

山くずれの力学的研究

武 居 有 恒

Aritsune TAKEI

Study on the Mechanics of Landslide.

目 次

緒 論.....	43	第4節 地下水の影響に対する考察.....	80
第1節 すべり面の形に対する考察.....	44	結 論.....	91
第2節 弾性理論による考察.....	53	参 考 文 献.....	95
第3節 近似計算法.....	66	Summary	95

緒 論

野溪の災害は流域において生産された過大な土砂の流出によつてひき起される。土砂の生産は植生による保護を失つた山腹においてたえまなく行われ、溪流は土砂を供給される。また一方平時良好な状態を示していた山腹においても不測の豪雨に際会すれば、各所に大小の崩壊を生じ一時にぼう大な土砂を生産し同時に溪間の堆積土砂を一挙に流下させ河状を一変させるとともに、これを契機として平穏な流域を一日にして野溪に変ぜしめる例さえある。

山腹の崩壊は、地学的な観点に立つならば地形輪廻の一過程に過ぎず人力をもつていかんともなし難い自然現象であるといいきることができるかも知れないが、治山治水の観点においてはその根源をきわめ、その災害を最小限に防除しさらに進んではその発生を防止する対象としてとりあげられなければならない。

この目的において山崩れの機構を力学的に究明することの意味が存する。ここに行つた考察はまず山くずれを土砂の堆積物が自重によつて崩落する現象として把握し、これに関連する要素としての地下水の作用に対する水理学的な検討を試みたものであつて、実際の現象を抽象化単純化する過程において、またこれを組合わせる過程においても異論はあるものと考えるが、山くずれの機構を説明する一応の成案を得たのでここに発表する次第である。

まず第1節ないし第3節においては土砂によつてできている斜面の安定条件について考察を行つたのであるが、その力学的な解析には3方法が考えられる。すなわち土が破壊しようとする極限的な釣合の状態を考え、塑性的な平衡条件を満足する応力分布を研究するいわゆる土質力学的な方法と、土を弾性体とみなし、その平衡条件のもとに斜面中の応力分布を求め破壊条件を考察する方法、およびすべり面の形をある幾何学的な曲線で近似させこれによつて斜面の平衡条件を論じようとする実用的解法の3者である。これらはいずれも土の力学的性質を完全に表現するような条件を満足しているとはいえないが、前2者の研究によつて平衡状態のあり方のある程度推察され、最後の方法はこれに関連する諸要素を考慮にいれるにあたり、前2者の方法によつては避け得られない繁雑さから逃れる手

段として意味をもっている。

第4節においては斜面安定に及ぼす水の作用ならびに地下水の運動についての水理学的考察を行ったが、ここでは特に力学的解析に直接関連づけられる要素のみを対象とし、物理化学的あるいは土性論的な問題については論を進めていない。あえてこれを行わなかつた理由は、力学的解析の根底となる仮定自体をさらに詳論するものがこの土性論的研究であつて、これをつけ加えることは当面の目的に対しては無意味と考えたためである。

以下これらの諸項目について詳述してゆくが、各節は相互に関連していると同時に全く独立したものともいうことができ、本篇の構成においてもこれらの関連性については特に附言することを行わず、山くずれの機構を解明するための諸方法をそれぞれ別個に論ずる方法をとつたことを断つておく。

第1節 すべり面の形に対する考察

§ 1. 従来の研究に対する検討

山くずれあるいは斜面の崩壊において、そのすべり面の形は、円弧またはそれに近い形になることが経験的に認められてきた。しかしなぜそのような形になるかという問題が、実は斜面の崩壊しようとする限界的な釣合の状態を明らかにすることと全く同一の問題であることに気づかれて、すべり面の形の探求が始つた。

この研究は、土層中の微小部分の釣合条件から出発した Rankine 系の土圧論研究家によつて進められ、この方法で初めてすべり面の形について Résal がその研究を発表した。これはすべり面を一辺とする微小三角形土塊の釣合に対し、凝集力を有する土に拡張した Rankine 理論を用いて、すべり面をあらわす曲線が満足すべき微分方程式を導いたものである。その後 Frontard によつてこの方程式の解が求められ、また同様の根本仮定にしたがつて、これを解く方法として Mohr の応力円をたくみに利用して A. Caquot および安蔵善之輔によりそれぞれ独自に発表されている。そのほか野満隆治は Rankine の考え方とは離れて一解法を提案しているが、この方法には物質が応力によつて破壊する場合に、最危険応力条件の作用する面が破断面になるという考え方が採用されていないので、根本的な疑義が生じる。

Résal, Frontard および安蔵の理論においては、Rankine 理論の正統的な拡張の結果として一応の結論に達し図式的にあるいは簡単な計算の追加によりすべり面の形をうるにいたつている。しかしながらこれらの解法の最大の欠点は、すべり面の形は上述の最危険応力条件の方向を各点において満足しているが、この面にそつて働く抵抗力の方がすべり土塊の自重によつて生ずる全滑動力よりも常に大きくなるという点にある。すなわち、すべり面の形はきめられたが、実際には自重だけによつてはそのようなすべり面にそつた崩壊は起り得ないという矛盾した結果を生じる。この原因は Rankine 土圧論における根本的な考え方に存するもので、よう壁背面に作用する土の応力を考える場合に、この壁を支持する外部の力がある限度より小さくなれば壁は転倒して土は崩落するにいたり、また外部の力がある限度以上に達すれば壁は土中にめり込んで土は上方に押し上げられるという2つの限界値を論じたものであつて、いずれの場合においても土の自重それ自体だけによつて生ずる応力状態を論じたものとはいえない。したがつてなんらかの解決を求めようとするならば、Rankine 理論の根本仮定に多少の修正を加える必要がある。

ここで問題になるのは、Coulomb 系土圧理論との対比において常に指摘される一難点、すなわち土層が崩壊する場合に、土中のあらゆる部分が（理論的には無限遠点まで）同時に限界釣合の状態に達するという条件が根本仮定の中に必然的に含まれるという点である。たとえば壁が土圧によつて転倒する場合、壁を支える力が減少すればその附近の応力状態が次第に変化してついに限界的な応力状

態に達することは当然了解されるが、その影響が同程度に無限遠点に及ぶということは考え難い。斜面の崩壊においても、土の自重と強度の関係によつて、ある面上で限界的な釣合の条件に達したとしても、この面から離れた他の点においても同様の条件が成立するという考え方よりも、むしろすべり面上だけで限界的な釣合条件が満たされ、またすべり面の方向は最危険応力の条件を満たし、すべり土塊中およびその外部においては限界釣合条件は満たされないと考える方がはるかに正当である。

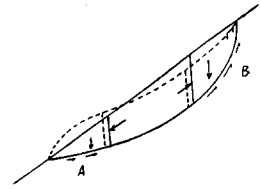


図1-1

実際に斜面が崩壊する場合にこれを模型的に考えると、斜面下部Aにおいては上方からの圧力に対しすべり面上の抵抗力では支えきれなくなつて下方へ押し出され、上部Bにおいては下方から支持する力が不足するようになるために上部の土がずり落ちると考えることができる。これを Rankine 理論にあてはめると、下部では受働土圧、上部では主働土圧の状態になり、両極端の限界条件が同時に発生すると考えなければならない。この矛盾から逃れるためにも前述のようにすべり面以外の点においてはこの両極端の中間的な応力状態を生じ、これが位置をかえるに従つて次第に変化し、すべり面上において丁度限界値に達するような応力状態を考えなければならない。

A. Caquot の理論においてはこの考え方を採り入れられているが、その理論は2階非線型の常微分方程式の誘導によつて中断され、さらに新たな仮定を加えることによつて近似解が与えられている。しかしながらこの仮定の導入は微分方程式自体の近似解として適当なものではなく、また物理的な意味においては限界釣合の条件に達しない土塊中における最危険応力条件の方向を求める結果となつている。結論的にいうならば Caquot 理論によつて求められたすべり面の形は、斜面傾斜角が緩になつた場合に対応する安蔵理論によるすべり面と本質的に変わらないものになつてしまつてゐるということができる。

そこで以下、この与えられた基礎微分方程式に検討を加え、これを数値的に積分することによつてすべり面の形を求めると同時に斜面の安定条件を考察することにしよう。

§ 2 すべり面の形および斜面の安定条件

Caquot の根本仮定は、地表面と平行な面上の応力は土かぶりの深さすなわち地表面からこれと直角にはかつた長さ z のみの関数であつて、これと直交する座標 x には無関係であるということから出発している。このように仮定すると、地表面に平行な面上においてはこの面上の応力と共役な応力すなわち地表面と平行に作用する応力は、 x に関して1次関数としてあらわされる。この条件のもとに、斜面内の応力はすべり面上においてのみ限界釣合の状態にあり、かような面の切線の方法は各点における最危険応力条件の面(すべり面)の方向と一致するという条件を満足するような面をもつて、斜面崩壊の限界状態におけるすべり面と考える。この考え方の特徴はすべり土塊の内部においては限界釣合の状態(塑性平衡状態)には達していないということであつて、すべり土塊中で上方に進むに従つて張力を生じ、また下方に向つて圧力が増大する。その結果上半部はいわゆる主働すべり面に、下半部は受働すべり面に相当するものになるが、一塊になつて滑落するすべり土塊中では土の強度に対応する破壊条件に達しておらず、Résal あるいは安蔵理論にみられるような抵抗力が滑動力よりも大きいという矛盾が解消される。また地表と平行な方向の応力がすべり土塊内において x の1次関数としてあらわされるために、すべり面外部ではこれを延長すれば限界釣合の状態よりもさらに危険な応力状態の発生を考慮しなければならないかのごとく思われるが、すべり土塊の境界面はすべり面であるから、この面上の微小帯に接してことなつた応力条件による塑性平衡帯が連続すること

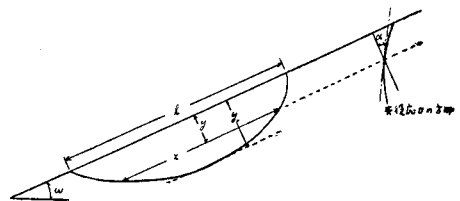


図1-2

が可能であり、そのため一応すべり土塊外部の応力分布を無視して考察を進めることができる。これはすべり面が塑性平衡条件における応力分布をあらわす微分方程式の特性帯であるという性質から説明される。結局すべり面外部は土層上下端の境界面によつて支配される一種の過渡領域になるものとみなすことができるが、この部分の応力分布を詳細に検討することは現在の目的には無用であり、この根本仮定に矛盾を生じない事は十分明白であるのでこの仮定に従つて考察を進めることにする。

Caquot の導いた基礎式は

$$x = \frac{4\sqrt{(y \tan \varphi + h)^2 - y^2 \tan^2 \alpha}}{\cos \varphi \frac{d}{dy} \{y(\tan \omega - \tan \alpha)\}} \dots\dots\dots (1-1)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2\{y(\tan \alpha + \tan \varphi) + h\}}{\cos \varphi \sqrt{(y \tan \varphi + h)^2 - y^2 \tan^2 \alpha}} \dots\dots\dots (1-2)$$

の2式である。ここに

$$h = c / \gamma \cos \omega$$

c : 土の凝集力, γ : 土の単位重量 φ : 土の内部摩擦角, ω : 斜面の傾斜角

α : 地表と平行な面上の応力の傾角

(1-1)式はすべり土塊中の同じ深さの線上の両端すなわちすべり面上において、斜面方向の応力の差は受働土圧と主働土圧の差に等しいことをあらわすものであり、(1-2)式はすべり面の方向は最危険応力条件の方向と一致することを示している。この2式を連立して $\tan \alpha$ あるいは x を消去すると

$$X(X^2 + 4)\{X'^2(\mu - \nu) - 4(\mu + \nu)\} + 16X'(X^2 + 4)(\mu y + h) + 8XX'X''(\mu y + h) = 0 \dots\dots (1-3)$$

および

$$(u^2 - v^2)\mu^2 v'' + \frac{1}{2}(u+v)(\nu - \mu v')^2 + \mu(\nu - \mu \nu')(u - vv') = 0 \dots\dots\dots (1-4)$$

あるいは

$$\frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{(\nu - \mu v')^2} \mu^2 v'' + \frac{1}{2} \frac{u+v}{\sqrt{u^2 - v^2}} + \frac{\mu(u - vv')}{(\nu - \mu v')\sqrt{u^2 - v^2}} = 0 \dots\dots\dots (1-4')$$

をうる。ここに

$$X = x \cdot \cos \varphi, \quad X' = dX/dy, \quad X'' = d^2X/dy^2, \quad u = y \tan \varphi + h, \quad v = y \tan \alpha, \quad v' = dv/du, \quad \mu = \tan \varphi, \\ \nu = \tan \omega \quad v'' = d^2v/du^2$$

である。ところで(1-3, 4)式はいずれも2階非線形でこれを積分することができない。そこで x および $\tan \alpha$ を求め、またこれによつて斜面の安定を論じようとすれば、(1-1, 2)式を少し変形し、数値積分法で x および $\tan \alpha$ を求め、その変化の状態を考察しなければならない。よつて(1-1, 2)式を次のように書き改める。

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tan \omega}{\tan \varphi} - \frac{4\sqrt{(u+v)(u-v)}}{x \sin \varphi} = f(u, v, x) \dots\dots\dots (1-5)$$

$$\frac{dx}{du} = -\frac{2}{\sin \varphi} \sqrt{\frac{u+v}{u-v}} = g(u, v) \dots\dots\dots (1-6)$$

この形は Runge-Kutta 法により、また H. Levy 法を併用してそのまま数値積分ができるが、計算を行うに先立つて(1-1)~(1-6)式について少し検討を行つてみる。

斜面が崩壊すること、すなわち一個の連続したすべり面が存在するためには、 y の無限大でないある正值に対して $x=0$ が成立することが必要であり、この条件はまた u の有限確定値に対し $u=v$ が成立するということと同義である。

ところで(1-5, 6)式あるいは(1-4')式をみるに、この式は一般には $u=v$ において Cauchy の条件を満足せず解は存在しない。しかしながら初期条件として与えられる v, v' のいかににより u の有限

確定値に対し極限值として $u=v$ が成立することになる。

(1-4')式第2項以下は $u=v$ において $\infty-\infty$ 型の不定型になるが、これを通分すると

$$\frac{(2\mu+\nu)u+\nu-\mu v'(u+3v)}{2(\nu-\mu v')\sqrt{u^2-v^2}} = \frac{D_1}{D_2} \dots\dots\dots(1-7)$$

となり、この分子を D_1 分母を D_2 であらわせば、いま考えている場合 $\nu > \mu v'$, $u > v$ であるから $D_2 > 0$ となり、(1-7)式の正負は D_1 の符号によつてきまる。(1-4')式により v'' の正負は D_1 の正負によつて決定され、 $D_1 < 0$ なるとき $v'' > 0$, $D_1 > 0$ なるとき $v'' < 0$ であるから

$$\{(2\mu+\nu)u+\nu\}/\mu(u+3v) = D_3 \dots\dots\dots(1-8)$$

と書けば、

$$\left. \begin{array}{ll} v' > D_3 \text{ なるとき} & v'' > 0 \\ v' < D_3 \text{ なるとき} & v'' < 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(1-9)$$

が成立する。ところで $u=h$, $v=0$ すなわち $y=0$ においては、 D_3 の値は常に ν/μ より大きく、また v' の値は(1-5)式からわかるように ν/μ より小さい。従つて $v'=D_3$, $v''=0$ になるような u , v の値を経て変化しなければならない。

いまもし $v'=D_3$ になるような u , v の値を生じなかつたとすると、 v'' は常に負値をとり v' は単調に減少することになる。ところで(1-7)式に示される D_1 の $u=v$ に対する極限值は、 $\text{const.}/0 = \infty$ と与えられ、よつて v'' の極限值は高次の無限大でなければならない。すなわち任意の u に対して $u-v$ の値がいかに 0 に近づくように初期条件を与えたとしても、この u に対応する v' の値が D_3 よりも小さければ $u+\Delta u$ に対応する $v'+\Delta v'$ の値は v' より小さくなり、 $u-v$ が小さくなればなる程 v' は急速に減少し、その結果 $v' < 0$ となり $u=v$ になるような u の値は存在しないことになる。

逆に任意の u に対し $v' > D_3$ になるように初期条件を与えられたならば、この点においては $v'' > 0$ となり、 v' は増加の傾向にあり従つて $u-v$ は次第に急速に減少する。さらに u が大きくなり $u-v$ が小さくなるにともなつて v' の増加の割合が無限に大きくなる。そして $u-v=0$ になるような極限において $v'' = +\infty$ となり、 u のある有限確定値に対し、(1-4')式を満足するような v の値に対応する u の値を、この有限確定値に無限に接近させることができる。すなわち $v' > D_3$ においては極限值として $u=v$ が成立するような値が存在する。

次に(1-8)式の D_3 の値自体を考えるに、これは v が u に近づくに従つて減少し、 $u=v$ なる極限值においては

$$(\mu+\nu)/2\mu = D_4 \dots\dots\dots(1-10)$$

に達する。ところでこの値になるためには $u > v$ なる全領域において $v < D_3$, $v'' < 0$ が成立し、 $u=v$ になる極限で初めて $v'=D_4$, $v''=0$ になるような場合でなければならない。ところが $v'' \leq 0$ という条件はまた、

$$2 \frac{d}{dy} \tan \alpha + y \frac{d^2}{dy^2} \tan \alpha \leq 0 \dots\dots\dots(1-11)$$

と書かれる。(1-11)式によつて $\tan \alpha$ の変化を考えてみると、 $(\tan \alpha)'$ は $y=0$ においては明らかに負値をとり、 $(\tan \alpha)'$ が正になるためには $(\tan \alpha)''$ は負にならなければならない。したがつて $(\tan \alpha)' = 0$ においては $\tan \alpha$ は極大値となるかあるいは $v''=0$ において $(\tan \alpha)'=0$, $(\tan \alpha)''=0$ すなわち y を変数として表わした $\tan \alpha$ 曲線の変曲点となるか、でなければならない。ところが $\tan \alpha$ は前述のごとく $y=0$ においては減少の傾向を示し、もし $(\tan \alpha)'=0$ が成立する点があるとすれば、この点は極値または変曲点になる。よつて $(\tan \alpha)'$ は $u > v$ なる全領域において負であり、 $u=v$ なる極限において $(\tan \alpha)'=0$, $(\tan \alpha)'' > 0$ となる場合が存在しうるが、一般には $u=v$ においてもまた $(\tan \alpha)' < 0$, $(\tan \alpha)'' > 0$ である。そこで $u=v$ において $v'=D_4$ となつた場合を考えると

$$v' = \cot \varphi (\tan \alpha + y \frac{d}{dy} \tan \alpha) \dots\dots\dots (1-12)$$

であつて $(\tan \alpha)' \leq 0$ であるから、 $\tan \alpha$ が最小になる場合すなわち $x=0$, $u=v$ が生ずるような u が最も大きい値をとる場合は、

$$\tan \alpha_{\min.} = (\tan \omega + \tan \varphi)/2 \dots\dots\dots (1-13)$$

でなければならない。このことは別な表現をすると、すべり面最深部における α の最小値が (1-13) 式によりあらわされ、この場合の最深部の深さは

$$y_{\max.} = 2c \cos \varphi / \gamma \sin(\omega - \varphi) \dots\dots\dots (1-14)$$

である。そしてこの深さは最も浅いすべり面すなわち $\alpha = \omega$ (const.) であるような平面すべり面の深さ

$$y_{\min.} = c \cos \varphi / \gamma \sin(\omega - \varphi) \dots\dots\dots (1-15)$$

