

小摂動項の及ぼす解の到達時間差の評価

東北学院大学教養学部 上之郷高志 (Takashi Kaminogo)

Department of Mathematics,
Tohoku Gakuin University

初期値問題

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = \varphi(u), \quad u(0) = 0$$

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = \varphi(u) + s(t), \quad u(0) = 0$$

を考える. ただし, $u, t \in \mathbf{R}$ とし, $s: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ は連続で $\varphi: [0, C] \rightarrow \mathbf{R}$ ($C > 0$ は定数) は連続微分可能とする. 次を仮定する.

$$(A) \quad \exists h > 0, \varphi(u) \geq h, \varphi(u) + s(t) \geq h \quad (0 \leq u \leq C, t \geq 0).$$

(1) の解 $u_0(t)$ が C に到達する時刻を T_0 とし, (2) の解 $u(t)$ が C に到達する時刻を T とするとき, $T_1 := T - T_0$ の値を $s(t)$ を用いて評価したい. Knight [1] は $\varphi(u) = -\gamma u + s_0$ (s_0 は正の定数) の場合に, $|s(t)|$ と $|\gamma|$ が十分小のとき,

$$-T_1 \approx e^{\gamma T_0} \int_{T-T_0}^T e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0} dt$$

であることを示した.

上述の問題に対して次の結果が得られた.

定理 仮定 (A) のもとで, (2) の解を $u(t)$ とし, T_0, T, T_1 を上記のように定める. このとき,

$$-T_1 = \int_0^T \frac{s(t)}{\varphi(u(t))} dt$$

が成り立つ.

これを示すために, まず $\varphi(u)$ を折れ線で近似する. u の区間 $[0, C]$ を n 等分し, 分点を C_k とする. すなわち,

$$C_k = \frac{kC}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

とする. $n+1$ 個の点 $(C_0, \varphi(C_0)), (C_1, \varphi(C_1)), \dots, (C_n, \varphi(C_n))$ を折れ線で結んだ関数を $\varphi_n(u)$ とすると,

$$\varphi_n : [0, C] \rightarrow \mathbf{R}$$

は, 区間 $[C_{k-1}, C_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 上で

$$\varphi_n(u) = k\varphi(C_{k-1}) - (k-1)\varphi(C_k) + \frac{n}{C} \{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})\}u$$

と表される. φ_n の作り方から, φ_n は, (A) で φ を φ_n に置き換えた条件を満たしていることが容易にわかる.

(1), (2) をそれぞれ次の微分方程式で近似する.

$$(1)_n \quad \frac{du}{dt} = \varphi_n(u), \quad u(0) = 0,$$

$$(2)_n \quad \frac{du}{dt} = \varphi_n(u) + s(t), \quad u(0) = 0.$$

補題 $h > 0, 0 \leq K < L \leq C, \lambda \geq 0$ とし, 定数 a, b は不等式

$$(3) \quad a + bu \geq h, \quad a + bu + s(t) \geq h \quad (K \leq u \leq L, t \geq \lambda)$$

を満たしているとする. 初期値問題

$$(4) \quad \frac{du}{dt} = a + bu, \quad u(\lambda) = K$$

の解 $u_0(t)$ に対し, $u_0(t) = L$ となる t を η とし, $R_0 = \eta - \lambda$ とおく. また初期値問題

$$(5) \quad \frac{du}{dt} = a + bu + s(t), \quad u(\lambda) = K$$

の解 $u(t)$ に対し, $u(t) = L$ となる t を σ とし, $R = \sigma - \lambda, R_1 = R - R_0$ とおく. このとき,

$$(6) \quad |R_1| < \max\{R_0, R\} \leq \frac{L-K}{h},$$

$$(7) \quad -R_1 = \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} \frac{s(\tau)}{a+bL} d\tau + bR_1^2 \Phi(bR_1)$$

が成り立つ. ただし, $\Phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \dots$ である.

証明 (3) より, $0 < R_0 \leq (L-K)/h$, $0 < R \leq (L-K)/h$ は明らかに成り立つ. また, $R \geq R_0$ のとき, $0 \leq R_1 = R - R_0 < R$ であり, $R < R_0$ のとき $0 < -R_1 = R_0 - R < R_0$ である. よって (6) が示せた.

