は $\aleph_1$ コンパクトである.

量子子の消去は次の事実による.

事実 2.3 (Remmert) 複素多様体 M に対し, M^{n+1} の解析的部分集合の M^n への射影は解析的である.

Morley 階数などは一般には M の初等拡大で考える必要があるが, M が $\mathbb{N}_1$ コンパクトになるので, Morley 階数と次数は M で考えればよいことから, 事実 2.2 が導かれる.

定義 2.4 $V \subset D \subset \mathbb{C}^n$, D は開集合で, V は D 上の有限個の正則関数の零点集合とする. また, D 上の正則関数の層の V への制限を $\mathcal{O}_V$ と書く.

X がハウスドルフ空間で, $\mathcal{O}_X$ が局所 $\mathbb{C}$ 代数の「構造層」とする. 任意の $x \in X$ に対し $x \in U$ なる U が存在して $(U, \mathcal{O}_U)$ が $(V, \mathcal{O}_V)$ と同型になるとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ を複素空間と呼び, $(V, \mathcal{O}_V)$ をそのモデル空間と呼ぶ. このカテゴリーの射 $f: X \rightarrow Y$ を正則写像と呼ぶ.

既約なコンパクト複素空間のカテゴリーを $\mathcal{A}$ と書く.

定義 2.5 $X, Y \in \mathcal{A}$ で, $f: Y \rightarrow X$ とする. $A \subsetneq Y, B \subsetneq X$ となる解析的閉集合 A, B が存在し, $f: Y \setminus A \rightarrow X \setminus B$ が双正則になるとき, f を X の変形 (modification) と呼ぶ. 変形 $f: Y \rightarrow X$ で Y が非特異 (Y は連結なコンパクト複素多様体) になるとき, これを特異点の解消と呼ぶ. このとき, $X \subset Y^{\text{sa}}$ となることを注意しておく.

定義 2.6 $f: X \rightarrow p(Y)$ に対し, f の“グラフ” $\{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}$ が $X \times Y$ の既約な解析的部分集合で, X の稠密な Zariski 開集合 U が存在して任意の $x \in U$ に対して $f(x)$ が一点集合になっているとき, f を有理形写像 (meromorphic mapping) と呼ぶ. Z を f の“グラフ”として $\pi: Z \rightarrow X$ を射影とすると (Z, π) は X の変形になっている. 記法を流用して, この状況を $f: X \rightarrow Y$ が有理形写像であるという.

$U \subset X \in \mathcal{A}$ が Zariski 開集合で $f: U \rightarrow Y \in \mathcal{A}$ が正則のとき, 有理形写像 $g: X \rightarrow Y$ が存在して U 上で $g = f$ のとき, 用語を流用して f も有理形写像と呼ぶ.

$\mathcal{A}$ にともなって考えられる自然なカテゴリーとして, $\mathcal{A}$ に属する空間の Zariski 開部分集合になっている複素空間を対象とし, 今述べた意味で有理形である正則関数を射とするものがある. X, Y を射影代数多様体に限れば, これは準射影多様体と射のカテゴリーである.

各 (被約で既約な) コンパクト複素空間を 1 つのソートとし, それらの有限直積の解析的部分集合を基本関係とする多ソートの一階構造として $\mathcal{A}$ を考える.

事実 2.7 $\text{Th}(\mathcal{A})$ において量化子の消去, 仮想元の消去ができ, 各ソートは有限の Morley 階数をもつ. さらに, $\mathcal{A}$ は $\mathbb{N}_1$ コンパクトである.

この事実の証明は最初の事実 2.2 と同様で, Zilber [8] による. ただし, 仮想元の消去は Pillay [6] による.

3 有理形群

Pillay と Scanlon は有理形群を次のように定義した.

定義 3.1 連結複素 Lie 群 G が次の条件を満たすとき, G を有理形群と呼ぶ. 有限開被覆 W_i ($i = 1, \dots, n$) をもち, 各 i に対し, W_i と, ある $X_i \in \mathcal{A}$ の Zariski 開集合 U_i との双正則な同型写像 φ_i が存在し,

- (1) 各 $i \neq j$ に対し, $\varphi_i(W_i \cap W_j)$ は X_i の Zariski 開集合で, $\varphi_i(W_i \cap W_j)$ と $\varphi_j(W_i \cap W_j)$ の間にできる正則写像が有理形で (すなわち, X_i と X_j の間のある有理形写像を制限したものになっている),
- (2) 各 i, j, k に対し, $\{(x, y) \in U_i \times U_j : \varphi_i^{-1}(x) \cdot \varphi_j^{-1}(y) \in W_k\}$ が $X_i \times X_j$ の Zariski 開部分集合で, 引き起こされる $U_i \times U_j$ から U_k への双正則写像が有理形である (すなわち, $X_i \times X_j$ と X_k の間の有理形写像を制限したものになっている).

G の閉部分群 H に対し, 各 i について, $\varphi_i(H \cap W_i)$ が X_i の解析的部分集合と U_i の共通部分になっているとき, H を G の有理形部分群と呼ぶ. H は有理形群の構造をもつ.