のちようど 2 倍になつてゐる。

しかしここで注意すべきことは (14) 式であらわされる $y_{\max.}$ を生ずる場合は、 $u=v$ において $(\tan \alpha)' = 0$, $v'u = y \tan \varphi = v$ とならなければならないが、 $v = \int_0^u v' du$ であり、かつ $v' < 0$ が常に成立するので、一般に $v < v'u$ でなければならない。すなわち斜面が均一な土層で構成されている場合に初期条件として地表 $y=0$ において $x_0=l$ が与えられたとしても絶対に成立しえないことになる。実際に考えられる状態としては、斜面の表層に下層よりも強度の大きい層すなわち φ および c が大きい層が存在する場合、この両層の境界面の条件が下層の初期条件となるときにあらわれるものである。しかしながらいずれにしても、いかなる初期条件が与えられてもこの土層において (1-14) 式で与えられる $y_{\max.}$ より深い部分にはすべり面は存在しえない。

以上の考察は特殊な極限に対するものであるが、斜面崩壊の一般的な安定条件を考えると、 v' の値が (1-10) 式で示される D_4 の値よりも小さくなれば v'' は常に負となり、 $u=v$ は成立せずしたがつて斜面は安定である。

よつて $y < y_{\max.}$ において

$$v' < (\mu + \nu)/2\mu \dots\dots\dots (1-16)$$

が生じたならばこの斜面は安定であると判定される。

さて次に (1-5, 6) 式を積分するにはまず Runge-Kutta 法が用いられる。初期条件として $u=u_0$, $v=v_0$, $x=x_0$ が与えられたならば、

$$u_1 = u_0 + a, \quad v_1 = v_0 + b, \quad x_1 = x_0 + c \dots\dots\dots (1-17)$$

$$6b = (b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4), \quad 6c = (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4),$$

$$b_1 = f(u_0, v_0, x_0) \cdot a, \quad c_1 = g(u_0, v_0) \cdot a,$$

$$b_2 = f\left(u_0 + \frac{a}{2}, v_0 + \frac{b_1}{2}, x_0 + \frac{c_1}{2}\right) \cdot a, \quad c_2 = g\left(u_0 + \frac{a}{2}, v_0 + \frac{b_1}{2}\right) \cdot a,$$

$$b_3 = f\left(u_0 + \frac{a}{2}, v_0 + \frac{b_2}{2}, x_0 + \frac{c_2}{2}\right) \cdot a, \quad c_3 = g\left(u_0 + \frac{a}{2}, v_0 + \frac{b_2}{2}\right) \cdot a,$$

$$b_4 = f(u_0 + a, v_0 + b_3, x_0 + c_3) \cdot a, \quad c_4 = g(u_0 + a, v_0 + b_3) \cdot a$$

を計算することによつて u の値に対応する v および x を逐次求めることができる。いまもし斜面が均一な土層から成つてゐるとすれば初期条件は斜面長 l と傾斜角 ω および土の力学的性質をあらわす φ , c , γ によつてきめられ、 $u_0=h$ において $v_0=0$ および $x_0=l$ になる。

斜面が 2 層以上の成層状態の場合は、上述の方法をそのまま拡張し、表層下端において求められた条件をそのまま下層の初期条件として計算を続行すればよい。たとえば 2 層の場合は (1-5, 6) 式をそれぞれ I 層 (表層) および II 層 (下層) について別々に作り、

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dv_I}{du_I} &= \frac{\tan \omega}{\tan \varphi_I} - \frac{4\sqrt{(u_I+v_I)(u_I-v_I)}}{x_I \sin \varphi_I} = f(u_I, v_I, x_I) \\
 \frac{dx_I}{dv_I} &= -\frac{2}{\sin \varphi_I} \sqrt{\frac{u_I+v_I}{u_I-v_I}} = g(u_I, v_I) \\
 \frac{dv_I}{du_I} &= \frac{\tan \omega}{\tan \varphi_I} - \frac{4\sqrt{(u_I+v_I)(u_I-v_I)}}{x_I \sin \varphi_I} = f(u_I, v_I, x_I) \\
 \frac{dx_I}{du_I} &= -\frac{2}{\sin \varphi_I} \sqrt{\frac{u_I+v_I}{u_I-v_I}} = g(u_I, v_I)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-18)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここに } u_I &= y \tan \varphi_I + h_I & u_I &= y \tan \varphi + h_I \\
 v_I &= y \tan \alpha_I & v_I &= y \tan \alpha_I \\
 h_I &= c_I / \gamma_I \cos \omega & h_I &= c_I / \gamma \cos \omega
 \end{aligned}$$

φ_I, φ_I ; I および II 層の土の内部摩擦角

c_I, c_I ; I および II 層の土の凝集力

γ_I, γ_I ; I および II 層の土の単位容積重量

である。しかしこの数値積分の初期条件は、

地表面における条件

$$u_I = c_I / \gamma \cos \omega \text{ において}$$

$$v_I = 0, x_I = l \text{ (斜面長)} \dots\dots\dots (1-19)$$

および I, II 層境界面の条件

$$(u_I - h_I) \cot \varphi_I = (u_I - h_I) \cot \varphi_I = t \text{ (境界面の深さ)}$$

$$\text{において } x_I = x_I, v_I = v_I$$

である。地表面における条件は均一層の割合と全く同様であり、数値積分はまずこの条件から出発して I 層底面 $u_I = t \tan \varphi_I + h_I$ まで逐次 x_I および v_I を計算する。境界面においては滑り土塊の長さが下層の初期条件となり、また共役応力の方向すなわち面上の応力が等しいという条件が $v_I = v_I$ としてあらわされる。かくて II 層中における積分を進めていくとき

$$dv_I/du_I < (\tan \omega + \tan \varphi_I) / 2 \tan \varphi_I \dots\dots\dots (1-20)$$

が成立するならば、この斜面は安定である。

3層あるいはそれ以上の多層の場合においても、その境界面を $t_1, t_2, \dots, t_n$ とすれば(1-20)の条件を一般化して

$$\left. \begin{aligned}
 (u_{n-1} - h_{n-1}) \cot \varphi_{n-1} &= (u_n - h_n) \cot \varphi_n = t_n \\
 \text{において } x_{n-1} &= x_n, v_{n-1} = v_n
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-21)$$

によつて境界の条件を与えるならば全く同様の計算を行うことができる。(1-21)式において添字は表層から第 n 番目の層の u, v などをあらわす。

§ 3 数値計算による考察

以上の考察によつてすべり面の形を求め、斜面の安定条件を検討することができるが、この場合適

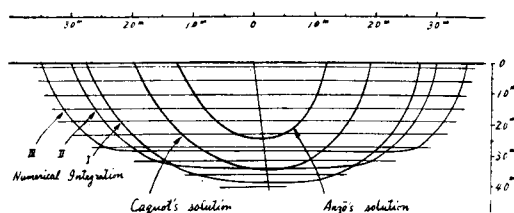


図 1—3

当な数値例によつて数値積分を試みる必要がある。

そこで計算例として土の内部摩擦角 $\varphi=30^\circ$ ，土の凝集力 $c=0.8 \text{ ton/m}^2$ ，土の単位重量 $\rho=1.6 \text{ ton/m}^3$ ，斜面傾斜角 $\omega=40^\circ$ として，斜面長 $l=50\text{m}$ ， 55m ， 60m ， 70m の 4 つの場合について計算した結果を表 1-1 および図 1-3 にかかげる。

表 1-1

y^m	Anzō's x^m	Caquot's x^m	x^m by Numerical Integration			
			I	II	III	IV
0	24.242	38.740	50.0	55.0	60.0	70.0
0.169	23.857	38.373	49.574	54.574	59.572	69.572
0.602	22.193	36.906	48.153	53.148	58.142	68.138
1.035	19.849	35.039	46.287	51.267	56.083	66.225
1.468	17.881	32.687	43.983	48.911	53.700	63.776
1.901	14.218	29.771	41.163	46.019	50.750	60.739
2.334	8.292	26.115	37.769	42.477	47.090	56.855
2.767	0	21.373	33.674	38.071	42.116	51.610
3.200	($y=2.49$)	14.538	28.669	32.331	36.223	0
3.633		0	22.389	23.635	0	($y=2.91$)
4.066		($y=3.55$)	14.186	0	($y=3.62$)	
			(崩壊せず)	($y=3.83$)		

この結果と比較するために共役応力の方向が深さによつて変らず一定であると仮定して導いた Capuot の解を用いると

$$\frac{x\xi \cos \varphi}{2} = \sqrt{\xi^2 + y(1-\xi^2) + y^2} + \frac{\xi^2 + 1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{2y + \xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \right) \dots\dots\dots (1-22)$$

ここに長さの単位は

$$1 = h / (\tan \alpha - \tan \varphi)$$

であり

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \tan \varphi (1 + \xi^2) / (1 - \xi^2) \\ 1 + \frac{\xi^2 + 1}{2\xi} \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} \right) &= \frac{4\xi^2}{\{(1 - \xi^2) \tan \omega / \tan \varphi\} - (1 + \xi^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-23)$$

によつて ξ および α が決定される。これともうひとつ安蔵理論における引張りすべり面と地割れの影響を無視し，Mohr の円の包絡線を直線にした場合に対しすべり面の方向を y について積分すると，(1-22, 23) 式において $\alpha = \omega$ を代入したものと全く同じものになるので，これを計算しあわせて比較してみた。安蔵理論においてはすべり面の形を求めるには図解法を用いるが，これは斜面と平行に近いすべり面の部分の作図誤差が大きくて，十分な精度を得にくく，またここにあげた計算例においては包絡線を直線とすることによる差は極めて小さい。

表 1-1 において物理的には無意味なけた数まで示してあるが，これは y についての積分変数 u の微小値 Δu を計算の都合上 round number にとり，これを y に換算したためと， x については数値積分の精度をたもつために必要なけた数である。表中数値積分法で求めた I の場合すなわち $y=0$ において $x_0=50\text{m}$ については (1-16) 式の条件を生じ， x の値が次第に増大し無限の深さにおいても $x=0$ とならず。したがつて極限釣合以内の応力状態の部分が無限に拡大してゆくので崩壊は起らないものと判定される。よつてすべり土塊の最小長は $50 \sim 55\text{m}$ に存在しすべり面の形は 55m の場合と大差ないものと考えてよい。

図および表においても明らかなおと，安蔵理論によるすべり土塊は最も小さく Caquot 理論によ

るものは数値積分結果との中間に位する。これは理論の誘導過程からもうなずけることであり、またこれらの解法の結果がすべりに対する抵抗力の方がすべり力よりも大きくなるという矛盾を生ずる理由が、簡単にいえば、すべり土塊の大きさの不足であることを示している。ここに掲げた計算例はもとより ω , φ , c についてのある値について計算したものに過ぎないが、実際にあらわれた結果および解法の性質から考えて、少くとも従来の種々の計算法よりもはるかに大きいすべり土塊において初めて崩壊の限界条件が成立し、この考察結果よりすれば斜面の安定性は従来考えていたものよりはるかに大きいものとすることができる。

次に斜面が強度のことなる2層からなっている場合の計算例について考察してみる。いま前例の斜面長 $l=60\text{m}$ の場合について、Ⅱ層は前例と同様 $\varphi=30^\circ$, $c=0.8\text{ ton/m}^2$ とし、その上についでⅠ層を $\varphi=30^\circ$, $c/r=1$; $\varphi=30^\circ$, $c/r=24$; $\varphi=35^\circ$, $c/r=1$; および $\varphi=40^\circ$, $c/r=0.5$ の4つの場合について、Ⅰ層の厚さ t を1~3mの間でいろいろ変化させ、それぞれについて計算を行つた。表1-2はこれら各種の状態に対する x の計算値で、図1-4はその1例としてⅠ層が $\varphi=40^\circ$, $c=0.8\text{ ton/m}^2$ の場合の t の変化に対応する x , y の関係を図示したものである。これらは何れも表層が下層よりも強度が大きい場合に対する計算

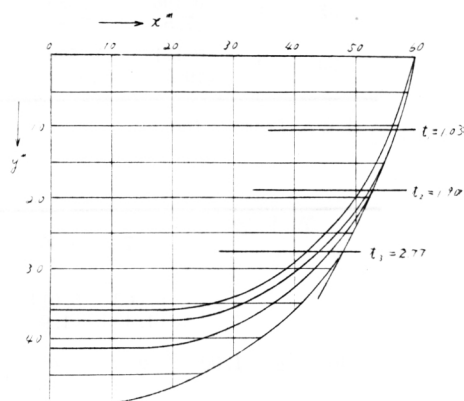


図1-4

例であつて、表層の強化はすべり面最深部の深さを増大させており、この増大は強化された層が厚くなるほど大きくなつていく。たとえばⅠ層が $\varphi=35^\circ$, $c/r=1$ のときはこの層が約1m存在することによつて最深部は約0.5m深くなつていく。このことは均一層のときは約3.6mで崩壊するに対し表層強化の影響によつて土層が約4.2mになるまでは崩壊を生じない結果となる。表1-2においてⅠ層の厚さがある限度で計算を止めているのは、次の一階程までⅠ層が広がればⅡ層中において(1-21)式の条件が成立し、したがつて土層がどれほど厚くても崩壊が起らないことを示している。40°と1/2の場合は3.2m, 35°と1の場合は1.9m, 30°と1の場合は2.77m, 30°と2の場合は1.03mまでⅠ

表1-2

y^m	Ⅰ層なし	$\varphi=40^\circ$ $c/\gamma=1/2$			$\varphi=35^\circ$ $c/\gamma=1$		$\varphi=30^\circ$ $c/\gamma=1$			$\varphi=30^\circ$ $c/\gamma=2$
0.17	59.6	59.5	59.5	59.5	59.6	59.6	59.6	59.6	59.6	59.6
0.60	58.1	58.1	58.1	58.1	58.3	58.3	58.4	58.4	58.4	58.5
1.03	56.1	57.2	57.2	57.2	56.9	56.9	57.0	57.0	57.0	56.8
1.47	53.7	54.9	55.1	55.1	54.7	55.3	54.8	55.4	55.4	54.7
1.90	50.8	52.1	52.9	52.9	52.1	52.8	52.1	53.6	53.6	52.2
2.33	47.1	48.6	49.7	50.5	42.9	49.8	48.8	50.6	51.6	49.1
2.77	42.1	44.2	45.8	48.1	45.0	46.2	44.8	47.1	48.3	45.5
3.20	36.2	38.4	41.0	44.2	40.2	41.8	39.7	42.8	44.3	41.0
3.63	0	28.3	34.6	39.4	33.7	36.4	32.8	37.4	39.5	35.4
4.07	($y=3.62$)	0	23.5	33.5	22.7	29.1	0	30.3	33.5	27.6
4.50		($y=3.73$)	0	25.5	0	15.0	($y=4.06$)	17.0	25.2	0
4.93			($y=4.15$)	10.6	($y=4.15$)	0		0	0	($y=4.46$)
5.37				0		($y=4.54$)	($y=4.54$)($y=4.93$)			
				($y=4.97$)						

表 1-3

φ	c/γ	0.17 ^m	0.60 ^m	1.03 ^m	1.47 ^m	1.90 ^m	2.33 ^m	2.77 ^m
30°	1/2	0.212	0.748	1.277	1.801	2.322	2.842	3.364
40°	1/2	0.209 (1.4)	0.734 (1.9)	1.240 (3.0)	1.729 (4.0)	2.200 (5.3)	2.648 (6.8)	3.089 (8.2)
30°	1	0.198 (6.6)	0.698 (6.7)	1.187 (7.1)	1.664 (7.6)	2.132 (8.2)	2.588 (8.9)	3.034 (9.8)
35°	1	0.196 (7.5)	0.689 (7.8)	1.167 (8.7)	1.627 (9.7)	2.073 (10.7)	2.501 (12.0)	2.913 (13.4)
30°	2	0.171 (19.5)	0.599 (19.9)	1.103 (20.7)	1.411 (21.7)	1.794 (22.8)	2.160 (24.0)	2.510 (25.4)

上らんは滑動力 ton/m², 下らん () 内は減少率 percent を示す。

表 1-4

第 I 層			0.17	0.60	1.03	1.47	1.90	2.33	2.77	3.20
φ	c/γ	深								
40°	1/2	1.03	0.003 (1.4)	0.014 (1.9)	0.037 (3.0)	0.038 (2.2)	0.039 (1.7)	0.040 (1.4)	0.042 (1.3)	0.044 (1.1)
		1.90	"	"	"	0.072 (4.0)	0.122 (5.3)	0.128 (4.5)	0.137 (4.1)	0.145 (3.7)
		2.77	"	"	"	"	"	0.194 (6.8)	0.285 (8.2)	0.291 (7.5)
30°	1	1.03	0.014 (6.7)	0.050 (6.8)	0.090 (7.1)	0.092 (5.1)	0.095 (4.1)	0.100 (3.5)	0.109 (3.2)	0.115 (3.0)
		1.90	"	"	"	0.136 (7.6)	0.190 (8.2)	0.198 (7.0)	0.212 (6.3)	0.222 (5.8)
		2.33	"	"	"	"	"	0.254 (8.9)	0.269 (8.0)	0.284 (7.3)
		*2.77	"	"	"	"	"	"	0.330 (9.8)	0.348 (8.9)
35°	1	1.03	0.016 (7.5)	0.059 (7.8)	0.110 (8.7)	0.113 (6.3)	0.117 (5.1)	0.123 (4.3)	0.134 (4.0)	0.143 (3.7)
		1.47	"	"	"	0.174 (9.7)	0.179 (7.7)	0.188 (6.6)	0.202 (6.0)	0.213 (5.5)
		*1.90	"	"	"	"	0.249 (10.7)	0.258 (9.1)	0.275 (8.2)	0.293 (7.5)
		*2.33	"	"	"	"	"	0.341 (12.0)	0.362 (10.8)	0.383 (9.9)
30°	2	0.60	0.041 (19.5)	0.149 (19.9)	0.151 (11.8)	0.155 (8.6)	0.161 (6.9)	0.169 (6.0)	0.183 (5.4)	0.196 (5.0)
		*1.03	"	"	0.264 (20.7)	0.270 (15.0)	0.280 (12.1)	0.293 (10.3)	0.312 (9.3)	0.333 (8.6)

滑動力の減少 ton/m² および減少率 percent または崩壊しない場合を示す。

層があればもはや崩壊を起らないことになる。以上は単にすべり面の形だけについて考えたのであるが、次に各深さにおける滑動力の変化について少し考察を加えてみる。

深さ y なる面上の滑動力は $\gamma y \tan \alpha = \gamma \cdot v$ であるから、いま行つた数値積分の結果をそのまま用い、また表層強化によつて各深さにどの程度の滑動力減少を生しているかを、滑動力に対する比率で示したものが表1-4である。ここに見られるとおり滑動力の減少率は I 層が厚くなるに従つて増大している。ここにとられた数値の範囲はきわめて狭いが、一般的にも摩擦力増加による影響は深さを増すと

ともに増大するが、凝集力による効果はあまり深部へ影響せず浅い部分に大きい影響を与えるといえる。次に強化された第Ⅰ層の存在によつて下部の強化されていないⅡ層における滑動力がどのように減少するかを計算したものが表1—4である。表層強化の影響は下層にまでもその効果を及ぼし、深さを増すとともにその程度は小さいが一層増大する傾向を示している。しかし減少量は増大するが減少率は深部に及ぶにしたがつて低下している。これは均質斜面の場合の滑動力が深さを増すとともにほとんど直線的に増大するに対し、下層に対する滑動力減少効果の増加が少ないためである。表1—4中*印をつけて示したものはいずれも崩壊を生じない場合であつて、ここにあらわれた数字をみると滑動力の減少がある限度に達すると（本例では約 0.3 ton/m^2 ）崩壊が起らない条件が成立し、この限度に達する深さにはあまり関係がないことが認められる。

以上数値計算例から明らかにされたことは、表層強化による滑落防止効果は、従来の単純な考え方からすればこの層中を切るすべり面上の抵抗力の増加だけしか考えられないが、上述の考察の結果は土層の滑動力自体を減少させ、さらにその効果を下層に及ぼしているという事実を示している。したがつて逆に表層が強度の小さい層の場合は滑動力の増加とその影響の拡大による不安定化が生ずるものと考えられる。結局すべり土塊中の土の滑動力は斜面傾斜角、斜面長および土の性質によつてきめられ、斜面長の短い場合は表層の滑動力が小さいためにその及ぼす影響によつて下層の抵抗力を越えなくなるため斜面は安定をたもち、長い場合は滑動力が大きくなるため下層の抵抗力を上廻る影響を与えて崩壊を生じる。また強度のことなる層からなっている場合は強度の大きい層が小さい層の滑動力をその抵抗力によつて負担し、全体としての釣合状態が成立しているとみることができる。