次に (7) を示す. まず $b \neq 0$ の場合を考える. 初期値問題 (5) の解 $u(t)$ は

$$u(t) = Ke^{b(t-\lambda)} + \int_{\lambda}^t e^{b(t-\tau)} \{a + s(\tau)\} d\tau$$

で表される. $u(\sigma) = L$ であるから, 上式より

$$\begin{aligned} L &= Ke^{b(\sigma-\lambda)} + \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} \{a + s(\tau)\} d\tau \\ &= Ke^{bR} + a \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} d\tau + \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau) d\tau \\ &= Ke^{bR} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} e^{bR} + \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau) d\tau \end{aligned}$$

が得られる. 整理すると

$$(8) \quad a + bL = (a + bK)e^{bR} + b \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau) d\tau$$

となる. ここで $s(t) \equiv 0$ とすると, (5) は (4) になり, また $R = R_0$ となるから (8) より,

$$a + bL = (a + bK)e^{bR_0}$$

が得られる. これを $a + bK = (a + bL)e^{-bR_0}$ と変形して (8) に代入すると

$$\{1 - e^{b(R-R_0)}\} (a + bL) = b \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} s(\tau) d\tau$$

となる. さらに, $R - R_0 = R_1$ を代入すると,

$$(9) \quad \frac{1 - e^{bR_1}}{b} = \int_{\lambda}^{\sigma} e^{b(\sigma-\tau)} \frac{s(\tau)}{a + bL} d\tau$$

が成り立つ. 一方,

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{bR_1}}{b} &= \frac{1}{b} \left\{ 1 - \left(1 + bR_1 + \frac{b^2 R_1^2}{2!} + \frac{b^3 R_1^3}{3!} + \cdots + \frac{b^n R_1^n}{n!} + \cdots \right) \right\} \\ &= -R_1 - \left(\frac{bR_1^2}{2!} + \frac{b^2 R_1^3}{3!} + \cdots + \frac{b^{n-1} R_1^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= -R_1 - bR_1^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{bR_1}{3!} + \cdots + \frac{b^{n-2} R_1^{n-2}}{n!} + \cdots \right) \\ &= -R_1 - bR_1^2 \Phi(bR_1) \end{aligned}$$

であるから, これを (9) に代入すると (7) が得られる.

$b=0$ の場合は、初期値問題 (5) の解 $u(t)$ は

$$u(t) = K + \int_{\lambda}^t \{a + s(\tau)\} d\tau = K + a(t - \lambda) + \int_{\lambda}^t s(\tau) d\tau$$

で与えられるから、 $t = \sigma$ とおき $\sigma - \lambda = R$ を代入すると、

$$L = K + aR + \int_{\lambda}^{\sigma} s(\tau) d\tau$$

が得られる。また、 $s(t) \equiv 0$ のとき $R = R_0$ であるから上式より、 $L = K + aR_0$ となる。これを上式に代入すると

$$K + aR_0 = K + aR + \int_{\lambda}^{\sigma} s(\tau) d\tau$$

となる。これを $R - R_0$ について解き、 $R - R_0 = R_1$ とおくと

$$-R_1 = \int_{\lambda}^{\sigma} \frac{s(\tau)}{a} d\tau$$

が従う。これは (7) で $b=0$ とおいたものである。 □

注意 1 補題の証明に見られるように、 R_0 は a, b, K, L だけに依存し、初期時刻 λ に無関係に定まる。このことは (4) が自励系であることから明らかである。

定理の証明 任意の $n \in \mathbb{N}$ を 1 つとり固定する。(1) $_n$ の解 $u_0(t)$ に対し、 $u_0(t) = C$ となる t を T_0 とする。次に $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対し、 $u_0(t) = C_k$ を満たす t を μ_k とする。すなわち、

$$u_0(\mu_k) = C_k$$

で μ_k を定める。また、(2) $_n$ の解 $u(t)$ に対し、 $u(t) = C$ となる t を T とする。また、 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対し、 $u(t) = C_k$ を満たす t を σ_k とする。すなわち、

$$u(\sigma_k) = C_k$$

で σ_k を定める。 $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n = T_0$, $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = T$ が成り立っている。 $T_1 = T - T_0$ とおき、 $R_0^{(k)}$, $R^{(k)}$, $R_1^{(k)}$ をそれぞれ

$$R_0^{(k)} = \mu_k - \mu_{k-1}, \quad R^{(k)} = \sigma_k - \sigma_{k-1}, \quad R_1^{(k)} = R^{(k)} - R_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