有理形群の間の正則準同型が有理形とは, 各チャートに制限したとき, それが有理形になっているということである.

有理形群と有理形準同型でカテゴリーができる. $\mathcal{A}$ における仮想元の消去により, 有理形群は $\mathcal{A}$ において定義可能である. また, $\mathcal{A}$ における量子子の消去により, $\mathcal{A}$ で定義可能な写像は「区分的に」有理形写像になることがわかる.

また, 代数的閉体において定義可能な群が代数群になることの Hrushovski と van den Dries による証明と同じ方法により次のことがわかる.

定義 3.2 $\mathcal{A}$ で定義可能な群 G が有限次数の定義可能な部分群をもたないとき, G を連結群と呼ぶ.

事実 3.3 $\mathcal{A}$ において定義可能な連結群は連結な有理形群と定義可能な写像により同型になる.

この事実により, 有理形群のカテゴリーと $\mathcal{A}$ で定義可能な群のカテゴリーは自然に同値になる. $\mathcal{A}$ における仮想元の消去により, 次のこともわかる.

事実 3.4 G が有理形群で N が G の有理形正規部分群ならば, ある有理形群 H と G から H への全射有理形準同型が存在して, その核が N になる.

Hrushovski と Zilber[4] は $\mathcal{A}$ における強極小集合が Zariski 幾何になることを示したので, Zariski 幾何に対する結果 [5] が使えて次がわかる.

事実 3.5 G は A で定義可能な連結群で、定義可能な無限の正規部分群をもたないとする。すると、 G は強極小でモジュラーであるか、あるいは G は複素代数群と定義可能な写像で同型である。

これから、代数的でない単純複素トーラスがモジュラーになることがわかるが、Pillay は直接的な証明を与えている [6]。

4 藤木の結果

有理形群は藤木によって次のように定義されていた。以下、この定義の群を藤木有理形群と呼ぶことにする。

定義 4.1 G を複素 Lie 群とする。

- (1) コンパクト複素空間 $G^* \in A$ が G を Zariski 稠密な部分集合として含み、群演算 $\mu : G \times G \rightarrow G$ が $\mu^* : G^* \times G^* \rightarrow G^*$ なる有理形写像の G への制限になっているとき、 (G^*, μ^*) を G の有理形コンパクト化と呼ぶ。
- (2) G の有理形コンパクト化 (G^*, μ^*) に対し、 μ^* が $(G \times G^*) \cup (G^* \times G)$ 上で正則 (holomorphic) のとき、それを G の藤木コンパクト化と呼ぶ。
- (3) G が藤木コンパクト化をもつとき、 G を藤木有理形群と呼ぶ。

藤木有理形群は有理形群である。連結コンパクト複素 Lie 群 (例えば複素トーラス) は藤木有理形群である。また、複素代数群は藤木有理形群である。

次の定義は藤木による [1]。

定義 4.2 有理形群 G において単位元を含む連結成分を G^0 とするとき、連結線形代数群 L と複素トーラス T が存在して

$$1 \rightarrow L \rightarrow G^0 \rightarrow T \rightarrow 1$$

が有理形準同型の完全系列になるとき、 G を正則 (regular) と呼ぶ。この状況を G^0 が線形代数群 L の複素トーラス T による拡大になっていると表現する。

この定義において、 L と T は一意的である。また、 L は線形代数群と有理形同型になる G^0 の最大な連結正規有理形部分群である。また、正則な有理形群は藤木有理形群になる。

定義 4.3 連結なコンパクト Kähler 多様体の正則写像による像からなる A の部分カテゴリーを C と書く。連結有理形群 G の藤木コンパクト化 G^* が C に属するとき、 G を C 型と呼ぶ。

藤木は次を示した [1]。

事実 4.4 G が藤木有理形群のとき、 G が正則であることと G が C 型であることは同値である。 G が可換で藤木有理形群ならば G は正則である。

5 有理形群の構造

Pillay と Scanlon は連結有理形群に対しても, Chevalley の定理の類似が成り立つこと, すなわち藤木の意味で正則 (定義 4.2) になることを示した. この節ではその議論の流れを解説する. まず, 特別な形の可換な有理形群が藤木有理形群になることを示す. すると, 藤木の結果により正則になる.

定理 5.1 G は連結で可換な有理形群で, 強極小であるか, 1 次元線形代数群の単純複素トーラスによる拡大とする. すると G は藤木有理形群になる.

有理形コンパクト化を求めて, それが藤木コンパクト化になっていることを示すのが問題である. 強極小の場合はわりと直接的に証明できる.

問題になるのは, G が加法群 G_a か乗法群 G_m の単純トーラス T による拡大になっているときに問題である. G が代数群の場合はもともと Chevalley の定理があるのでよく, G に定義可能な無限の連結部分群 L で, $L \cap T$ が有限になるものがある場合もよいことがわかる. したがって, G が代数群でなく, G に定義可能な無限の連結部分群 L で, $L \cap T$ が有限になるものがない場合に G が藤木有理形群になることを示せばよい. (実は, この場合はないことがわかる.)