第2節 弾性理論による考察

§ 1 概 説

第1節においては斜面がまさに崩壊しようとする限界的な釣合状態に対して考察を行つたものであるが、斜面の安定条件あるいは変形状態を論ずる他のひとつの方法は弾性学的な考察である。斜面を構成する土はもとより完全弾性体ではなく、その変形ならびにこれによつて生ずる応力も弾性学における仮定を完全に満足するものではない。しかしながら地盤の諸性質に関する力学的な考察においては土を近似的に弾性体とみなして応力変形状態を解析的に研究し、これをもとにして地盤中に生ずる諸現象を解釈、理解してゆこうという試は数多く行われているところである。これは土のいわゆる弾塑性的変形状態を完全に満足するような応力と変形の関係を基礎にして釣合条件式を組立てると、きわめて複雑な形になり、その数学的取扱いは一般にはほとんど不可能になり、また一方弾性学における基礎方程式の数学的解法においては数多くの研究が行われ、かなり広範な解法が可能な点にある。かつまた土の弾性的性質のみをとりあげて考察した結果は、実際の現象を近似的に説明しうる場合も少なくない点も弾性学的な考察方法をとる一意義である。

斜面の釣合状態を論ずる本研究において、まず最初その限界釣合の状態について考察を進めたのであるが、その結果は斜面全体が同時にこの条件を満足するような状態は考えられず、当然中間的な釣合状態に対する考慮が必要となつた。かつまた前節の考察においては単に力の釣合のみを対称として考えたもので、変形についてはなんらの結果も導き得なかつた。そこでこの中間的な平衡状態における変形挙措は弾性的なものであると仮定して、斜面中の応力分布、変形状態について解析的考察を行つてみる。

§ 2 基礎方程式

問題を単純化してとりあつかうため、斜面のひろがりを長さ l 、厚さ t の矩形とし、表面傾斜角 ω 、土の単位重量 γ 、弾性係数 E 、ポアソン比 $1/m$ とし、矩形周辺の4境界面において適当な境界条

件を与え、応力分布および変形を求めてみる。

座標原点を斜面底辺下端にとり、これより右側上方へ x 軸、上方これと直角な方向に y 軸をとる。応力成分を σ_x, σ_y, τ , 変位成分を u, v , 物体力成分を X, Y とし 2 次元変形の問題として Airy の応力関数 F , Margure の変位関数 Φ , 物体力ポテンシャル Ω の関係を求めると次の諸式で与えられる。

応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \Omega \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \Omega \\ \tau &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-1)$$

物体力

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \dots\dots\dots (2-2)$$

応力平衡条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-3)$$

適合条件

$$\frac{m-1}{m} \Delta \Delta F + \frac{m-2}{m} \Delta \Omega = 0 \dots\dots\dots (2-4)$$

ここに Δ は Laplace の演算記号 ($\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) をあらわす。

変位成分

$$\left. \begin{aligned} 2Gu &= -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{2y} \\ 2Gv &= -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-5)$$

G はせん断弾性係数で $mE/2(m+1)$ である。

F, Φ, Ω の満足すべき条件は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta F &= 0, \quad \Delta \Phi = 0, \quad \Delta \Omega = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot y} &= \Delta F + \frac{m-2}{m-1} \Omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-6)$$

となる。

§ 3 基礎方程式の解

まず物体力は土の自重のみが作用しているものとするから、 x 軸の水平に対する傾斜角を ω にとれば、その x, y 成分は、

$$X = \gamma \sin \omega, \quad Y = \gamma \cos \omega \dots\dots\dots (2-7)$$

となりしたがって物体力のポテンシャルは、

$$\Omega = \gamma x \sin \omega + \gamma y \cos \omega \dots\dots\dots (2-8)$$

となる。

この場合与えられる境界条件は、地表面においてこれと直角な方向の直応力およびせん断力が 0 であること、ならびに各固定境界面においてこれ

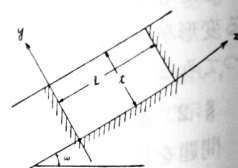


図2-1

と直角方向の変位が 0 であるという条件である。よつて境界条件として、

$$\left. \begin{array}{lll} y=t & \text{において} & \sigma_y=0 \cdots \cdots \cdots (2-9-1) \\ y=t & \text{''} & \tau=0 \cdots \cdots \cdots (2-9-2) \\ x=0 & \text{''} & u=0 \cdots \cdots \cdots (2-9-3) \\ x=l & \text{''} & u=0 \cdots \cdots \cdots (2-9-4) \\ y=0 & \text{''} & v=0 \cdots \cdots \cdots (2-9-5) \end{array} \right\} \cdots \cdots \cdots (2-9)$$

が与えられる。

いまこの条件を満足し、Laplace の方程式を満足する Airy の応力関数として、次のごとく 3 次以下の多項式と、円および双曲線関数の積の級数和の形をとることにする。

$$\begin{aligned} F(x, y) = & K_1 x^2 + K_2 xy + K_3 y^2 + K_4 x^3 + K_5 x^2 y + K_6 xy^2 + K_7 y^3 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\alpha x) \{A_n \cosh(n\alpha y) + B_n y \sinh(n\alpha y) + C_n \sinh(n\alpha y) \\ & + D_n y \cosh(n\alpha y)\} \cdots \cdots \cdots (2-10) \end{aligned}$$

(2-8, 10, 1)式から各応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = & 2K_3 + (2K_6 + r \sin \omega)x + (6K_7 + r \cos \omega)y + f''_{yy}(x, y) \\ \sigma_y = & 2K_1 + (6K_4 + r \sin \omega)x + (2K_5 + r \cos \omega)y + f''_{xx}(x, y) \\ \tau = & -K_2 - 2K_5 x - 2K_6 y - f''_{xy}(x, y) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (2-11)$$

となりまた(2-6)式を用い、応力関数 $F(x, y)$ から Margure の変位関数を求めると次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & 2(K_1 + K_3)xy + \frac{1}{6} \left(6K_4 + 2K_6 + \frac{m-2}{m-1} r \sin \omega \right) (3x^2 y - y^3) \\ & + \frac{1}{6} \left(2K_5 + 6K_7 + \frac{m-2}{m-1} r \cos \omega \right) (3xy^2 - x^3) \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n\alpha)^{-1} \sin(n\alpha x) \{B_n \sinh(n\alpha y) + D_n \cosh(n\alpha y)\} \cdots \cdots \cdots (2-12) \end{aligned}$$

(2-10, 12)式および(2-5)式より各変位成分は

$$\begin{aligned} 2Gu = & -(2K_1 x - K_2 y + 3K_4 x^2 + 2K_5 xy + K_6 y^2) \\ & + \frac{m-1}{m} \left\{ 2(K_1 + K_3)x + \frac{1}{2} \left(6K_4 + 2K_6 + \frac{m-2}{m-1} r \sin \omega \right) (x^2 - y^2) \right. \\ & \left. + \left(2K_5 + 6K_7 + \frac{m-2}{m-1} r \cos \omega \right) xy \right\} - f'_x(x, y) + \frac{m-1}{m} \varphi_y(x, y) \cdots \cdots \cdots (2-13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2Gv = & -(K_2 x + 2K_3 y + K_5 x^2 + 2K_6 xy + 3K_7 y^2) \\ & + \frac{m-1}{m} \left\{ 2(K_1 + K_3)y + \left(6K_4 + 2K_6 + \frac{m-2}{m-1} r \sin \omega \right) xy \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(2K_5 + 6K_7 + \frac{m-2}{m-1} r \cos \omega \right) (y^2 - x^2) \right\} - f'_y(x, y) + \frac{m-1}{m} \varphi'_x(x, y) \cdots \cdots (2-13) \end{aligned}$$

(2-10)~(2-13)式における f'_x , f'_y , f''_{xx} ,等は $f(x, y)$ の x , y による一次偏微分, x および y による 2 次偏微分等をあらわし, これらは次のように示される。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum \cos(n\alpha x) \cdot f_1(y) \\ f'_x(x, y) &= -\sum (n\alpha) \sin(n\alpha x) \cdot f_1(y) \\ f'_y(x, y) &= \sum \cos(n\alpha x) f_2(y) \\ f''_{xx}(x, y) &= -\sum (n\alpha)^2 \cos(n\alpha x) \cdot f_1(y) \\ f''_{xy}(x, y) &= -\sum (n\alpha) \sin(n\alpha x) f_2(y) \\ f''_{yy}(x, y) &= \sum \cos(n\alpha x) \cdot f_3(y) \\ \varphi(x, y) &= 2 \sum \sin(n\alpha x) \cdot \varphi_1(y) \end{aligned}$$

$$\varphi'_x(x, y) = 2 \sum (n\alpha) \cos(n\alpha x) \cdot \varphi_1(y)$$

$$\varphi'_y(x, y) = 2 \sum \sin(n\alpha x) \cdot \varphi_2(y)$$

$$f_1(y) = A_n \cosh(n\alpha y) + B_n y \sinh(n\alpha y) + C_n y \sinh(n\alpha y) + D_n y \cosh(n\alpha y)$$

$$f_2(y) = A_n(n\alpha) \sinh(n\alpha y) + B_n \{ \sinh(n\alpha y) + (n\alpha y) \cosh(n\alpha y) + C_n(n\alpha) \cosh(n\alpha y) \\ + D_n \{ \cosh(n\alpha y) + (n\alpha y) \sinh(n\alpha y) \}$$

$$f_3(y) = A_n(n\alpha)^2 \cosh(n\alpha y) + B_n(n\alpha) \{ 2 \cosh(n\alpha y) + (n\alpha y) \sinh(n\alpha y) \} \\ + C_n(n\alpha)^2 \sinh(n\alpha y) + D_n(n\alpha) \{ 2 \sinh(n\alpha y) + (n\alpha y) \cosh(n\alpha y) \}$$

$$\varphi_1(y) = B_n(n\alpha)^{-1} \sinh(n\alpha y) + D_n(n\alpha)^{-1} \cosh(n\alpha y)$$

$$\varphi_2(y) = B_n \cosh(n\alpha y) + D_n \sinh(n\alpha y)$$

次に前記の境界条件(2-9)によつて未知係数 $K_1, K_2, \dots, K_7$ および $A_n, B_n, \dots$ を決定する。ところで応力関数において $f(x, y)$ なる級数は x について偶関数であらわされているので、(2-9)式の条件を満足させるためには、 $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2$ が奇関数であるかあるいは偶関数であるかによつて、他の項も奇あるいは偶関数に級数展開を行うことにする。そこでこれに必要な級数をうるために、 $0 < x < l$ なる区間において x の正弦および余弦級数による Fourier の展開を行うことにする。

正弦級数の場合 (奇関数)

$$x^2 = \frac{2l^2}{\pi} \sum_{n=1, \dots}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\alpha x)}{n} - \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha x)}{n^3}$$

$$x = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(n\alpha x)}{n}$$

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha x)}{n}$$

余弦級数の場合 (偶関数)

$$x^2 = \frac{l^2}{3} - \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n\alpha x)}{n^2}$$

$$x = \frac{l^2}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha x)}{n^2}$$

となりここに $\alpha = \pi/l$ である。

まず地表の条件 $y=t$ において $\sigma_y=0, \tau=0$ より

$$2K_1 + 6K_4x + 2K_5t + \gamma x \sin \omega + \gamma t \cos \omega + f''_{xx}(x \cdot t) = 0 \quad (2-14)$$

$$2K_5x + 2K_6t + f''_{xy}(x \cdot t) = 0 \quad (2-15)$$

ここにおいて(14)式は偶関数に(15)式は奇関数として展開を行うと

$$4K_1 + 4K_5t + 6K_4l + 2\gamma t \cos \omega + \gamma l \sin \omega = 0$$

$$n=1, 3, 5, \dots \text{において}$$

$$24K_4 + 4\gamma \sin \omega + (n\alpha)^4 l f_1(t) = 0$$

$$4K_5 + \{4K_6t/l\} + (n\alpha)^2 f_2(t) = 0$$

$$n=2, 4, 6, \dots \text{において}$$

$$24K_4 + 4\gamma \sin \omega = 0$$

$$4K_5 - (n\alpha)^2 f_2(t) = 0$$

$$\dots \dots \dots (2-16)$$

次に底面の条件 $y=0$ において $v=0$ より

$$2mK_2x + 2(2m-1)K_5x^2 + 6(m-1)K_7x^2 + (m-2)\gamma \cos \omega + 2mf'_y(x, 0) - 2(m-1)\varphi'_x(x, 0) = 0 \quad (2-17)$$

となり、これを偶関数に展開して条件式を求めると、

$$\left. \begin{aligned} 2(2m-1)K_5 + 6(m-1)K_7 + (m-2)r \cos \omega &= 0 \\ mf_2(0) - 2(n\alpha)(m-1)\varphi_1(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-18)$$

上下端における固定条件は $x=0$, $x=l$ において $v=0$ が y の値いかにかわらず成立しなければならないから、 y^0 , y^1 , y^2 の係数を 0 にするという条件から

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= 0 \\ -4K_1 + 4(m-1)K_3 - 6mlK_4 - 2mlK_6 &= 0 \\ 6(m-1)K_4 + 2(2m-1)K_6 + (m-2)r \sin \omega &= 0 \\ 2K_5 - 6(m-1)K_7 - (m-2)r \cos \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-19)$$

をうる。しかして三角級数項は $-f'(x, y) + \frac{m-1}{m}\varphi'_y(x, y)$ となり、これはいずれも $\sin(n\alpha x)$ を含み $x=0$ および $x=l$ において 0 になる。ただしこの点において不連続な場合は、その点においてプラスおよびマイナスから取れんした場合の極限値の平均値が 0 になることを示すのでこの場合の条件としては 0 および l においてただ 1 個の極限値が存在しなければならないということになるが、一般にはこの条件が成立するのでこれについてはおのおの場合に対し検討することとする。

以上の境界条件を総括すると K_1 , K_2 K_7 に対し

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= 0 \\ -4K_1 + 4(m-1)K_3 - 6mlK_4 - 2mlK_6 &= 0 \\ 6(m-1)K_4 + 2(2m-1)K_6 + (m-2)r \sin \omega &= 0 \\ 2K_5 - 6(m-1)K_7 - (m-2)r \cos \omega &= 0 \\ 4K_1 + 4K_3 + 6lK_4 + 2rt \cos \omega + \gamma l \sin \omega &= 0 \\ 2(m-1)K_5 + 6(m-1)K_7 + (m-2)r \cos \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-20)$$

となり未知数 7 個に対し条件 6 個となるのでまず K_6 を既知数として K_1 , K_2 K_5 , K_7 を求める。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{2}rt \cos \omega - \frac{1}{4} \frac{1}{m-1} r l \sin \omega + \frac{1}{2} \frac{2m-1}{m-1} l K_6 \\ K_3 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{m-1} r t \cos \omega - \frac{1}{4} r l \sin \omega \\ K_4 &= -\frac{1}{6} \frac{m-2}{m-1} r \sin \omega - \frac{1}{3} \frac{2m-1}{m-1} K_6 \\ K_7 &= -\frac{1}{6} \frac{m-2}{m-1} r \cos \omega \\ K_2 &= K_5 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-21)$$

したがって各応力成分および変位成分は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (r \sin \omega + 2K_6)(x-l/2) + \frac{1}{m-1} r \cos \omega (y-t) + f''_{yy}(x, y) \\ \sigma_y &= \frac{1}{m-1} \{r \sin \omega + 2(2m-1)K_6\} (x-l/2) + r \cos \omega (y-t) + f''_{xx}(x, y) \\ \tau &= -2K_6 y - f''_{xy}(x, y) \\ 2Gu &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{m-2}{m-1} r \sin \omega + \frac{2m}{m-1} K_6 \right\} \{x^2 - lx\} + f'_x(x, y) + \frac{m-1}{m} \varphi'_y(x, y) \\ 2Gv &= \frac{m-2}{m-1} r \cos \omega (y^2/2 - ty) + 2K_6 ly - f'_y(x, y) + \frac{m-1}{m} \varphi'_x(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-22)$$

次に A_n , B_n , C_n , D_n を決定する条件は

$$\left. \begin{aligned} n &= 1, 3, 5, \dots\dots\dots \text{において} \\ -(n\alpha)^4 l f_1(t) &= 12K_4 + 2r \sin \omega \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (n\alpha)^2 l f_2(t) &= 4K_0 t \\
 m f_2(0) - 2n\alpha(m-1)\varphi_1(0) &= 0 \\
 n=2, 4, 6, \dots \text{において} \\
 f_1(t) &= f_2(t) = m f_2(0) - 2n\alpha(m-1)\varphi_1(0) = 0
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2-23)$$

となりこれまた一条件不足している。そこでまず底面かどすなわち $y=0$, $x=0$ および $y=0$, $x=l$ においてせん断変形 0 とすれば

$$K_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (2-24)$$

となり K は決定される。(この条件を最初から考慮してもよいのであるが、普通固定条件としては固定境界面におけるこれと直角方向の変位が 0 であるという条件のみを用いるので別に独立して考慮した。したがって K_0 を決定するために、他の仮定を設けて境界条件を与えることもできる)。

A_n , B_n , C_n , D_n をきめるもう一つの条件として考えられるものは、底面における自由支持すなわち $y=0$ において $\tau=0$ ともう一つ完全固定すなわち $y=0$ において $u=0$ の場合で、この 2 つの場合に対し

$$\begin{aligned}
 y=0 \text{ において } \tau=0 \text{ より} \\
 f_2(0) &= 0 \quad \dots\dots\dots (2-25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y=0 \text{ において } u=0 \text{ より} \\
 4m(m-2)\gamma \sin \omega - (m-1)(\alpha n)^3 l \{ m n \alpha f_1(0) + 2(m-1)\varphi_2(0) \} &= 0 \quad \dots\dots\dots (2-26)
 \end{aligned}$$

をうる。(2-24)式の条件を採用し(2-23)式を書きなおすと、

$$\begin{aligned}
 (m-1)(\alpha n)^4 l \{ A_n \cosh(nat) + B_n t \sinh(nat) + C_n \sinh(nat) \\
 + D_n t \cosh(nat) \} &= -4\gamma \sin \omega \quad [\text{or}=0] \\
 A_n n \alpha \sinh(nat) + B_n \{ \sinh(nat) + nat \cosh(nat) \} \\
 + C_n n \alpha \cosh(nat) + D_n \{ \cosh(nat) + nat \sinh(nat) \} &= 0 \\
 C_n m n \alpha - D_n(m-2) &= 0
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2-27)$$

となる。

式中第 1 式の右辺〔 〕内は n が偶数の場合であつて、奇数の場合は $-4\gamma \sin \omega$ となる。2 式以下は偶数項、奇数項とも共通である。また(2-25), (2-26)式は

$$C_n n \alpha + D_n = 0 \quad \dots\dots\dots (2-28)$$

$$A_n m n \alpha + 2B_n(m-1) = 4m(m-2)\gamma l \sin \omega / (m-1)\alpha \pi^2 n^3 \quad [\text{or}=0] \quad \dots\dots\dots (2-29)$$

となり、結局(2-28), (2-29)式のいずれの条件を用いても偶数項 $n=2, 4, 6, \dots$ に対しては $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ となり、この解において級数和の項は奇数項だけが存在することになる。

いま $x=0$ において $\tau=0$ の場合を Case I, $u=0$ の場合を Case II とするとそれぞれの場合に応じ、 A_n , B_n , C_n , D_n は次のようになる。

Case I

$$\begin{aligned}
 A_n &= -\frac{2a}{(m-1)n\alpha} \cdot \frac{\sinh(nat) + nat \cosh(nat)}{2nat + \sinh(2nat)} \\
 B_n &= \frac{2a}{m-1} \cdot \frac{\sinh(nat)}{2nat + \sinh(2nat)} \\
 C_n &= D_n = 0 \\
 a &= 4\gamma \sin \omega / l(n\alpha)^3
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2-30)$$