で定めると、

$$T_0 = \sum_{k=1}^n R_0^{(k)}, \quad T = \sum_{k=1}^n R^{(k)}, \quad T_1 = \sum_{k=1}^n R_1^{(k)}$$

が成り立つ。

次に初期値問題

$$\frac{du}{dt} = \varphi_n(u), \quad u(\sigma_{k-1}) = C_{k-1}$$

を $C_{k-1} \leq u \leq C_k$ で考え、解 $u^*(t)$ に対し、 $u^*(t) = C_k$ となる t を ρ_k とする。注意 1 より等式

$$R_0^{(k)} = \mu_k - \mu_{k-1} = \rho_k - \sigma_{k-1}$$

が成り立つ。ここで、 $K = C_{k-1}$, $L = C_k$, $\lambda = \sigma_{k-1}$ とし、

$$a = k\varphi(C_{k-1}) - (k-1)\varphi(C_k), \quad b = \frac{n}{C} \{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})\}$$

とにおいて補題を適用する。 $a + bu = \varphi_n(u)$, $a + bL = \varphi(C_k)$ であるから、(6) より

$$(10) \quad |R_1^{(k)}| < \max \{R_0^{(k)}, R^{(k)}\} \leq \frac{C_k - C_{k-1}}{h} = \frac{C}{hn}$$

が成り立つ。さらに、平均値の定理より

$$b = \frac{n}{C} \{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})\} = \frac{\varphi(C_k) - \varphi(C_{k-1})}{C_k - C_{k-1}} = \dot{\varphi}(B_k)$$

を満たす $B_k \in (C_{k-1}, C_k)$ が存在する。ただし、 $\dot{\varphi} = d\varphi/du$ である。よって (7) から

$$(11) \quad -R_1^{(k)} = \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} e^{\dot{\varphi}(B_k)(\sigma_k - \tau)} \frac{s(\tau)}{\varphi(C_k)} d\tau + \dot{\varphi}(B_k) (R_1^{(k)})^2 \Phi(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)})$$

が従う。右辺の第 1 項は、積分の平均値の定理を用いて次のように書き換えられる。すなわち、適当な $\tau_k \in (\sigma_{k-1}, \sigma_k)$ をとると、

$$(12) \quad \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} e^{\dot{\varphi}(B_k)(\sigma_k - \tau)} \frac{s(\tau)}{\varphi(C_k)} d\tau = e^{\dot{\varphi}(B_k)(\sigma_k - \tau_k)} \frac{s(\tau_k)}{\varphi(C_k)} (\sigma_k - \sigma_{k-1})$$

となる。また、 $B_k \in (C_{k-1}, C_k) = (u(\sigma_{k-1}), u(\sigma_k))$ より $B_k = u(\xi_k)$ を満たす $\xi_k \in (\sigma_{k-1}, \sigma_k)$ が存在する。さらに、 $C_k = u(\sigma_k)$ であるから、これらを (12) の右辺に代入し、さらに (12) を (11) に代入すると、

$$(13) \quad -R_1^{(k)} = e^{\dot{\varphi}(u(\xi_k))(\sigma_k - \tau_k)} \frac{s(\tau_k)}{\varphi(u(\sigma_k))} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) \\ + \dot{\varphi}(B_k) (R_1^{(k)})^2 \Phi(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)})$$

が得られる。(13) の左辺を k について加えると、

$$\sum_{k=1}^n (-R_1^{(k)}) = -T_1$$

である。ここで、 u , T_0 , T , T_1 , σ_k , τ_k , ξ_k は n によって決まるから、これらをそれぞれ

れ $u_n, T_0^n, T^n, T_1^n, \sigma_k^n, \tau_k^n, \xi_k^n$ とかくと,

$$\begin{aligned} -T_1^n &= \sum_{k=1}^n e^{\dot{\varphi}(u_n(\xi_k^n))(\sigma_k^n - \tau_k^n)} \frac{s(\tau_k^n)}{\varphi(u_n(\sigma_k^n))} (\sigma_k^n - \sigma_{k-1}^n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \dot{\varphi}(B_k) (R_1^{(k)})^2 \Phi(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}) \end{aligned}$$