まず, T が単純なことから, T はほとんど強極小になる. Hrushovski の “socle の議論” により, G は互いに直交する半極小な群の直積にほとんど分解できる. G 自身が半極小だと G が $G \rightarrow G/T$ により $\mathbb{P}^1$ と非直交になり, 代数群になるので仮定に矛盾する. したがって, もう 1 つの仮定から, T は, almost pluriminimal な G の定義可能部分群で極大なものであることがわかる.

次に $X \subset G$ が定義可能なとき, X が G で Zariski 稠密でなければ, X は T の有限個の剰余類で覆われることが X の Morley 階数に関する帰納法で示せる. $\text{RM}(X) = 1$ の場合は, T が上の意味で極大であることと, Hrushovski の論文 [3] の Proposition 4.3 による.

このことは, G のコンパクト化を求めるときに, 例外的な点を除くのに使われる. G を Zariski 開集合として含むコンパクト複素多様体 G^* をもとめ, それにより G が藤木有理形群になることを示すのである. 実はこの証明が長いのであるが, 省略する.

系 5.2 (1) G が強極小な有理形群ならば G は 1 次元線形代数群かモジュラーな単純複素トーラスに有理形同型である.

(2) G が可換な有理形群で, 単純代数群による 1 次元線形代数群の拡大ならば G は分裂 (splits) する.

この系の (1) から, 強極小でモジュラーな有理形群は複素トーラスしかないことがわかり, Hrushovski の問題の肯定的な解答を与えている.

さて, この系と Zariski 幾何の場合分け定理から次が導かれる.

命題 5.3 連結有理形群 G が単純, すなわち, 非自明な定義可能連結正規部分群をもたないとき, G は次のどれかである.

- (1) 非可換代数群
- (2) G_a あるいは G_m
- (3) 単純アーベル多様体
- (4) 強極小モジュラー複素トーラス

次の補題は本質的である. $\mathcal{C}$ における藤木有理形群の場合は藤木によって示されている [1].

補題 5.4 連結有理形群の完全列 $1 \rightarrow L \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$ があり, L と H が線形代数群と有理形同型ならば, G もそうである.

この補題は, モデル理論の中でもさかんに研究されている Morley 階数有限な群の理論を駆使して証明される.

定理 5.5 G が連結有理形群ならば G は (定義 4.2 の意味で) 正則である.

この定理は G の次元に関する帰納法で証明される. G が可換な場合を説明しよう. 定義可能な G の連結部分群で極小なものを H とする. 命題 5.3 により, H は線形代数群か単純複素トーラスである. $G = H$ なら定理が成り立つ. そうでなければ, 帰納法の仮定より, G/H はある線形代数群 L/H のある複素トーラス T による拡大になっている. H が線形代数群の場合は補題 5.4 により L も線形代数群になる. すると, G は L の T による拡大になり, 定理が成り立つ. 今度は H が単純複素トーラスとしよう. L/H が自明ならば G も複素トーラスになる. そうでないとき, L/H の 1 次元部分群 L_1/H をとる. すると, L は G_a あるいは G_m の T による拡大になっている. 系 5.2(2) により L は分裂するので, G の 1 次元線形代数部分群を得る. これは, H が線形代数群の場合と同じ状況になるので定理が成り立つ.

一般の場合は, G が単純ならば命題 5.3 により定理が成り立つ. そうでない場合は, 場合分けがいくつかあるが, 帰納法の仮定と補題 5.4 により証明される.

6 おわりに

モデル理論的な側面をかなり強調して書いた. 興味をもたれたら Pillay と Scanlon の論文 [7] を読んでほしい.

モデル理論の応用では, 具体的対象領域にうまい関係の集りを基本関係として導入して, その構造の理論がモデル理論的によい性質をもつようにすることが重

要である。位相をうまく導入すると、位相空間に関する一般論がうまく使えて、議論がうまく進むという状況と似ている。モデル理論は、少し複雑な「位相空間論」として使われるようになっていくかも知れない。

参考文献

- [1] A. Fujiki, On automorphism groups of compact Kähler manifolds, *Inv. Math.*, 44 (1978), 225-258.
- [2] H. Grauert, Th. Peternell, R. Remmert (eds.), *Several Complex Variables VII*, Springer, 1994.
- [3] E. Hrushovski, The Mordell-Lang conjecture for function fields, *Journal AMS*, 9 (1996), 667-690.
- [4] E. Hrushovski and B. Zilber, Zariski geometries, *Bulletin AMS*, 28 (1993), 315-322.
- [5] E. Hrushovski and B. Zilber, Zariski geometries, *Journal AMS*, 9 (1996), 1-56.
- [6] A. Pillay, Some model theory of compact complex spaces, to appear in *Proceedings of Hilbert 10 Meeting*.
- [7] A. Pillay and T. Scanlon, Meromorphic groups, preprint, 2000.
- [8] B. Zilber, Model theory and algebraic geometry, *Proceedings of 10th Easter Conference (Berlin)*, 1993.