Case II

$$A_n = -\frac{2(m-1)}{m n \alpha} \cdot \frac{k_2}{k_1} + \frac{a(m-2)}{n \alpha(m-1)}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{k_2}{k_1}, \quad C_n = \frac{m-2}{mn\alpha} \cdot \frac{k_3}{k_1}, \quad D_n = \frac{k_3}{k_1} \\
 k_1 &= -(nat)^2 - 4\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \cosh^2(nat) + \left(\frac{m-2}{m}\right)^2 \sinh^2(nat) \\
 k_2 &= -\frac{a}{m-1} nat \sinh(nat) - \frac{2a}{m} \cosh(nat) \\
 &\quad - \frac{m-2}{m-1} a \cosh^2(nat) - \frac{(m-2)^2}{m-1} \cdot \frac{a}{m} \\
 k_3 &= \frac{a}{m-1} nat \cosh(nat) - \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{a}{m} \sinh(nat) \\
 &\quad + \frac{m-2}{m-1} a \sinh(nat) \cosh(nat) \\
 a &= 4\gamma \sin \omega / l(n\alpha)^3
 \end{aligned} \tag{2-31}$$

ここで $1/m$ は Poisson 比であつて、この値は非圧縮性弾性体において $1/2$ 、完全圧縮性の場合 0 となり一般にはその中間をとり、普通土の場合は $1/3 \sim 1/4$ 程度とされている。応力分布および変形状態を考察する場合はその両極端すなわち $m=2$ ならびに $m=\infty$ の場合を考えこの両者の中間の状態を推定する。

Case I-1 ($m=\infty$)

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0 \tag{2-32}$$

Case I-2 ($m=2$)

$$\begin{aligned}
 A_n &= -\frac{\partial a}{n\alpha} \cdot \frac{\sinh(nat) + nat \cosh(nat)}{2nat + \sinh(2nat)} \\
 B_n &= 2a \frac{\sinh(nat)}{2nat + \sinh(2nat)} \\
 C_n &= D_n = 0
 \end{aligned} \tag{2-33}$$

Case II-1 ($m=\infty$)

$$\begin{aligned}
 A_n &= -\frac{2}{n\alpha} \cdot \frac{k_{2-1}}{k_{1-1}} + \frac{a}{n\alpha}, \quad B_n = \frac{k_{2-1}}{k_{1-1}} \\
 C_n &= \frac{1}{n\alpha} \cdot \frac{k_{3-1}}{k_{1-1}}, \quad D_n = \frac{k_{3-1}}{k_{1-1}} \\
 k_{1-1} &= -(nat)^2 - 4 \cosh^2(nat) + \sinh^2(nat) \\
 k_{2-1} &= -a \{ \cosh^2(nat) + 1 \} \\
 k_{3-1} &= a \{ nat + \sinh(nat) \cosh(nat) \}
 \end{aligned} \tag{2-34}$$

Case II-2 ($m=2$)

$$\begin{aligned}
 A_n &= -\frac{1}{n\alpha} \cdot \frac{k_{2-2}}{k_{1-2}}, \quad B_n = \frac{k_{2-2}}{k_{1-2}} \\
 C_n &= 0, \quad D_n = \frac{k_{3-2}}{k_{1-2}} \\
 k_{1-2} &= -(nat)^2 - \cosh^2(nat) \\
 k_{2-2} &= -a \{ nat \sinh(nat) + \cosh(nat) \} \\
 k_{3-2} &= anat \cosh(nat)
 \end{aligned} \tag{2-35}$$

以上導いた(2-22)式および(2-32~35)式によつて、斜面中の応力分布ならびに変形状態を求めることができる。

§ 4 数値計算による考察

§ 3において求められた各式はいずれも級数和の項を含み、このままではその性質を明確にするこ

とが困難なので適当な数値例によつてその傾向を判断し一般的な考察を行うことにする。

まず最初に実際問題と最も関係深く、また容易に観察しうる地表面の応力および変形について考察する。

地表面 $y=t$ においては境界条件に与えられるように $\sigma_y = \tau = 0$ であるから、 σ_x , u , v の計算式をおおのこの場合について求めると、

Case I-1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma \sin \omega (x-l/2) \\ Eu &= \frac{1}{2} \gamma \sin \omega (x^2 - lx) \\ Ev &= -\frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-36)$$

Case II-1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma \sin \omega (x-l/2) \\ &+ \frac{4\gamma l \sin \omega}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(nax)}{n^2} \cdot \frac{2nat \sinh(nat) - 4 \cosh(nat)}{-(nat)^2 - 4 \cosh^2(nat) + \sinh^2(nat)} \\ Eu &= -\frac{4\gamma l^2 \sin \omega}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(nax)}{n^3} \left\{ 1 - \frac{2nat \sinh(nat) - 4 \cosh(nat)}{-(nat)^2 - 4 \cosh^2(nat) + \sinh^2(nat)} \right\} \\ Ev &= -\frac{1}{2} \gamma t^2 \cos \omega \\ &- \frac{4\gamma l^2 \sin \omega}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(nax)}{n^3} \cdot \frac{2nat \cosh(nat) - 2 \sinh(nat)}{-(nat)^2 - 4 \cosh^2(nat) + \sinh^2(nat)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-37)$$

Case I-2

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma \sin \omega (x-l/2) - \frac{4\gamma l \sin \omega}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(nax)}{n^2} \cdot \frac{2nat - \sinh(2nat)}{2nat + \sinh(2nat)} \\ \frac{2}{3} Eu &= -\frac{4\gamma l^2 \sin \omega}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(nat)}{n^3} \cdot \frac{nat}{2nat + \sinh(2nat)} \\ \frac{2}{3} Ev &= -\frac{4\gamma l^2 \sin \omega}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(nat)}{n^3} \cdot \frac{2 \sinh^2(nat)}{2nat + \sinh(2nat)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2-38)$$

Case II-2

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma \sin \omega (x-l/2) - \frac{4\gamma l \sin \omega}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(nax)}{n^2} \cdot \frac{(nat)^2 - \cosh^2(nat)}{(nat)^2 + \cosh^2(nat)} \\ \frac{2}{3} Eu &= -\frac{4\gamma l^2 \sin \omega}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(nax)}{n^3} \cdot \frac{(nat)^2}{(nat)^2 + \cosh^2(nat)} \\ \frac{2}{3} Ev &= -\frac{4\gamma l^2 \sin \omega}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(nax)}{n^3} \cdot \frac{nat - \sinh(nat) \cosh(nat)}{(nat)^2 + \cosh^2(nat)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-39)$$

となる。

計算例としては斜面長 $l=10$, $t=10/\pi$, $7/\pi$, $5/\pi$, $3/\pi$, $2/\pi$, $1/\pi$ とし、 σ_x , u , v は $\gamma \sin \omega$ を単位としてあらわす。Case-I (底面自由支持) において $m=\infty$ の場合は、 σ_x および u は t に関係なく x だけで定まる値をとり、 v は l に関係なく t だけで定められる。また $m=\infty$ の場合 Case-I, II ともに v は $\cos \omega$ の項を含むので、他の場合と変形状態を比較するため $\omega=30^\circ$ すなわち $\cos \omega=1.732 \sin \omega$ として計算した。なおここで t について π を分母とする場合を計算例としたのは $nat=nat/l$ が簡単な数値になる方が双曲線関数表をひくのに便利のためである。このようにして求めた計算結果を表2-1, 2-2, 2-3に示し、またこれを図にあらわしたものが図2-2, 図2-3, 図2-4である。

この計算結果によつて考察するに、まず σ_x は斜面中点において0となり、それより上部に引張力、下部に圧縮力を生じ中点に対し逆対称の分布をなす。Case I-1 すなわち底面自由支持、完全圧縮性

表 2-1 $\sigma_n (y=t)$

		Case I				Case II			
$\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}$		$\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.667 \\ 8.333 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.333 \\ 6.667 \end{Bmatrix}$	5	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.667 \\ 8.333 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.333 \\ 6.667 \end{Bmatrix}$	5
m = 2						m = 2			
$10/\pi$		± 2.470	± 1.951	± 1.127	0	± 2.470	± 1.959	± 1.131	0
$7/\pi$		± 3.540	± 2.964	± 1.618	0	± 2.117	± 1.553	± 0.787	0
$5/\pi$		± 3.962	± 3.200	± 1.659	0	± 1.646	± 1.111	± 0.438	0
$3/\pi$		± 4.372	± 3.317	± 1.663	0	± 1.014	± 0.393	± 0.105	0
$2/\pi$		± 4.586	± 3.333	± 1.667	0	± 0.677	± 0.142	± 0.024	0
$1/\pi$		± 4.785	± 3.333	± 1.667	0	± 0.341	± 0.016	± 0.004	0
m = ∞						m = ∞			
$10/\pi$		± 5.0	± 3.333	± 1.667	0	± 3.333	± 1.869	± 0.916	0
$7/\pi$		"	"	"	0	± 2.425	± 1.095	± 0.385	0
$5/\pi$		"	"	"	0	± 1.748	± 0.539	± 0.146	0
$3/\pi$		"	"	"	0	± 1.054	± 0.142	± 0.024	0
$2/\pi$		"	"	"	0	± 0.689	± 0.036	± 0.008	0
$1/\pi$		"	"	"	0	± 0.341	0	0	0

表 2-2 $u (y=t)$

		Case I				Case II			
$\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}$		$\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.667 \\ 8.333 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.333 \\ 6.667 \end{Bmatrix}$	5	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1.667 \\ 8.333 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3.333 \\ 6.667 \end{Bmatrix}$	5
m = 2						m = 2			
$10/\pi$		0	6.95	11.91	13.77	0	5.86	9.37	11.35
$7/\pi$		0	8.37	14.23	16.27	0	4.88	7.45	8.91
$5/\pi$		0	9.27	15.39	17.51	0	3.64	5.48	6.02
$3/\pi$		0	9.68	16.37	18.34	0	1.91	2.38	2.63
$2/\pi$		0	10.23	16.50	18.59	0	1.01	1.08	1.24
$1/\pi$		0	10.38	16.66	18.75	0	0.28	0.31	0.34
m = ∞						m = ∞			
$10/\pi$		0	13.89	22.24	25.00	0	8.55	12.86	14.15
$7/\pi$		"	"	"	"	0	5.66	7.98	8.57
$5/\pi$		"	"	"	"	0	3.56	4.62	4.78
$3/\pi$		"	"	"	"	0	1.55	1.78	1.83
$2/\pi$		"	"	"	"	0	0.77	0.80	0.80
$1/\pi$		"	"	"	"	0	0.18	0.21	0.21

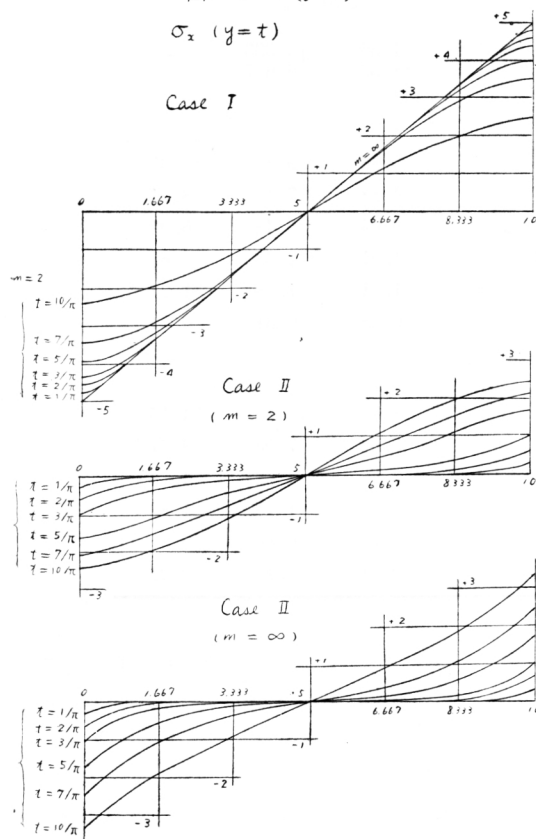
の場合は土層の厚さにかかわらず直線分布となり、重力の斜面方向分力がそのまま x 方向に作用している。Case I—2 すなわち底面自由支持、非圧縮性の場合はいずれも前者より小さい応力となり、応力分布の変化は中央に向うに従つて激しいような曲線をなす。またこのとき応力の大きさは t が大きくなるほど小さい値を示している。このことは土圧の厚さが小さいほど下端の圧縮力および上端の引張力が大きくなる事を示している。Case II—2 すなわち底面完全固定の場合はいずれも Case I—1

表 2-3 $v(y=t)$

x t	Case I				Case II			
	$\begin{cases} 0 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 1.667 \\ 8.333 \end{cases}$	$\begin{cases} 3.333 \\ 6.667 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 0 \\ 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 1.667 \\ 8.333 \end{cases}$	$\begin{cases} 3.333 \\ 6.667 \end{cases}$	5
m = 2					m = 2			
$10/\pi$	± 21.00	± 16.17	± 8.14	0	± 11.21	± 7.75	± 3.41	0
$7/\pi$	± 15.31	± 11.38	± 5.55	0	± 6.25	± 3.77	± 1.60	0
$5/\pi$	± 11.23	± 8.11	± 4.17	0	± 4.11	± 2.25	± 0.98	0
$3/\pi$	± 6.92	± 4.80	± 2.27	0	± 1.24	± 0.36	± 0.15	0
$2/\pi$	± 4.70	± 3.18	± 1.45	0	± 0.54	± 0.08	0	0
$1/\pi$	± 2.30	± 1.63	± 0.77	0	± 0.15	0	0	0
m = ∞					m = ∞			
$10/\pi$	-32.88	"	"	(-32.88)	± 2.17	± 1.81	± 0.93	0
$7/\pi$	-16.12	"	"	(-16.12)	± 0.98	± 0.88	± 0.52	0
$5/\pi$	-8.21	"	"	(-8.21)	± 0.62	± 0.31	± 0.05	0
$3/\pi$	-2.97	"	"	(-2.97)	± 0.21	± 0.08	0	0
$2/\pi$	-1.32	"	"	(-1.32)	± 0.15	± 0.05	0	0
$1/\pi$	-0.34	"	"	(-0.34)	± 0	0	0	0

註 Case I $m = \infty$ においてはX方向には一定値をとる。

Case II $m = \infty$ の値は, Case I の値を基準値としてこれにプラスまたはマイナスする。

図2-2 $u(y=t)$ $\sigma_x (y=t)$ 図2-3 $\sigma_x (y=t)$ $u (y=t)$

Case I

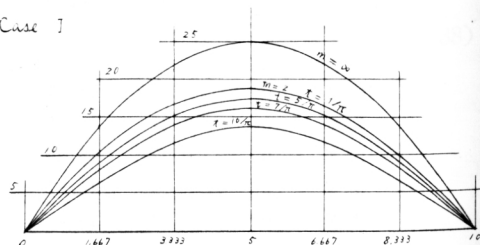
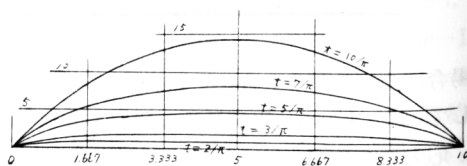
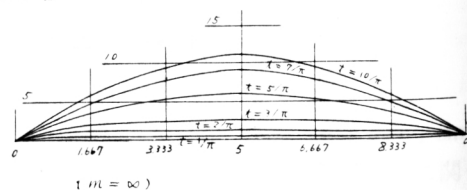
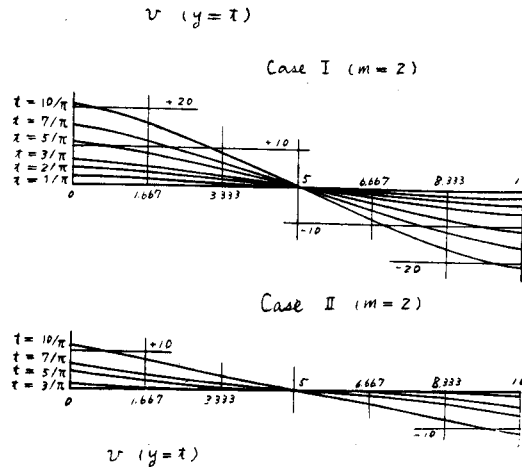
Case II ($m=2$)

図2-4 $v_1 (y=t)$ 

1より小さい値を示すが、全体の傾向としてCase-Iと全くことなる点は、 t が大きいときほど σ_x の値が大きく、 t が1の1/10以下になれば表面の上下端附近をのぞいて全面的に0に近づいてしまう点である。一般的に推察すれば t が小さいほど σ_x が小さくなるのが当然であるに反し、Case I—2のようにこの逆の現象があらわれるのは、底面自由支持の場合は、土層を一体としてはりのように考えると上下端だけ固定しそのたわみを底面で支えているような形になり、したがってはりの厚さの大きい方が軸方向の力が小さくなる場合と対比され、また完全固定の場合は底面があらゆる点で全く動かないように支持されるので t が小さい方が σ_x も小さくなくと考えることができる。この自由支持および完全固定のふたつの場合を崩壊現象と結びつけて考えてみると、前者は底面にすべり面あるいはすべり層が生じてこれを上部土層の強度によって支えているような、たとえば地すべりなどにおける状態と対応され、また後者は底面に軟弱な層が存在せず均一な層がそれ自体で崩壊する場合に対応させることができる。また別な表現をするならば最初安定状態にある土層はその厚さが薄い場合の方が表面の圧縮力、引張力ともに小さく安定であるが、いつたんすべりが生じるならば、薄い層の方が圧縮力、引張力ともに大きくなり表層が破壊され崩落する可能性が大きいことを示している。結局これを総合すれば浅い土層のすべりにおいてはいつたん鈎合が破れると一挙に崩落しやすいが、深い土層の場合は安定的な変形によって崩落を免れる可能性が大きいものと推察することができる。

Case-II についてさらに詳細にみると、 $m=\infty$ の場合にはどの分布においても上下端の方が応力の変化率が大きであつて、これはちょうどCase I—2の逆になつている。また $m=2$ の場合 t が小さいときは上下端の変化率の方が大きく、 t が大きくなると中央部の変化率の方が大きくなる傾向を示している。その値自体は上下端においては $m=\infty$ の方が大きく、中央に近づくとも $m=2$ の方が大きい、一般には両者の中間的な傾向をとり比較的直線分布に近づくものと思われる。

次に地表面の変形 u 、 v であるが、これは σ_x はほぼ u の相対変形量に比例するので、 u は中央で大きく両端に近づくにしたがつて小さい値を示している。一般的にはほぼ2次曲線に近く両端ほど変化率大で、中点において極大値を示している。底面完全固定で厚さが薄い場合では変形は大部分下端部の圧縮と上端部の引張によつて生じ、その中間においてはほとんどそのまま斜面下方へ移動したような形になつている。土層の厚い場合および自由支持の場合も同様の傾向を示すがその様相は次第に緩和される。 v については $m=2$ の場合には非圧縮性であるから、中点においては0となりこれより下部で正すなわちふくれ上りを、上部で負すなわち沈下を生ずる。その分布は u の分布にくらべてはる