と表される. また, $n \rightarrow \infty$ のとき, $T_0^n \rightarrow T_0, T^n \rightarrow T, T_1^n \rightarrow T_1$ であり, $\{u_n(t)\}$ は区間 $[0, T)$ で $u(t)$ に広義一様収束する. ただし, T_0, T, T_1, u は定理の仮定で与えられたものとする. さらに $n \rightarrow \infty$ のとき, (10) より $\max_{1 \leq k \leq n} (\sigma_k^n - \sigma_{k-1}^n) = \max_{1 \leq k \leq n} R^{(k)} \rightarrow 0$ であるから

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\dot{\varphi}(u_n(\xi_k^n))(\sigma_k^n - \tau_k^n)} \frac{s(\tau_k^n)}{\varphi(u_n(\sigma_k^n))} (\sigma_k^n - \sigma_{k-1}^n) \\ &= \int_0^T e^{\dot{\varphi}(u(t))(t-t)} \frac{s(t)}{\varphi(u(t))} dt = \int_0^T \frac{s(t)}{\varphi(u(t))} dt \end{aligned}$$

となる. 次に (13) の右辺の第 2 項について考察する.

$$|\Phi(x)| \leq \frac{1}{2!} + \frac{|x|}{3!} + \frac{|x|^2}{4!} + \frac{|x|^3}{5!} + \cdots < 1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots = e^{|x|}$$

であるから, $M = \sup\{|\dot{\varphi}(u)|; 0 \leq u \leq C\}$ とすると, (10) より (13) の右辺の第 2 項は次の不等式を満たす.

$$\left| \dot{\varphi}(B_k) (R_1^{(k)})^2 \Phi(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}) \right| \leq M |R_1^{(k)}|^2 e^{M|R_1^{(k)}|} \leq \frac{MC^2}{h^2 n^2} e^{MC/hn}.$$

したがって, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\left| \sum_{k=1}^n \dot{\varphi}(B_k) (R_1^{(k)})^2 \Phi(\dot{\varphi}(B_k) R_1^{(k)}) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{MC^2}{h^2 n^2} e^{MC/hn} = \frac{MC^2}{h^2 n} e^{MC/hn} \rightarrow 0$$

である. 以上より結論の等式が得られる. □

系 $\varphi(u) = -\gamma u + s_0$ のとき,

$$-T_1 \approx e^{\gamma T_0} \int_{T-T_0}^T e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0} dt$$

が成り立つ ([1] 参照). ただし, s_0 は正の定数とし, $|\gamma|$ と $|s(t)|$ は十分小とする.

証明 $du/dt = -\gamma u + s_0 + s(t)$, $u(0) = 0$ の解 $u(t)$ は

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \{s_0 + s(\tau)\} d\tau \\
 &= \frac{s_0}{\gamma} \{1 - e^{-\gamma t}\} + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} s(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

で与えられる. 分母を払って変形し, $\gamma s(t)$ が十分 0 に近いことを用いると

$$-\gamma u(t) + s_0 = s_0 e^{-\gamma t} - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} s(\tau) d\tau \approx s_0 e^{-\gamma t}$$

が得られる. よって, 定理と上式および $0 = T - T_0 - T_1$ より

$$\begin{aligned}
 -T_1 &= \int_0^T \frac{s(t)}{-\gamma u(t) + s_0} dt \approx \int_0^T \frac{s(t)}{s_0 e^{-\gamma t}} dt = \int_0^T e^{\gamma t} \frac{s(t)}{s_0} dt \\
 &= e^{\gamma T} \int_0^T e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0} dt = e^{\gamma(T_0+T_1)} \int_{T-T_0-T_1}^T e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0} dt
 \end{aligned}$$

となる. また, $\gamma T_1 \approx 0$ より $e^{\gamma(T_0+T_1)} \approx e^{\gamma T_0}$ が成り立ち, さらに $|T_1|$ と $|s(t)|$ がともに 0 に近いことから

$$\int_{T-T_0-T_1}^T e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0} dt \approx \int_{T-T_0}^T e^{-\gamma(T-t)} \frac{s(t)}{s_0} dt$$

が成り立つ. 以上より結論が従う. □

REFERENCES

- [1] Knight, B. W., Dynamics of encoding in a population of neurons, J. General Physiology 59, 1972, 734-766.