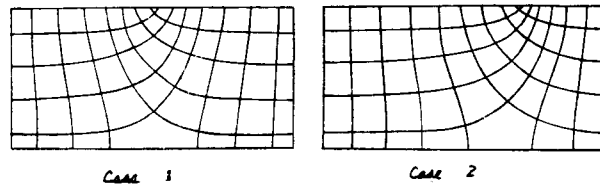
表 2-5

x \ y		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0	σ_1	3.88	3.35	2.82	2.03	1.07	0	0	0	0	0	0
	σ_2	0	0	0	0	0	0	-1.07	-2.03	-2.82	-3.35	-3.88
2	σ_1	11.49	9.83	8.31	6.81	5.34	4.18	3.77	3.70	3.63	3.42	2.32
	σ_2	4.60	3.50	3.30	3.22	3.16	2.75	1.59	0.12	-1.39	-2.90	-4.57
4	σ_1	17.02	14.98	12.96	11.04	9.29	7.98	7.46	7.28	7.04	6.41	4.98
	σ_2	8.88	7.44	6.82	6.58	6.40	5.88	4.57	2.81	0.89	-1.13	-3.16
6	σ_1	21.61	19.53	17.32	15.09	12.94	11.26	10.76	10.59	10.23	9.41	7.84
	σ_2	12.94	11.38	10.55	10.19	10.03	9.53	7.84	5.69	3.46	1.25	-0.82
8	σ_1	25.58	23.47	21.18	18.80	16.40	14.35	14.01	13.29	13.48	12.57	10.96
	σ_2	16.75	15.14	14.23	13.82	13.70	13.36	11.31	8.91	6.53	4.24	2.14
10	σ_1	29.19	27.08	24.76	22.33	19.83	17.32	17.38	17.28	16.86	15.93	14.30
	σ_2	20.34	18.71	17.78	17.36	17.26	17.32	14.81	12.31	9.87	7.56	5.45

表 2-6

x \ y		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
0	σ_1	7.75	7.23	6.70	5.90	4.95	3.88	2.81	1.85	1.06	0.52	0
	σ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	σ_1	15.37	13.68	12.13	10.59	9.29	7.47	5.96	4.72	3.99	3.55	3.32
	σ_2	4.60	3.53	3.36	3.32	3.59	3.34	3.28	2.99	2.13	0.86	-0.69
4	σ_1	20.90	18.84	16.78	14.78	13.37	11.07	9.37	8.05	7.28	6.47	4.98
	σ_2	8.88	7.46	6.88	6.71	6.20	6.66	6.53	5.92	4.53	2.69	0.71
6	σ_1	25.48	23.40	21.17	18.91	16.66	14.45	12.39	10.99	10.33	9.43	7.84
	σ_2	12.94	11.38	10.58	10.26	10.20	10.21	10.08	9.17	7.24	5.11	3.05
8	σ_1	29.45	27.34	25.05	22.66	20.22	17.80	15.44	14.02	13.52	12.58	10.96
	σ_2	16.75	15.14	14.24	13.84	13.75	13.79	13.76	12.66	10.38	8.12	6.01
10	σ_1	33.07	30.95	28.64	26.20	23.71	21.20	18.69	17.28	16.86	15.93	14.30
	σ_2	20.03	18.71	17.78	17.36	17.26	17.32	17.38	16.19	13.75	11.44	9.33

図2-5



土層内部の破壊条件を考えるためにここに求めた主応力値を用い、内部摩擦説による破壊条件によつて判断すると、破壊の可能性の大きい部分は斜面上端部に広く、中央ならびに下方は比較的安定である。これは主として土が圧縮強度にくらべ引張強度が甚しく小さい点に起因している。また破壊を生ずる領域は表層および下層において狭く、2～4附近に大きく、かつこの傾向は強度の主要部が摩擦力の場合表面にむかつて移行し、凝集力を主体とする場合は底面の方へ移行する。斜面上端におけ

る σ_x を 0 とすると、上方の破壊領域はなくなり下方のみに此の領域があらわれる。かつそのひろがり は表面附近で大きく、深さとともに急激に縮小する。また強度の構成（摩擦力と凝集力の関係）による相違は前者と同様の傾向を示している。実際に生ずる現象はどこか一点において破壊条件が満足されれば、この点を起点として塑性流動が始まり、斜面が変形することによつて応力を決定する境界条件は変化し破壊条件より危険な応力状態は存在し得ない。したがつてここで考えたような応力状態は本来どこにも破壊が生じないような安定な状態におけるものとみなすべきであるが、実験を行つた際に斜面上端部で引張り強度を生じるような境界条件を与えることが困難で、此の面が簡単に分離してしまつたが他の部分に破壊を生じている形跡はなかつたので上述のような簡単な計算によつて近似的にその傾向をしらべてみた。図2—5はその主応力方向を図示したものであるが、実験の結果はこの両者の中間的な傾向を示していた。最危険応力条件の方向が最大せん断力の面とほぼ一致するものとみなすと（摩擦抵抗が小さく強度は主として凝集力からなつている場合に相当する）すべり面の形は図中の2曲線群の交点を結んだものに近似し、前者においては斜面中央を中心にして対称形に、後者においては上部では曲率半径小さく、下部では大きい形になる。この事実は弾性的な応力条件を考える場合における、最危険応力条件の面と、限界釣合の状態におけるすべり面の形が同じ傾向を示すものといえる。すなわち、弾性的応力分布において斜面上半部に張力を生ずれば亀裂が発生し、そのため引張応力は消滅し後者の場合のような応力分布に移行し、かつこの状態でさらに斜面下部で圧縮による破壊が生じ始めると次第に限界釣合の状態になつてゆくものと考えられ、その場合の状況がこの過程を示すものとみなしうる。ただし、この状態に対する計算は近似的なもので弾性的な境界条件も厳密には満足していないが、実験の傾向と一致した斜面の変形状況を考察する一助ともなりうると思つたのでここにつけ加えた。

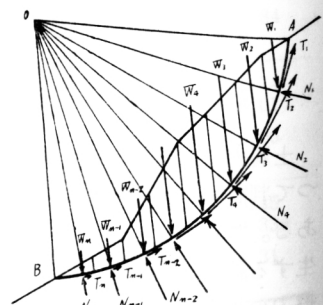
以上弾性理論による解析をもとにした数値計算結果から斜面の変形ならびに応力分布についての考察を行つたが、さらに詳細あるいは正確には破壊条件に達した部分は塑性的な平衡状態（限界釣合の状態）にあり、このような領域に接続して弾性的な釣合状態にある領域が存在するような場合を考慮すべきものと考えられるが、この問題についてはさらに基礎的な理論の発達にまたなければならない。

第3節 近似計算法

§ 1 従来の解法について

斜面が崩壊する場合すべり面の形は円弧またはそれに近い形をとることが経験的にみとめられるので、すべり面の形を簡単な曲線形に仮定しこれをもとにして安定計算を行う方法がかなり古くから試みられている。その最も簡単なかつ最も広く行われているものは、すべり面を円弧と仮定するもので、図解法あるいは半図解法による Slice Method, Frictioncircle Method, 数式的に解く山口法、野満法および Kötter の方程式から半解析的に求める Jaky 法などがあげられる。このうち Jaky 法は少し性格をことにし、むしろ解析的演算方法において興味深いものがあるが他の実用的な近似計算法と同時に論ずることはできない。そこでまずこれらの他の方法を簡単に説明しここに共通する問題点に検討を加え一解法を提起したい。まず Sliat Method は Swedish Method と呼ばれるもので、円弧すべり面上の土塊を多数の狭い巾をもつた鉛直部分 (slice) に分割し、おのおのの分塊についての釣合条件を考えこれを加え合わせる方法である。此の方法には平衡条件の考え方について2つの異つた方法があり、前者はすべりの原因になる力は円弧の中心に対する力率で

図3—1

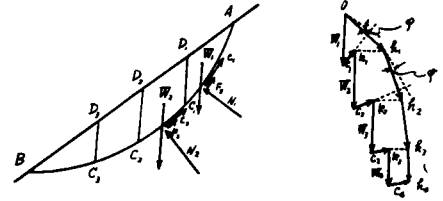


あるものとし、後者は特定の方向に対する合力であると考えている。前者は最も古く、Pettersen によつて提案されたもので、slice の重量 W をすべり面に直角な反力 N と平行な反力 T に分け、滑動力は T による Moment の総和とし、抵抗力はすべり面上の摩擦力 $N \tan \varphi$ および凝集力 C による Moment の総和と考える。斜面の安定度をあらわす指標 Safety factor は次式で示される。

$$S = \frac{\sum N \tan \varphi + CL}{\sum T} \quad \dots\dots\dots(3-1)$$

ここに L はすべり面の曲線長を示し、和の記号はすべり土塊中の全 slice の総和をとるものとする。この方法を任意に選んだ円の中心および半径に対して繰返し、 S が最小値になる場合に $S > 1$ ならば崩壊は起らないと判定するものである。後者は Fellenius によつて始められたもので、slice の平衡条件は単独には決定されず両側の鉛直面に作用する力が関係するものとしている。したがつて N および T にもこの力の影響が入り、Fellenius の方法ではこの内力の方向を水平とし、各 slice はその自重とすべり面上の摩擦反力、凝集力および水平な内力によつて釣合を保つものと考え、図に示すように最上部の slice から力の多角形を順にかいて行く方法である。このとき一般には最後の slice において多角形が閉合しないので、次に凝集力 C の値を変化させてこの操作をくり返し、多角形が閉合した場合の値を C_0 とする。しかして安全係数 Sc は

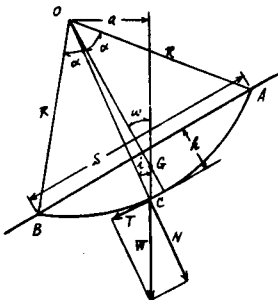
図3-2



$$Sc = C/C_0 \quad \dots\dots\dots(3-2)$$

で表わされる。一つのすべり面に対して Sc が求められたならば円の中心および半径を種々に変化させて計算を繰返し、最小の Sc によつて安全係数とするもので、崩壊の原因が土の性質特に凝集力の変化に大きく依存していると考えるべき表現方法といえる。

図3-3



以上2方法はいつでも土塊を slice に分けてその平衡条件を加え合わせる方法であるが、最初からすべり土塊を一体として取扱う方法に山口法、野満法および Friction-circle Method がある。前2者はほとんど同工異曲ともいうべきもので近似計算における order のとり方がおもな相異点であるので一括して概略を説明する。図3-3において釣合を保つ各力の円弧中心に対する Moment は

$$\left. \begin{aligned} \text{sliding moment } M_s &= r S^3 \sin \omega / 12 \\ \text{resisting moment} &= M_c + M_f = 2CR^2 \alpha + N \tan \varphi R \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3-3)$$

ここに S は斜面長、 ω は傾斜角、 R はすべり面半径を表わし、下式第1項は凝集力によるものを、第2項は摩擦力によるものを示している。ここで N の計算は山口法においては

$$N = W \cos i \doteq W \cos \omega \quad \dots\dots\dots(3-4)$$

をとり、野満法では

$$\left. \begin{aligned} N &= W \cos \omega / \{ \cos(\omega - i) - \tan \varphi \sin(\omega - i) \} \\ W \sin i - N \tan \varphi \cos(\omega - i) - CS &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3-5)$$

を用いている。かくして Safety factor = 1 すなわち限界釣合の条件は $M_s = M_c + M_f$ によつて与えられ、山口法においては

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{12} \sin \omega &= \frac{2C}{r} \left(\frac{S^4 + 4h^2}{8h} \right) \sin^{-1} \frac{4Sh}{S^2 + 4h^2} + \tan \varphi \cdot \cos \omega \left\{ \left(\frac{S^2 + 4h^2}{8h} \right)^3 \cdot \sin^{-1} \frac{4Sh}{S^2 + 4h^2} \right. \\ &\quad \left. - S \left(\frac{S^2 + 4h^2}{8h} \right) \left(\frac{S^2 - 4h^2}{16h} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(3-6) \end{aligned}$$

となり斜面長 S に対し土の厚さ h が小さいとき近似式として

$$\tan \varphi - \frac{2C}{\gamma h} \sec \omega - \frac{4}{3} \frac{S^2}{S^2 + 4h^2} \tan \omega = 0 \quad \dots\dots\dots (3-6')$$

が与えられる。また野満法においては

$$\left. \begin{aligned} N &= \gamma F \cos \omega \left(1 + 3 \tan \varphi \cdot \frac{h^2}{S^2} \tan \omega \right) \\ \tan \varphi \left(1 + 3 \tan \varphi \cdot \frac{h^2}{S^2} \tan \omega \right) + \frac{3C}{2\gamma h} \left(1 + \frac{h^2}{S^2} \right) \sec \omega - \tan \omega &= 0 \\ \tan \varphi \left\{ 1 + 3 \left(1 + \tan \varphi \cdot \tan \omega \right) \frac{h^2}{S^2} \right\} + \frac{3C}{2\gamma h} \left(1 + \frac{2C}{3} \cdot \frac{h^2}{S^2} \right) \sec \omega \\ - \tan \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-7)$$

の3式によつて与えられ、 $F \doteq \frac{2hS}{3} \left(1 - \frac{h^2}{S^2} \right)$ なる近似を用いると次式のようになる。

$$h = \frac{3C \sec \omega}{2\gamma (\tan \omega - \tan \varphi)} \quad \dots\dots\dots (3-7')$$

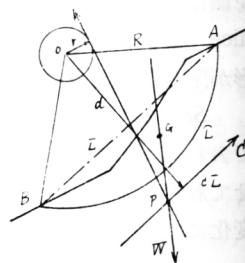
Friction-circle Method は Gilboy および Taylor によつて提案された半図解法で、操作が非常に簡単なのでこの方法による種々の計算図表も作られている。図3-4においてすべり面上に働く全凝集力の大きさは $C \times \bar{L}$ ($\bar{L}$ は AB の弦長) であり凝集力の moment は $R \times \bar{L} \times C$ ($\bar{L}$ は AB の弧長) であるから中心 O から CL までの距離 d は $R \times \bar{L} / \bar{L}$ となり、またこの力の作用方向は弦 AB に平行である。すべり土塊の重力の大きさおよび重心の位置は図上で定められるので、 W と C の交点 P は図解で容易に求められる。釣合を保っているもうひとつの力摩擦反力の合力も当然この点を通るべきものであるが、その方向は微小部分の各摩擦反力がいずれも円の中心に向う方向と摩擦角 φ をなして交るから、それらの合力も近似的には円の中心に向う方向と φ なる角をなすものと考えてよい。そこで半径 $r = R \cdot \sin \varphi$ なる同心円をかき P からこれに切線を引けば摩擦反力の方向を表わしている。(此の近似法による誤差は $0.05 \sim 0.12r$ 程度で安全側にある) 以上の作図で W の方向、大きさ、 C 、 F の方向が決定されるので、力の三角形をえがくことにより C 、 F の大きさが求められる。この C を $\bar{L}$ で割つた値を C_m とすればこれは Fellenius 法における C_0 と同じ性質の安全係数となり Safety factor $S_e = C/C_m$ が求められる。しかし $S_e > 1$ ならば安定、 $S_e \leq 1$ では崩壊すると判定する。

§ 2 問題の提起

一般に近似解法においてはその実用性を主目的とするために、理論的な正確さを犠牲にし、適当な仮定を設けることによつて解法の簡単化をはかることは止むを得ない。上述の諸解法をみるとそれぞれ異つた仮定に従つて解法が導かれているが、おのおのの仮定を設定する基礎になるものは、崩壊が起るような状態をどのように解釈するかという考え方であつて、この意味においてこれらの仮定を比較検討しなおしてみる必要がある。

一般に力の釣合を考える場合にとりあげられる条件は、任意の2方向に対して各力の分力の和がともに0になること、および一点に対する各力の力率が0になることの3条件である。ところが上述の諸解法において使用されている仮定によると、この3条件が同時に成立するように仮定を設けたものと、この中のある条件の成立だけについて論じ、他のものは近似的に成立するものとして無視してしまふものに分けられる。前者に野満法、Friction-circle 法が相当し、後者は slice 法、山口法がこれにあたる。また別の見方をすると、slice 法のようにすべり土塊を多数の微小部分に分割して各部の

図3-4



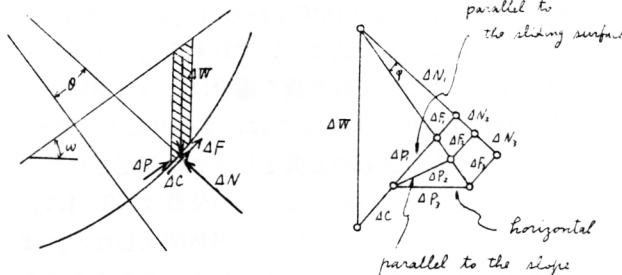
釣合条件を定めこれを全土塊に対して積算する方法と、山口法、野満法、Friction-circle 法のように全土塊を一体と考えて、これに作用する諸力を仮定してゆく方法に分けられる。この2種類の分け方は取扱い方としては全く別個のものであるが内容を検討してゆくと互に関連する点が少なくないので、この両者を同時に論じてゆきたい。

まず第1の問題として、slice 法における2方法すなわち円の中心に対する力率の平衡を考える方法と、2方向の分力の和をそれぞれ0にする方法は、いずれも前述の3条件を同時に満足させる立場をとっていない。ところが全土塊を一体として取り扱う場合はこの3条件を満足させるような解法が与えられている。たとえば Friction circle 法においては、すべり面上の摩擦反力の合力の作用方向は凝集力と重力の作用方向の交点を通るべきものと仮定し、この仮定された点を利用することによって釣合を保つべき諸力の大きさが決定されている。この点の位置は図3—4によつてもわかるように単に図形のみによつて決定されるものであつて、力の釣合に当然関係しなければならない土の単位重量、凝集力、内部摩擦角という諸要素とは全く無関係にきめられる。またこのような点によつてきめられる摩擦反力の方向が仮定の方向であるとともに、さらにこの力の大きさについては他の諸力と釣合を保つべき大きさを持つものと仮定されているが、この仮定に対しては他の側面から検討された根拠があるのではなくて、十分な近似性を有するという推定と、解法の簡単化のためのものである。したがつてこの仮定の根本にある考え方が力の釣合の3条件を厳密に満足させようとする主旨のものとはいえないことになる。3条件を満足させる解を求めているもう一つの方法である野満法においては、他の独立した仮定によつて摩擦反力の方向と大きさを求める方法をとっている。したがつて釣合の条件式は合力に関するもの1個（他の1個はこの条件式を導くための仮定として消滅する）、力率に関するもの1個の計2個になる。これを満足するような円弧すべり面は、未知数を2個持つものすなわち半径および中心角を任意にとつたものの中からただ1個だけ選出されることになる。したがつて Friction-circle 法と野満法の与える結果の最も大きい相異は、前者はある斜面長に対応してすべりを生じうる円弧が必ず1個存在する（もちろん斜面、土質のある条件内においてのみ）に対し、野満法では与えられた傾斜角によつてこの斜面ですべりを生じうるような円弧はただ1個に限定される点にある。いまここに用いられた仮定に対する検討はしばらく置き、この2つの結果だけに対しいずれの立場をとるべきかを考えてみる。一般に斜面の安定を考える場合に、ある傾斜角において起りうべきすべり面はただ1個だけではなくて、浅くて長いものや深くて短いものなど種々のものがありうると考えられている。第1節におけるすべり面の形に対する理論的な考察結果からもこのような考え方の正当性が保証される。力学の根本法則からいえば力の釣合の3条件を満足するような解でなければならないことになるが、このような近似解法においてはまずその現象をなるべく正しく説明しうるような方法をとるべきことが先決問題で、この場合ある斜面長に対して1個のすべり面が求められること（一定の斜面、土質条件内で）がまず第一にとりあげられるべき条件である。すべり面の形を円弧と仮定すると未知数は中心角1個だけになり、この場合使用される条件式はただ1個にしてしまわなければならない。よつて十分な近似性を保証されるなんらかの仮定によつて1条件を無視するか、あるいは円弧の仮定をやめてすべり面を決定する変数を2個にするかのいずれかの方法をとらなければならない。しかし後者においては一般に解法の複雑化が致命的欠点となるおそれがあり、今の場合1条件のみによつて平衡状態を論ずるための仮定を選ぶことに考慮を払わなければならない。

すべり土塊を一体として取り扱う場合は摩擦反力に対して上述のような不明確さがあるに対し、slice に分けて考えるとその決定に疑義を残す余地が少い。すべり面を底辺とし微小巾を持つ鉛直 slice の釣合に関係する諸力は、slice の自重 ΔW 、すべり面上の凝集力 ΔC 、摩擦力 $\Delta F = \Delta N \tan \varphi$ 、垂面反力 ΔN および slice 側面に作用するすべり土塊中の内力 ΔP である。このうち ΔW 、 ΔC は大きさと作用方向、作用位置が既知で、 ΔF 、 ΔN も方向と位置はきめられる。ところが ΔP についてはこ

れを確定する根拠が薄弱で、種々の仮定はこの ΔP をどのようにきめるかという考え方に由来していると考えることができる。既定の事実によつて作用位置もきめられるから、内力に対する仮定はその作用方向のみに関するものとなり、これをきめれば諸力の大きさは一義的に与えられる。

図3—5



諸力の釣合条件は ΔP の作用方向を水平方向に対し角 i の傾きをなすものとし、地表面傾斜角 ω , slice 底面の傾斜角 $(\theta + \omega)$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \Delta W - \Delta C \cdot \sin(\theta + \omega) - \Delta P \sin i - \Delta F \sin(\theta + \omega) - \Delta N \cos(\theta + \omega) &= 0 \\ \Delta C \cos(\theta + \omega) + \Delta P \cos i + \Delta F \cdot \cos(\theta + \omega) - \Delta N \cdot \sin(\theta + \omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-8)$$

となる。ここに θ は slice 底面を通る半径が円弧の中点を通る半径となす角を意味している。

(3-8)式からただちに次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta N &= \frac{\Delta W \cos i - \Delta C \cdot \sin(\theta + \omega - i)}{\cos(\theta + \omega - i) + \tan \varphi \cdot \sin(\theta + \omega - i)} \\ \Delta P &= \frac{\Delta W \sin(\theta + \omega - \varphi) + \Delta C \cdot \cos \varphi}{\cos(\theta + \omega - i - \varphi)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-9)$$

ΔP の方向がすべり面の方向と一致するという仮定は Pettersen 法に用いられているもので、この場合 $i = \theta + \omega$ と置けば

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= \Delta W \cos(\theta + \omega) \\ \Delta P_1 &= \Delta W \sin(\theta + \omega - \varphi) \cdot \sec \varphi - \Delta C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-10)$$

となる。 ΔP_1 の作用位置は図によつてもわかるようにすべり面上にある。したがつて考え方としては、すべり力はすべり層を通じて伝達され、円の中心に対し回転的な作用をするものとみなすことになる。この方法の得失は、まず計算が最も簡単であるという利点がある反面、分力の釣合については2条件が必要になり、解を求めるときに力率の条件と合わせて3条件のうち、2条件はともに近似的に満足されるということを前提としなければならない欠点がある。この場合上述の考え方からしても釣合の条件としてとりあげられるべきものは円の中心に対する力率の条件でなければならない。山口法、野満法は根本的にはこの仮定の立場を取つているが、 ΔF の合力を取り扱う場合にさらに仮定を加えたものといえる。

次に Fellenius 法は ΔP の方向は一定であり $i = 0$ と仮定するものでこのとき

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_2 &= \frac{\Delta W - \Delta C \cdot \sin(\theta + \omega)}{\cos(\theta + \omega) + \tan \varphi \cdot \sin(\theta + \omega)} \\ \Delta P_2 &= \frac{\Delta W \sin(\theta + \omega - \varphi) - \Delta C \sin \varphi}{\cos(\theta + \omega - \varphi)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3-11)$$

となる。この考え方は土塊が重力によつて鉛直下方に押しつけられると、すべり面上の反力の合力は水平方向の力になつて土塊を外側へ押し出すために崩壊するとみなすものである。この方法にも一理はあるが、考え方としての欠点は土塊中の各部分の slice の釣合を考えると、上半部は斜面の外側へ押し出してくるような力を、下半部は内側へ押し込むような力を持つていことになり、斜面中央部

に対してはすべり運動とちようど逆方向の回転力が作用することになる。このことは、内力とは別な見方をすれば、自重とすべり面上の諸力の合力に対する反力に相当しているということに着目すればより容易に理解される。前の仮定においてはこのような疑義は残らなかつたが、内力の方向を一定とする考え方でより合理的な仮定は $i=\omega$ すなわち斜面と平行な方向とするものである。この場合

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_3 &= \frac{\Delta W \cos \omega - \Delta C \cdot \sin \theta}{\cos \theta + \sin \varphi \cdot \tan \varphi} \\ \Delta P_3 &= \frac{\Delta W \cdot \sin(\theta + \omega - \varphi) - \Delta C \cdot \cos \varphi}{\cos(\theta - \varphi)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-12)$$

となり、内力に斜面と直角な方向の成分は存在しないので前の仮定に現われるような欠点が除去される。またこの仮定は Rankin 系土圧論や第 1 節の理論的考察における仮定にやや近いものであるという利点がある。この方法によれば根本的な考え方は、すべり力は斜面方向に下方へすべり出す力であるという立場にあり、分力の釣合条件を考えて斜面方向の合力が 0 になるという条件によつて平衡状態を論ずるのが適当である。力率の釣合についてはその作用位置を求めることがめんどろであり、近似計算を行なつたとしても繁雑を免がれない。したがつて一般的な近似性を確かめることが困難であるという欠点を有し、また斜面方向の合力の釣合のみをとりあげた場合においてもなお第 1 の仮定にくらべれば複雑な計算を要する。また摩擦抵抗力の合力は一般に第 1 の場合より大きく計算され仮定の不備による誤差が、この方法の方がより危険側になる。

以上の考察によつて実用的な近似計算法として最も可能性のある方法は、微小 slice に対して内力の方向はすべり面方向であると仮定して釣合条件を考え、円の中心に対する力率の平衡条件を全すべり土塊について積分する方法であると認められた。

次にもう一つ問題になるのは Safety factor の考え方である。山口法、野満法においてはちようど限界平衡条件にあるような特定の面すなわち $S.F.=0$ の場合のみについて論じているに対し、他の諸法は任意の円弧に対して Safety factor を求めている。Fellenius 法、Friction-circle 法では土の持つ実際の凝集力と、釣合を保つために必要な仮想の凝集力の比によつて表わし、Pettersen 法は抵抗モーメントと滑動モーメントの比で与えている。前者は全凝集力の大きさは面の形と大きさだけできめられ、この面上の応力分布に無関係に定まる要素であるという点から、力学的には比較的明確な解釈が可能であるが、土の強度の構成要素は凝集力のみならず摩擦角が関係しているので、この中一方のみをとりあげて安全係数を定めることに疑問がある。したがつて、崩壊の原因は主として土の凝集力強度の変化によるものとみなしうるような特別な場合についてのみ適当な方法といえる。後者の方法はその意味では土の強度の両要素を含み一般性を持つといえるが、なお 2, 3 根本的な不明確さをさけられない。すなわちここに採用している滑動モーメントは現実にその土塊が持っている力であるに対し、抵抗モーメントは $S.F.=1$ になる場合以外はこれと釣合うような現実の力ではなく、ある仮想の状態における力に過ぎない。この状態とは土の強度が完全に発揮されたような場合であるが、そのような状態において面上の垂面反力は今計算の基礎とした現実の状態と同じものであると考えることには疑問がある。かつ摩擦抵抗力はこの垂面反力の関数であるために、任意の面における最大抵抗力をきめるためにはこの場合の垂面反力をまず決定する必要があるにもかかわらず、このような仮想の状態を適確に規定する根拠がない点に疑義を生ずる余地が残されている。凝集力のみによつて安全係数をきめる方法では、このような疑義がとり除かれるという点にもその意義が見出される。このように Safety factor の取り方についても一長一短はあるが、前述のように slice の釣合条件を設定すると、これによつて最大抵抗を生ずるような仮想の状態についても、ここに考えた内力あるいはすべり力の大きさの変化のみによつて諸力がきめられるという考え方が可能となり、土の強度を 2 要素を同時に考慮することができる後者の方法がより適当であると考えることができる。

最後にもう一つの問題は、このような計算法で斜面の安定度を求める場合、Safety factor が1になるような面を求める以前の問題として、いま考えている斜面条件で最も安全度の小さい円弧の形を知らなければならないことである。この面に対する Safety factor を知り、これが1以下になるとき次の段階として限界釣合の状態にあるようなすべり面の形を求めることになる。したがって解法としてはこの2段階を容易に達しうする方法が必要であると考えられる。

§ 3 一新解法と計算図表*

図3-6において slice abcd の平衡条件を考えると、slice の自重 dW ，すべり面上の接面反力 dT ，垂面反力 dN ，摩擦抵抗力 dF ，凝集力 dC ，とし円の半径 R として中心 O に対する滑動力と抵抗力のモーメントを比較すると

$$\left. \begin{aligned} \text{滑動 moment } dM_s &= R dT \\ \text{抵抗 moment } dM_R &= R(dF + dC) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-14)$$

$$\left. \begin{aligned} dT &= dW \cdot \sin(\theta + \omega), \quad dF = dW \cdot \cos(\theta + \omega) \cdot \tan \varphi \\ dW &= \gamma R^2 \cdot \sec \omega \cdot \cos(\theta + \omega) (\cos \theta - \cos \alpha) d\theta \\ dC &= C \cdot R \cdot d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-15)$$

であるから、すべり土塊全体に対しては上式を θ について $-\alpha$ から $+\alpha$ まで積分すると

$$M_s = \gamma R^3 \sec \omega \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin(\theta + \omega) \cdot \cos(\theta + \omega) (\cos \theta - \cos \alpha) d\theta = \gamma R^3 \sec \omega \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\omega / 3 \dots\dots\dots (3-16)$$

$$\begin{aligned} M_R &= \gamma R^3 \tan \varphi \cdot \sec \omega \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2(\theta + \omega) (\cos \theta - \cos \alpha) d\theta + c R^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta \\ &= \gamma R^3 \tan \varphi \cdot \sec \omega \{ (\sin^3 \alpha \cdot \cos 2\omega / 3) + \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \} + 2c R^2 \alpha \dots\dots\dots (3-17) \end{aligned}$$

となり、Safety factor M_R / M_s は

$$\begin{aligned} \text{S. F.} &= \mu \cdot \cot 2\omega + \frac{3\mu}{\sin 2\omega} \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \right) + \frac{3c' \alpha}{l \cdot \sin \omega \cdot \sin^2 \alpha} \\ &= k_1 + k_2 \cdot F_1(\alpha) + k_3 \cdot F_2(\alpha) = F(\alpha) \\ \text{or } &= k_2 \cdot F_1(\alpha \cdot \omega) + k_3 \cdot F_2(\alpha) \dots\dots\dots (3-18) \end{aligned}$$

をうる。ここに

$$\begin{aligned} \mu &= \tan \varphi, \quad c' = c / \gamma, \quad k_2 = 3 \tan \varphi / \sin 2\omega, \quad k_3 = 3c / \gamma \cdot l \sin \omega \\ F_1(\alpha) &= (1 + \cot^2 \alpha) (1 - \alpha \cot \alpha), \quad F_2(\alpha) = (1 + \cot^2 \alpha) \cdot \alpha, \quad F_1(\alpha, \omega) = \cos 2\omega / 3 + F_1(\alpha) \end{aligned}$$

である。

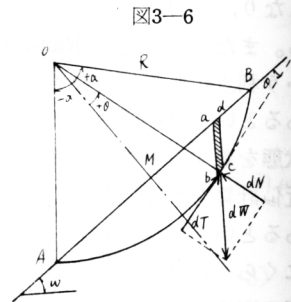
次に斜面長が l 一定の場合に α の変化による S. F. の変化を考え、これが最小値になる条件を求めると

$$dF(\alpha) / d\alpha = (1 + \cot^2 \alpha) \{ k_2 f_1(\alpha) + k_3 f_2(\alpha) \} = 0 \dots\dots\dots (3-19)$$

となり、ここに $f_1(\alpha) = \alpha - 3 \cot \alpha (1 - \alpha \cot \alpha)$, $f_2(\alpha) = 1 - 2\alpha \cot \alpha$ である。

しかして最危険すべり面に対応する α_c は $0 < \alpha < 66^\circ 47'$ において

$$f_1(\alpha_c) / f_2(\alpha_c) = k_3 / k_2 \dots\dots\dots (3-20)$$



* 本解法と殆ど同じ方法が1958年10月の Journal of the Soil Mechanics and Foundations Divisoin. Proc. A. S. C. E. に Paper 1824 として "Computator of the Stability of Slopes" という題名で Otto H. Meyer 氏によつて発表されているが、この報告の解法は1952年2月新砂防7号に発表した "円弧すべり面の仮定に基づく山崩れ平衡条件に対する一計算法" における諸計算結果および計算図表と同一のものあるいは本質的に同じものである。したがってここに示した解法は全く筆者の独創によるものであり、1952年に発表した内容にさらに検討を加え改訂を加えたものであることを断つておく。

によつて与えられる。(3-18), (3-20)式によつて safety factor および最危険すべり面を求められるが, この場合計算図表を用いればより容易にその目的を達する。

まず簡単には(3-18)上式を利用し, 中心角 α のみを含む関数 F_1 , F_2 を別に計算し, これに適当な係数を掛けたものによつて作られる曲線群を α を示す座標軸の上下に書き, 次に傾斜角 ω , 斜面長 l , 摩擦角 φ , 凝集力 C , 単位重量 r のみによつて決定される項 k_1 , k_2 , k_3 を計算しこれに相当する曲線間の距離を α , k_2 , k_3 によつて求め k_1 を加える方法である。(武居有恒, 円弧すべり面の仮定に基づく山崩れ平衡条件に対する一計算法 1952年 新砂防7号) この曲線群によつて任意の α に対応する S.F. を求めることができるが, S.F.=1 なる面を求める場合曲線の変化の小さい部分を使う場合が多く, α の値の誤差が大きくなり, また一般的に計算図表の使用に不便な点が多いので, これを改良した次のような方法をとる。

図3-7に示すように, (3-18)下式を用い, 座標軸上部には ω の諸値に対応する $F_1(\alpha, \omega)$ の曲線群ならびに勾配 k_2 になる直線群を画く。下部は $F_2(\alpha)$ および勾配 k_3 の直線群である。この計算図表の使用法は図3-8の計算例に示すように, たとえば傾斜角 $\omega=25^\circ$, 斜面長 $2l=90^m$, 土の単位重量 $r=1.8 \text{ ton/m}^3$, 凝集力 $C=1.5 \text{ ton/m}^2$, 内部摩擦角 $\varphi=16^\circ$ の場合をとり, $\alpha=38^\circ$ に相当する safety factor を求める場合, F_1 曲線上で $\alpha=38^\circ$ の点を取り, ω, φ によつて求めた $k_2=1.12$ を示す直線を

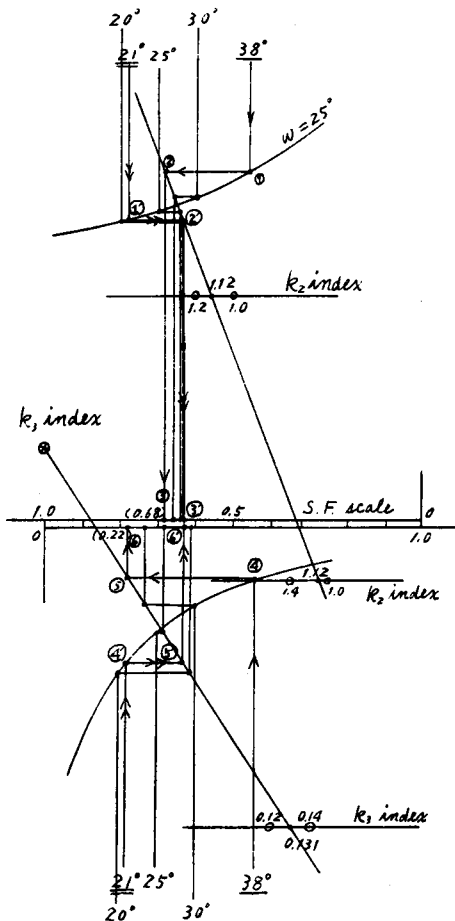


図3-8

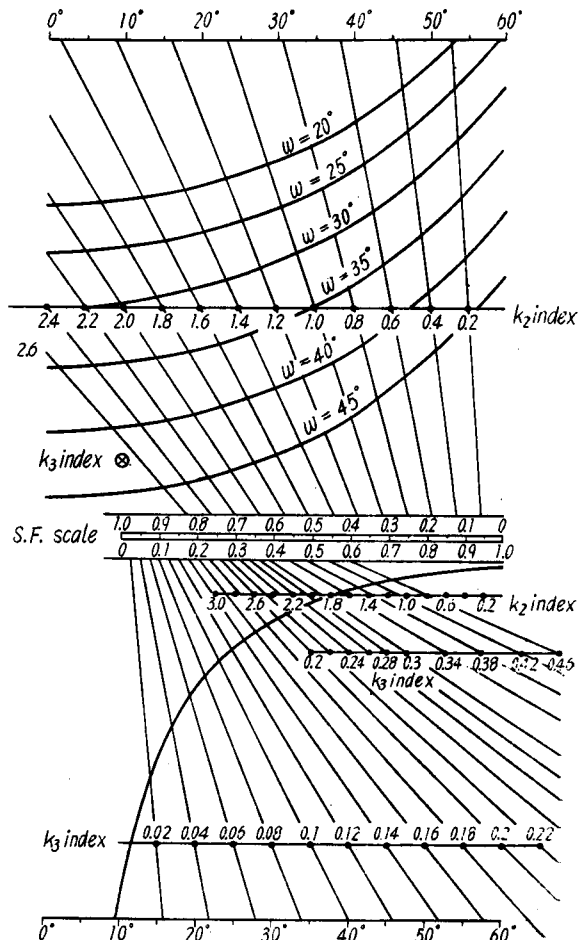


図3-7

k_2 index で定め、今求めた点 1 から水平にこの直線との交点 2 を定め、さらにこの点から垂直に下つて S. F. scale 上の上側の読をとる点 3 を求める。次に同様に c, l, ω により $k_3 = 0.131$ を計算し k_3 index によつて定まる直線と F_2 曲線によつて $\alpha = 38^\circ$ に相当する点 4, 5, 6 を求め S. F. scale 下側の読をとる。この両者の和 $0.68 + 0.22 = 0.90$ がこの面の safety factor である。S. F. = 1 になるような限界釣合の状態にある面を求める場合は、今求めた k_2, k_3 直線を利用し 2, 3 の試行によつて 3' と 6' がちょうど同一直線上に来る場合をみつけ出す。この場合は 30° から始めて 4 回の試行により $\alpha_c = 21^\circ$ が見出され、このための計算労力は極めて僅少である。この方法は前述の方法にくらべて α_c の決定に有利であるばかりでなく、 k_2, k_3 の値に対し有効数字 3 桁までは k_2 index, k_3 index を用いることにより図上に示されていない直線を書き加えることによつて正確に求められ、また $F_1(\alpha, \omega)$ 曲線群はその位置が $\cos 2\omega/3$ だけ縦方向に移動するだけでその形は変わらないので容易に補助曲線が求められ正確を期することが可能な利点を持っている。

次に最危険すべり面に対応する中心角 $2\alpha_c$ を求めるには、 $f_1(\alpha)/f_2(\alpha)$ の曲線をあらかじめ作つておけば、 $k = k_3/k_4 = 2c \cos \omega / r \cdot l \cdot \tan \varphi$ を計算することによつてこの値に対応する α の値を、図上で簡単にかつ十分な正確さで求めることができる。図 3-9 はこれを半対数目盛を使用して示したものである。前出の計算例を用いれば、 $k = 0.116$ に対し $\alpha_c = 38^\circ$ が与えられる。

以上の解法ならびに計算図表は一応前項の結論にかなう近似計算法たりうるものとする。

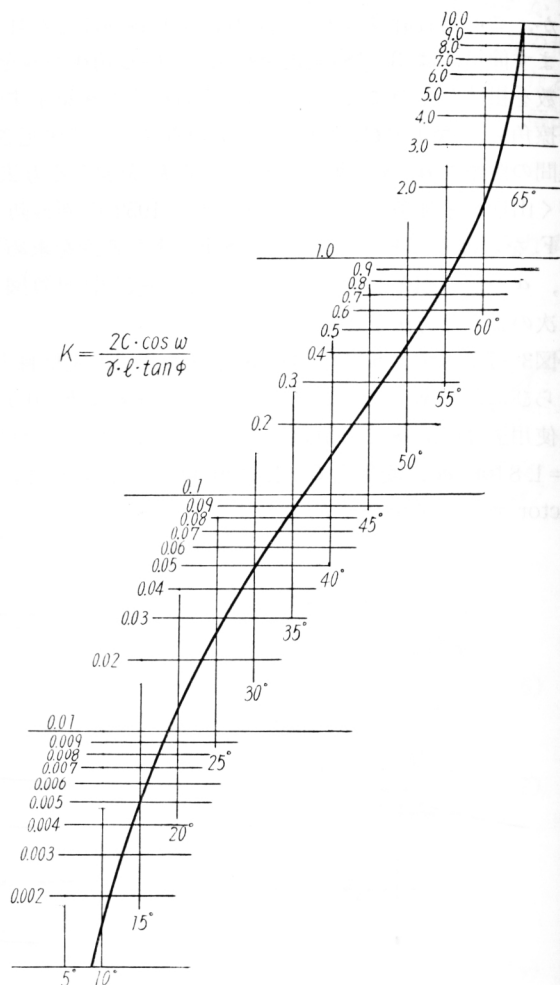
§ 4 解法の吟味

さて以上の計算法はあくまでも実用的な解法であつて、理論的に厳密に追究するならば矛盾を含んでいることはいうまでもないのでこの点の吟味をしておく必要がある。

まず内力の方向はすべり面の方向と一致するという仮定のもとに moment の釣合だけを考えた場合、斜面方向およびこれと直角な方向の釣合条件はどうなるかという問題である。そこで斜面と直角な方向の滑動力 P_1 、抵抗力 P_2 、斜面方向の滑動力 P_1' 、抵抗力 P_2' を求めてみると、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} dt \sin \theta = \frac{r}{4} R^2 \cos 2\omega \cdot \sec \omega \left(\alpha + \frac{1}{6} \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \frac{2}{3} \sin 2\alpha \right) \\ P_2 &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} (dN \cdot \tan \varphi + dc) \cos \theta = -\frac{r}{4} R^2 \sin 2\omega \cdot \sec \omega \left(\alpha + \frac{1}{6} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \right) \end{aligned} \right\}$$

図 3-9



$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{2}{3}\sin 2\alpha \cdot \tan \varphi \\
 P_1' &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} dT \cos \theta = \frac{rR^2}{4} \sin 2\omega \cdot \sec 2\omega \left(\alpha - \frac{1}{6} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - \frac{1}{3} \sin 2\alpha \right) \\
 P_2' &= \int_{-\alpha}^{+\alpha} (dN \cdot \tan \varphi + dc) \sin \theta = \frac{r}{4} R^2 \cos 2\omega \cdot \sec \omega \left(\alpha - \frac{1}{6} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \right. \\
 & \left. - \frac{1}{3} \sin 2\alpha + \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\omega} \right) \tan \varphi + 2cR \sin \alpha
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-21)$$

となる。

斜面に直角な方向の合力が0という条件は $P_1 + P_2 = 0$ であるからこれに (3-21) 式を代入すると
 $\tan \varphi = \cot 2\omega \dots\dots\dots (3-22)$

となり、傾斜角と土の内部摩擦角の間に一定の関係が成立する場合以外は α のいかにかわらずこの条件は成立しない。また全摩擦反力の中には自重のほかに $rR^2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha \sin \omega/6$ という内力によつて生ずる力が入ってくることになり、野満法にみられるような条件を満足させることはできない。

次に斜面に平行な方向の釣合条件を考えて P_2' と P_1' の比をこの場合の safety factor として計算すると、

$$\begin{aligned}
 \text{S. F.} &= \tan \varphi \cdot \cot 2\omega + \frac{2 \tan \varphi}{\sin 2\omega} \left(2 \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{6\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha} \right) \\
 &+ \frac{3r'}{l \cdot \sin \omega} \left(\frac{8 \sin^2 \alpha}{6\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha} \right) = k_1 + k_2 F_1'(\alpha) + k_3 F_2'(\alpha) \dots\dots\dots (3-23)
 \end{aligned}$$

となる。(3-23)式において k_1 , k_2 , k_3 はいずれも moment に対する safety factor の式(3-18)式と全く同じ値になるので、 $F_1(\alpha)$ と $F_1'(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ と $F_2'(\alpha)$ が対応する関係にあり、この両者を比較してみると、図3-10のようになり、 $F_1'(\alpha)$, $F_2'(\alpha)$ の方が $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ より小さくなるが、実際上必要な $\alpha < 45^\circ$ においてはその誤差は比較的小さく、したがつて moment に対する safety factor は近似的には斜面方向の合力に対しても適用しうることが出来る。

垂面反力および接面反力の合力着点と作用方向についてはすでに従来の研究でも一部検討されているが、いまこれを計算してみると接面反力および垂直反力の斜面方向とこれと直角な方向の合力をそれぞれ T_s , T_n , N_s , N_n とすれば

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{N_n}{N_s} &= \cot 2\omega \frac{6\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha + 6 \sin 2\omega (2\alpha - \sin 2\alpha)}{6\alpha + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - 4 \sin 2\alpha} \\
 \frac{T_s}{T_n} &= \tan 2\omega \cdot \frac{6\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha}{6\alpha + \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha - 4 \sin 2\alpha}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-24)$$

となり、 T と N は直交しない。また T と T による moment を比較するとその arm は R より大きく着点点は円弧の外に出る。また N の方向は円の中心を通らずその右側にはづれることになり、全摩擦反力は N とは角 φ をなして交るが N の円の中心方向に対する friction circle の外側にでることになる。

以上の吟味はすべて内力の方向がすべり面方向と一致するという仮定にしたがつたものであるが、次にこの方向が斜面方向と平行であると仮定した場合平衡条件がどのようになるかをしらべてみよう。sliee に対する滑動力および抵抗力はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned}
 \text{滑動力} &= dW \sin \omega + dN \sin \theta \\
 \text{抵抗力} &= dC \cos \theta + dN \tan \varphi \cdot \cos \theta \\
 dN &= (dW \cdot \cos \omega - dC \cdot \sin \theta) \cos \varphi \cdot \sec(\theta - \varphi)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3-25)$$

となる。したがつて、これに(3-15)式の dW を代入して θ について $-\alpha$ から $+\alpha$ まで積分すれば全滑動力および全抵抗力は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \text{全滑動力} = \gamma R^2 \{ (\sin \omega + \cos \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi) (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \\
 & \quad - \cos^2 \varphi \cdot F(\alpha, \varphi, \omega) \} - c R \cos^2 \varphi \left(\cos \varphi \ln \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \varphi - \cos \varphi} - 2 \sin \alpha \right) \\
 & \text{全抵抗力} = \gamma R^2 \{ \cos \omega \sin \varphi \cdot \cos \varphi (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) - \cos^2 \varphi \cdot F(\alpha \cdot \varphi \cdot \omega) \} \\
 & \quad + c R \sin \varphi \left(\cos \varphi \ln \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{\sin \varphi - \cos \varphi} + 2 \cot^2 \varphi \sin \alpha \right)
 \end{aligned}
 \quad \dots\dots (3-26)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \varphi, \omega) = & \alpha \cdot \sin(2\varphi + \omega) + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \omega \\
 & - \sin(\varphi + \omega) \left\{ \cos \alpha \cdot \ln \frac{\sin \alpha + \cos \varphi}{\sin \alpha - \cos \varphi} - \sin \varphi \ln \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)} \right\}
 \end{aligned}$$

である。ところで safety factor は (3-26) 式の下式を上式で割れば与えられるがこれによつて与えられる値は一般に (3-18) および (3-23) 式による計算値より大きくなる。これは前 2 式においては滑動力・抵抗力に slice 相互間に作用する内力が含まれていたためであつて、この内力による附加力はすべり土塊全体について積分すると滑動力の場合上半部と下半部が相殺され、抵抗力では累加する結果となり、結局抵抗力が大きく計算されることになる。したがつて一般的に言えば (3-18) 式は最も安全側の計算といえる。

§ 5 数値計算による諸式の比較

諸式を比較するためにその基準は第 1 節のすべり面理論式の数値積分結果をとり、これと第 3 節で提起した計算式および吟味するために用いた諸式による計算結果を比較してみる。

斜面の傾斜角 $\omega = 40^\circ$ 、土の内部摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ 、土の凝集力 $c = 0.8 \text{ ton/m}^2$ 、土の単位重量 $\rho = 1.6 \text{ ton/m}^3$ とすれば、斜面長 L^m およびこれに対応する最大土かぶりの深さ t^m は表 1-1 によつて与えられているので、この L と上記の斜面の条件から (3-18) ~ (3-20) 式によつて最危険すべり面に対応する円周角 max. α 、この場合の safety factor またこのすべり面に対応する土かぶりの深さ max. t を計算し、また最危険すべり面の safety factor が 1 以下のものに対しては、限界すべり面すなわち safety factor が 1 であるようなすべり面を求め、これに対応する円周角 crit. α および土かぶりの深さ crit. t を計算したものが表 3-1 である。計算された値によれば安蔵理論あるいは Caquot 理論によつて求められた限界すべり面によつてきめられる斜面長に対しては最危険すべり円弧においても

図 3-10

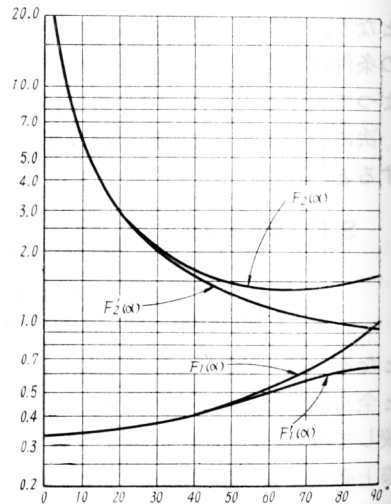


表 3-1

	Anzō's sol.	Caquot' sol.	Numerical		Integration	
L^m	34.24	38.74	50.0	55.0	60.0	70.0
t^m	2.49	3.55	—	3.83	3.62	3.06
max. α°	37°	33°	30°—40'	29°—50'	29°—15'	27°—50'
safety factor	1.14	1.01	0.95	0.93	0.92	0.89
max. t^m	4.06	5.74	6.86	7.33	7.83	8.17
crit. α°	—	—	19	17	15°—30'	13
crit. t^m	—	—	4.18	4.11	4.08	3.99

safety factor は1以上になりすべりは生じないことになる。数値積分によるすべり面と比較すると限界斜面長 55^m 以下においてもなお最危険すべり面に対する safety factor は1以下となり、さらに深いすべり面によつて崩落しうる結果が出てくる。また限界すべり円弧の形を求めた結果では最深部の深さを理論値と比較すると一般に大きい値を示している。このような差を生じる原因は、すべり面の形は理論的には下端においては地表面と 30° の交角を、上端においては 60° の交角を有するに反し、円弧すべり面では上下端とも α° をなし、また最深部附近の曲率は理論値ではきわめて小さくなるのに対し円弧は曲率が一定であるというようなすべり面形に対する仮定の不備によるものと考えられる。またこの計算例に示すように平たく浅いすべり面、すなわち仮定の影響がかなり大きくなる場合においても理論式によるすべり面とかなり接近した円弧すべり面に対する safety factor が1になることは、この方法が実用計算法としてかなり信頼しうることを示すものといえる。

次に実用解における平衡条件のとり方による差異を比較してみる。いま前と同じ斜面条件で斜面長 60^m の場合 safety factor が1になる附近において種々のすべり面に対応する値を (3-18) 式、(3-23) 式および (3-26) 式によつて計算し、これらの値を S. F.-1, S. F.-2, S. F.-3 として示したものが表 3-2 である。小数点以下第2位まで取つた値では 1, 2 はほとんど相異なく、3 の場合のみやや大きい値が求められる。この結果はすでに述べた考察からも当然予想されるところであるが、特にこのような浅いすべり面においては実用的にはほとんどその差を無視することができ、かつすべて安全側になっている。このことによつても § 3 に提示した方法によつて moment の平衡条件を満足するような解を求めれば、合力の平衡条件も近似的に満足され、したがつて実用計算法としては十分利用しうるものと判定することができる。

表 3-2

α°	t^m	S. F.-1 (Eq. 3-18)	S. F.-2 (Eq. 3-23)	S. F.-3 (Eq. 3-26)
14	3.68	1.02	1.03	1.03
15	3.95	1.01	1.01	1.02
16	4.22	0.99	0.99	1.01
17	4.48	0.98	0.98	1.00
18	4.75	0.96	0.97	0.99

§ 5 対数らせんすべり面による解法

以上 § 1~4 において考察した諸解法はいずれもすべり面の形を円弧と仮定したものであつて、計算上最も取扱いやすい簡単な方法である。しかし前述のようにすべり面の形は一般に斜面下方で曲率小さく上方で曲率大になつており、かつこの仮定の不備のための誤差を免れ得ない。そこで曲率変化を加味したすべり面形で計算上最も都合のよい対数らせんの形を仮定して考えてみる。この仮定をすべり面形として採用されたものに Terzaghi の壁面土圧に対する計算があり、また H. Lorenz の凝集力を有しない土からなる斜面の安定を論じたものがみられる。いまこれをさらに凝集力を有する土に拡張応用して斜面安定問題について論じてみる。

すべり面の形を spiral の極を原点とする極座標であらわしその方程式を

$$r = r_0 e^{\mu \theta} \quad \dots\dots\dots (3-27)$$

であらわし、ここに $\mu = \tan \varphi$ とすれば spiral 上の一点における切線の方法は

$$\tan \varphi = \frac{r}{1} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \tan \varphi \quad \dots\dots\dots (3-28)$$

となり、原点にいたる動径と直交する線に対し角 φ をなして交る。ところがすべり面上の摩擦反力はすべり面に立てた垂線と角 φ をなして交るので、結局その作用方向は動径の方向と一致する。すなわ

ちすべり面上のあらゆる点において摩擦反力の作用線はすべて座標原点を通ることになり、滑動力および抵抗力の moment の平衡を考える場合に摩擦反力による moment は生じず、自重と凝集力によつて生ずる moment だけを考えればよいことになる。

斜面の傾斜角 ω 、鉛直方向の動径 r_0 、すべり面最上端を通る動径 r_1 、これが鉛直方向となす角 α_1 、最下端を通る動径 r_2 、これのなす角を α_2 とすれば、自重によつて生じる滑動力の moment は r_1 、 r_2 およびすべり面 ABC によつて囲まれる部分全体の moment から三角形部 OAB の moment を減じたものである。よつて

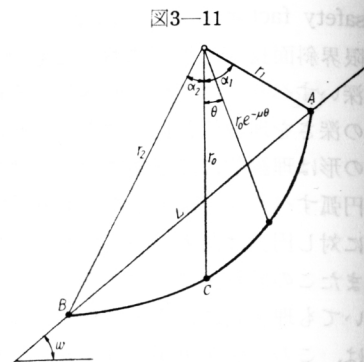


図3-11

$$\begin{aligned} \text{滑動 moment} &= - \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{3} r_0^3 e^{3\mu\theta} \sin \theta \cdot d\theta - \frac{r_1^3}{6} (\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \tan \omega) \sin^2 \alpha_1 \\ &\quad + \frac{r_2^3}{6} (\cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \tan \omega) \sin^2 \alpha_2 \\ &= - \frac{\gamma r_0^3}{3(9\mu^2 + 1)} \{ e^{3\mu\alpha_2} (3\mu \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2) + e^{-3\mu\alpha_1} (3\mu \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1) \} \\ &\quad + \frac{\gamma r_0^3}{6} \{ e^{3\mu\alpha_2} (\cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \tan \omega) \sin^2 \alpha_2 - e^{-3\mu\alpha_1} (\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \tan \omega) \sin^2 \alpha_1 \} \quad \dots (3-29) \end{aligned}$$

となる。ここに $r_0^3 e^{3\mu\alpha_2} = r_2^3$ 、 $r_0^3 e^{-3\mu\alpha_1} = r_1^3$ である。またすべり面上の凝集力による moment はすべり面の長さが $r \sec \varphi \cdot d\theta$ であり、この方向が動径となす角は φ であるから

$$\text{抵抗 moment} = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} c r^2 d\theta = \frac{c r_0^2}{2\mu} (e^{2\mu\alpha_2} - e^{-2\mu\alpha_1}) \quad \dots (3-30)$$

になる。ところで safety factor が 1 となる限界すべり面および最小となる最危険すべり面を求めるには、斜面長 $AB = L$ を一定として r 、 α_1 、 α_2 の関係を一つの関数としてあらわす必要がある。いま $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ として r_1 、 r_2 の中央すなわち α の 2 等分線上の動径の長さを R とすれば

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= R e^{-\mu\alpha/2}, \quad r_2 = R e^{\mu\alpha/2} \\ L^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots (3-31)$$

なる関係が成立し、また $R^2 = r_1 r_2$ であるから

$$L^2 / R^2 = 2(\cosh \mu\alpha - \cos \alpha) \quad \dots (3-32)$$

であり、 α_1 、 α_2 との関係は

$$\left. \begin{aligned} r_1 \cos(\alpha_1 - \omega) &= r_2 \cos(\alpha_2 + \omega) \\ r_1 \sin(\alpha_1 - \omega) + r_2 \cos(\alpha_2 + \omega) &= L \end{aligned} \right\} \quad \dots (3-33)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha_1 - \omega) &= \frac{\cosh \mu\alpha - \cos \alpha - \sinh \mu\alpha}{\cosh \mu\alpha - \cos \alpha} \cdot \frac{L}{2r_1} \\ \sin(\alpha_2 + \omega) &= \frac{\cosh \mu\alpha - \cos \alpha + \sinh \mu\alpha}{\cosh \mu\alpha - \cos \alpha} \cdot \frac{L}{2r_2} \end{aligned} \right\} \quad \dots (3-34)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha_1 - \omega) &= (L^2 + r_1^2 - r_2^2) / 2r_1 L \\ \sin(\alpha_2 + \omega) &= (L^2 - r_1^2 + r_2^2) / 2r_2 L \end{aligned} \right\} \quad \dots (3-34')$$

によつて与えられる。(3-33)(3-34)式の関係をもつて(3-30)、(3-31)式に代入して § 3 のような形にすると計算式が複雑になりまた計算図表の形にすることも困難なので、この場合はまず(3-32)式によつて与えられた L に対応する R 、 α の関係を求め、ついで(3-34)式で α_1 、 α_2 を計算し試算法で限界すべり面と最危険すべり面を求める方法をとる。

さて上述の方法による計算結果を検討するために円弧すべり面解法の吟味に用いた計算例 $\omega = 40^\circ$ 、

$\varphi=30^\circ$, $c/r=1/2$, $L=60m$ について計算を行つてみることにする。この場合(3—29), (3—30)式は r_1 , r_2 で表わしてもよいが数値計算のときに r_1^3 , r_2^3 のような項の有効数字を多くとらないと大きい誤差を招くおそれがあるのでこの形で計算する方が望ましい。また求められた結果からすべり面最深部の深さを求めるには, $r_0 e^{\mu\theta} \cdot \cos(\theta+\omega)$ が最大になる位置すなわちこれを微分して0と置いた場合の θ を知ればよい。この結果は簡単に $\theta=\varphi-\omega$ となるので最大深さは次式で与えられる。

$$t_{\max.}=r_0\{e^{\mu(\varphi-\omega)}\cos\varphi-e^{\mu\alpha_2}\cos(\alpha_2+\omega)\} \dots\dots\dots(3-35)$$

このようにして求めたのが表3—3である。

表3—3

$(\alpha_1+\alpha_2)^\circ/2$	r_1^m	α_1°	r_2^m	α_2°	S. F.	$t_{\max.}^m$
13	101.02	23—34	131.28	2—26	1.20	3.41
14	92.99	24—39	123.28	3—31	1.13	3.68
15	85.97	25—46	116.32	4—15	1.07	3.94
16	79.87	26—52	110.26	5—08	1.03	4.20
17	74.53	27—58	104.98	6—02	1.00	4.47
18	69.75	29—06	100.25	6—54	0.95	4.73

表3—4

α°	R^m	t^m	S. F. 1	S. F. 3	R'^m	t'^m	S. F.
14	124.01	3.68	1.02	1.03	107.06	3.68	1.13
15	115.91	3.95	1.01	1.02	100.00	3.94	1.07
16	108.84	4.22	0.99	1.01	93.84	4.20	1.03
17	102.61	4.48	0.98	1.00	88.45	4.47	1.00
18	97.08	4.75	0.96	0.99	85.94	4.73	0.95

これらの値を表3—2と比較したのが表3—4である。円弧すべり面の場合の α と対数ら線の場合の $(\alpha_1+\alpha_2)/2$ を対応させ、この場合の円の半径 R に対し動径の比例中項 $R'=\sqrt{r_1 r_2}$ を、最大深 t と t' を比較するとすべり面の形は多少変つても最大深はほとんど同じになっている。ところが safety factor においては S. F. 3 すなわけ slice 間に斜面方向の内力を考えた場合とほぼ同じ深さで限界深さになっている。(この S. F. の値はここに用いた例にだけしか当てはまらないが) この計算法の特徴は円弧すべり面の場合よりも S. F. の変化が大きく、深さが異ると S. F. に大きい差が現れ、その限界点が明白になる点にある。ここに用いた計算結果ではすべり面の形においても、円弧の場合地表面との交角が 17° であるに対し対数ら線では上端 $17^\circ 58'$, 下端 $16^\circ 02'$ という僅かな差しか生じていないし、また最深部の深さも大差はない。これらの諸点から考えると計算労力においてはるかに不利でありながら求められた結果でほとんど有意の差を生ぜず、また理論的な考察結果に対してもよりよい近似を与えることもできず、実用的な計算法としては適当でないということになる。また逆にいうならば円弧すべり面に仮定による近似解法を別な仮定によつて吟味したことになり、前に提示した方法の一つの裏づけになるとも考えることができる。

なお本節の数値計算例では一般の斜面安定論における曲率の小さいすべり面を対象とせず、山崩れにみられるような浅い平たいすべり面に対応するものを主な対象としてその数値を選んでいるので、数値計算結果にもとずく考察は必ずしも一般的に適用し得るものでないことをことわつておく。

第4節 地下水の影響に対する考察

§ 1 概 説

山腹斜面は一般に平時ある安定な釣合状態を保っている。ところがこれが豪雨に際しあるいは地下水の上昇によつて崩壊する場合が多いということは、この安定状態を変化させる要因として水の作用を考えなければならないことを示している。第1節から第3節までの考察においては土自体だけを対象としたが、このような応力状態の変化あるいは滑動に抵抗する性質の変化の原因としての水の作用を考察する必要がある。この場合考えられることは、含水量の増加による単位重量の増大と土の剪断抵抗力の低下である。剪断抵抗力の変化の原因となる要素には、含水量変化による土自体の強度に及ぼす影響と中立応力による見掛け強度の変化があげられる。これらのうち単位重量の問題、土自体の強度の問題は、力学的な研究の対象というよりはむしろ土の物理化学的性質を究明する土性論上の課題であつて、一般的な土という概念をあてはめられる物質の力学的特性をなるべく簡単な法則で表現し、これを解析的に研究しようとする現在の目的とは別の面を持つている。一般的にいうならば含水量の増加によつて単位重量は増大し、抵抗力は減少するという言葉で表わされる事実も、実際に存在する各種各様の土についてはそれぞれ異つた変化の様相を示し、その変化の状態を一般的な計算に応用しうる定量的な関係に表現しようという試は、現在の段階においてまたこの目的においてむしろ無意味なものと考えてここでは論じないことにする。与えられた斜面と与えられた土に対する土性論的な特性が個々の場合について、ここで仮定されたような関係で明らかにされている場合の力学的な取扱いが本研究の目的である。土性論的な問題をさらに詳論しようとするならば、第3節以下の計算に用いた土の抵抗法則、この計算例に用いた数値自体にもすでに多くの問題を含み再びすべてを無に帰する結果となるであろう。かつまた今迄用いて来た仮定はその近似性において十分容認せられるところであり、この意味においても敢てこれらに対する詳論は行わない。

さてここで残された問題は土粒子の空間を埋めた地下水が、その粒子に及ぼす水圧による影響であつて、これが中立応力による見掛け強度の低下となつて現われる。

次項以下に論じようとする諸点は、中立応力によるせん断抵抗力の低下作用の問題、地表面から浸透した水が傾斜不透水層上でどのような地下水面形を示すか、すなわち飽和水によつて中立応力が発生する領域ならびにその大きさの問題、および地下の透水層に上方から供給された地下水が、透水性の変化する部分においてどのような水理条件で流動し、どのような水圧を上部土層に及ぼすかという問題であつて、これら諸点の解明と前節までの考察によつて斜面安定に対する力学的な研究を一応結末づけるものと考ええる。

§ 2 中立応力の影響

土粒子の層が水によつてその空隙をうめられた場合に生ずる力学的な条件の変化は、まず第一に中立応力 *Neutral stress* の発生に原因する見掛け強度の低下をあげなければならない。かつこの問題は、山腹斜面の平衡条件の変化と次項以下に論ずる地下水面、地下水脈による揚圧力などの諸問題を結びつける役目をなすものでこれに土性論的な研究結果を統合することができれば、実際の山くずれ発生についてさらに詳細な説明が行いうるものと考えられる。しかしながら、たとえば *Terzaghi* が指摘しているように土層の一時的な含水飽和によつて、土の組織自体に根本的な変化をもたらさないものとするれば、空隙をうめる空気が水に置きかえられたとしても本来の強度に及ぼす影響は比較的小さいものであると考えることは、土性論的にも是認されるところであつて、中立応力による見掛け強度の変化によつて応力の釣合が破れ、土の組織に変化を与えた後に生ずる諸現象が土性論的な考察の対象となるものと考ええる。したがつて中立応力の問題に対する解明によつて山くずれの平衡条件と地下水の水理学的研究を結合させることができるものと考ええる。

さて中立応力とは、土層全体の自重によつて生ずる応力のうちで土粒子によつては伝えられず水に負荷される部分を意味し、その結果面に作用する全応力中で中立応力の分だけは土の摩擦抵抗に寄与せず、土のせん断抵抗を減少させることになる。したがつて中立応力が存在する場合すべり面上の接面応力 τ と垂直応力 σ は次の関係を満足する。

$$\tau = (\sigma - \sigma_n) \tan \varphi + c \quad \cdots \cdots (4-1)$$

ここに σ_n は中立応力であつてこれは静水中においては垂直力のみでありまたあらゆる方向に対して一定値をとる。

そこで土中の一点における全圧力 P 、この力の方向が面に立てた垂線となす角 ω とすると、この点における応力を表わす Mohr の応力円は図4-1のようになり、 P と共役な応力 Q_1 および Q_2 は

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} Q_1 \\ Q_2 \end{aligned} \right\} &= 2 \frac{\cos \omega}{\cos \varphi} \{ P \cos \omega + c \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sigma_n \sin^2 \varphi \\ &\pm \sqrt{P(\cos^2 \omega - \cos^2 \varphi) + 2P \cos \omega (c \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sigma_n \sin^2 \varphi) + (c \cos \varphi - \sigma_n \sin \varphi)^2} - P \end{aligned} \quad \cdots \cdots (4-2)$$

したがつて

$$\begin{aligned} Q_2 - Q_1 &= \frac{4 \cos \omega}{\cos \varphi} \sqrt{P(\cos^2 \omega - \cos^2 \varphi) + 2P \cos \omega (c \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \sigma_n \sin^2 \varphi) + (c \cos \varphi - \sigma_n \sin \varphi)^2} \\ &= \frac{4 \cos \omega}{\cos \varphi} \sqrt{(N + H)^2 (\tan^2 \varphi - N^2 \tan^2 \omega)} \quad \cdots \cdots (4-3) \end{aligned}$$

ここに

$$N = P \cos \omega, \quad H = c \cot \varphi - \sigma_n$$

である。

いま Rankine の土圧論において考えているような応力状態をとり、土層が地下水によつて飽和されている場合と含水していない場合を比較すると(図4-2)

$$\left. \begin{aligned} P &= \{ r_e h_1 + r_w h_2 e / (1 + e) \} \cos \omega \\ \sigma_n &= r_w h_2 \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (4-4)$$

であるから

$$Q_2 - Q_1 = \frac{4 \cos \omega}{\cos \varphi} \sqrt{\left\{ r_e h_1 \cos \omega + c \cot \varphi - r_w \cos \omega \left(1 - \frac{e}{1 + e} \cos \omega \right) h_2 \right\}^2 - \left(r_e h_1 + r_w h_2 \frac{e}{1 + e} \right) \sin^2 \omega} \quad \cdots \cdots (4-5)$$

となる。

また限界すべり面の深さすなわち安蔵理論における平面すべり面の深さ h_0 は

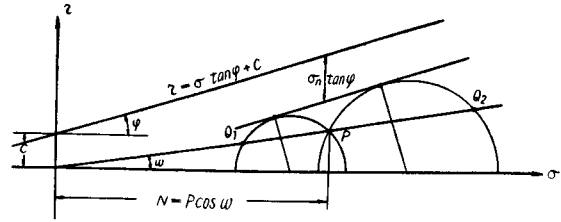
$$\begin{aligned} &\left(r_e h_1 + r_w h_2 \frac{e}{1 + e} \right) \sin \omega \cdot \cos \omega \\ &= \left\{ r_e h_0 \cos \omega + r_w \left(\frac{e}{1 + e} \cos \omega - 1 \right) \right\} \cos \omega \cdot \tan \varphi + c \quad \cdots \cdots (4-6) \end{aligned}$$

によつて定められ次式のようになる。

$$h_0 = \frac{r_e (h_0 - h_c) (\tan \varphi - \tan \omega) \cos \omega + c}{r \cdot \cos^2 \omega (\tan \omega - \tan \varphi) + r_w \cos \omega \cdot \tan \varphi} \quad \cdots \cdots (4-6')$$

ここに $r = r_e + r_w \frac{e}{1 + e}$ すなわち r は水で飽和された土の単位重量である。

図4-1



そこでこの限界すべり面の深さが飽和土層の深さによつてどのように変化するかを数値例によつて求めてみる。地表傾斜角 $\omega = 40^\circ$, 土の内部摩擦角 $\varphi = 30^\circ$, 土の単位重量 $\gamma_s = 1.6 \text{ ton/m}^3$ 土の凝集力 $c = 1.6 \text{ ton/m}^3$, 水の単位重量 $\gamma_w = 1.0 \text{ ton/m}^3$, 土の間隙率 $e/(1+e) = 0.4$ とすれば, 次表のような結果が得られる。

表4-1

h_1^m	0	1	2	3	4	5	6	6.51
h_0^m	2.14	2.82	3.49	4.16	4.83	5.50	6.17	6.51

図に示すように h_1 は地表から地下水面までの深さである。

次に $Q_2 - Q_1$ は第1節の考察において示したように受働土圧と主働土圧の差すなわちその深さにおけるすべり面両端の抵抗力と滑動力の差を示すものであるので, $h_1 = 4\text{m}$ および 2m の深さにおいて地下水面の変化にともないどのように変化するかを調べてみると次表のようになる。

表4-2

$h=4m$									
h_1	>4	3.75	3.5	3.25	3.0	2.77(m)			
Q_2-Q_1	7.31	6.50	5.60	4.52	3.10	0 (ton/m ²)			
$h=2m$									
h_1	>2	1.75	1.5	1.25	1.0	0.75	0.5	0.25	0 (m)
Q_2-Q_1	7.69	7.21	6.72	6.18	5.60	4.97	4.25	3.40	2.20 (ton/m ²)

表より明らかとなおり地下水位の上昇は土層の抵抗力をいちじるしく減少させ, その結果浅いすべり面においても崩壊を生ずる可能性が増大することがわかる。

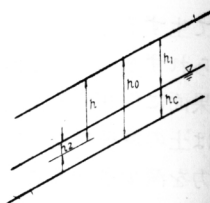
いまここで行つた計算は中立応力の安定条件低下に対する効果を主目的として, 他の諸条件については最も簡単化した理論を基礎としているので, これと他の諸問題と結びつける上で考察すべき点につき2, 3附言しておく。この場合自由表面は地表と平行と仮定しているから, 中立応力についてもその流動にともなう動水圧を考えなければならないが, 地下水の土層中における流れはきわめてゆるやかであり層流状態をなすので, 一応近似的には水深に相当する静水圧を考えれば十分である。それよりはむしろ次節以下において考察するように地下水面形が地表面と平行にならない場合を生じ, この場合については, まず水理計算によつて地下水面形を求めこの下にある部分と上になる部分の抵抗については別個に考えなければならない。しかし一般には上部のいわゆる主働すべり面は水面上に, 下部の受働すべり面は地下水面下に生ずるような領域を中間に考えればよいことになる。また $Q_1 - Q_2$ の計算において, ここで考慮した状態は Rankine の応力条件あるいは安蔵理論における応力条件に相当するもので, 地表と平行な面上の応力はどの点においても鉛直であると仮定している。Caquot 理論あるいは第1節における数値積分に用いた考え方ではこの方向は鉛直から傾くことになるが, この場合においても角 ω に相当する値がこれより小さいある値になるだけで根本的にはなんら変るところはない。ただ単なる数値処理上の問題であつて中立応力の効果を論ずるに当つては全く支障ないものとする。

§ 3 地下水面の形について

降雨によつて供給された地表水は一部は地表面を流下し, また他の部分は地下に浸透し中間流を形成しあるいは不透水性の層上に一時的滞水層を生じ, またあるものは地下水脈へ導かれる。本項で論じようとするものは不透水層上の地下水であつて, 特にその中でも中立応力の発生にともなう抵抗力低下を生ずる滞水層についての水理的考察である。

不透水層上の地下水は地表から降雨による浸透水を供給されることによつて一種の不定流を生じる。すなわち斜面の上方から下方へ行くに従つて流量を増し, また各点ともに降雨開始後時間の経過と

図4-2



もに流量が増加する。しかしてこのような地下水流は降雨開始後一定時間を経過すると、浸透による供給量と流下量の平衡が成立し、その時刻以後においては各点における流量が変化しないような定常状態を生ずる。一方実際の山くずれは長雨の後の豪雨あるいは豪雨終期に発生する例が多く、一般に地下水流も定常状態に達しているような時期に発生するものと考えられるので、本項における水理学学的考察の対象は一応定常運動のみに限定する。非定常状態については全く考慮の余地がないというわけではないが、この場合に対しては基礎方程式が非線型2階偏微分方程式となり、その解を求めることは困難である点と、それにもかかわらず上述のように重要性が少ない点から考察を省略した。

いま x 軸を斜面にそい下向きに、 z 軸を鉛直上向きにとれば定常状態にある地下水不等流の運動方程式は

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dp}{ds} + \frac{v_s}{k} - \frac{d}{ds}(x \sin i + z) = 0 \quad (4-7)$$

また連続式は

$$q = \int_0^h v_s \cos(\alpha + i) dz \quad (4-8)$$

となり、ここは k は土の透水係数、 i は斜面の傾斜角、 α はこの方向と水流方向のなす角で、 q は x における全流量、 h は水深である。ところでいま考えている場合上部から供給される水は x の位置にかんにかかわらず一定とみなされるので、全流量 q は x に関する一次式となり、

$$q = c_1 x + c_2 \quad (4-9)$$

とおくことができる。また(4-9)式を微分すると

$$\frac{dq}{dx} = [v_s \cos(\alpha + i)]_{z=h} \frac{dh}{dz} + \int_0^h \frac{d}{dz} \{v_s \cos(\alpha + i)\} dz \quad (4-10)$$

となり、 $dp/ds \approx 0$ 、 $v_s \cos(\alpha + i) = q/h$ が近似的に成立するならば(4-10)式は

$$k \sin(\alpha + i) \cos(\alpha + i) \frac{dh}{dx} + \frac{q}{h} \cdot \frac{dh}{dx} = \frac{dq}{dx} \quad (4-11)$$

となり、またこの式は、

$$k \frac{dh}{dx} \left(\frac{dh}{dx} + \tan i \right) - h \frac{d}{dx} \left(\frac{q}{h} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{dh}{dx} + \tan i \right)^2 \right\} = 0 \quad (4-12)$$

と書かれる。(4-12)式が地下水面 h と x の関係を表わす微分方程式であるが、この式は非線形であつて一般には数値積分に頼らなければならない。しかしいま考えている場合は斜面と水面のなす角 α は一般に小さいので、Dupit の準一様流の考え方と同じような近似を求めることができる。すなわち z 方向の流速成分は無視し x 一定の点における流速はすべて一様であると考え、

$$v_{\text{mean}} = k(dh/dx + i) \quad (4-13)$$

と置けば(4-12)式にかわる微分方程式として、

$$c_1 x + c_2 = kh \cos i \left(\frac{dh}{dx} + \sin i \right) \quad (4-14)$$

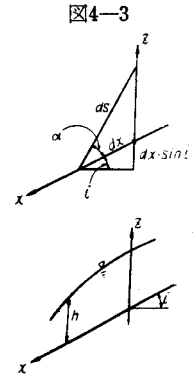
が与えられる。

(4-14)式において $c_1/k \cos i = K$ 、 $\sin i = I$ と書きまた $(c_1 x + c_2)/k \cos i = X$ 、 $h/X = Y$ と置けば、

$$Kh \frac{dh}{dX} - Ih + X = X \left(KYX \frac{dY}{dX} + KY^2 - IY + 1 \right) = 0 \quad (4-15)$$

となる。よつて X と Y の関係は次式で与えられる。

$$-\frac{dX}{X} = \frac{KY dY}{KY^2 - IY + 1} \quad (4-16)$$



この式の積分は

$4K-I^2>0$ するとき

$$-\ln X = \frac{1}{2} \ln(KY^2 - IY + 1) + \frac{I}{\sqrt{4K-I^2}} \tan^{-1} \frac{2KY-I}{\sqrt{4K-I^2}} + C_1$$

$4K-I^2<0$ するとき

$$-\ln X = \frac{1}{2} \ln(KY^2 - IY + 1) + \frac{I}{2\sqrt{I^2-4K}} \cdot \ln \frac{2KY-I-\sqrt{I^2-4K}}{2KY-I+\sqrt{I^2-4K}} + C_2$$

.....(4-17)

となり C_1, C_2 は積分常数である。ところで(4-14)式において $dh/dx=0$ すなわち地下水面が不透水層面と平行になるという条件を入れると

$$X_0 = Ih_0 \quad \text{.....(4-18)}$$

となる。この h_0 の値は(4-16)あるいは(4-17)式によつて求められる h の最大値であつてこの値に対応する流量よりも大きい流量の場合も小さい流量の場合もこの値よりも大きい h は生じない。また別の見方をするならば、地下水面が上端から下方へ向つて次第に上昇しついに地表面に現れあるいは表層流と一緒にする場合の水深が h_0 であつて、この点より大きい水深は生じないし、またここでは水面の接線の方法は不透水層面と平行になる。したがつて土層の深さが与えられれば、これに等しい水深 h_0 が h の最大値として与えられることになる。しかして $X=h/Y$ であるから、 $h=h_0$ になる点においては

$$Y_0 = 1/I \quad \text{.....(4-19)}$$

でなければならない。よつて C_1, C_2 をきめる条件式は

$$\begin{aligned} -C_1 &= \ln(Ih_0) + \frac{1}{2} \ln(K/I^2) + \frac{I}{\sqrt{4K-I^2}} \tan^{-1} \frac{2K-I^2}{I\sqrt{4K-I^2}} \\ -C_2 &= \ln(Ih_0) + \frac{1}{2} \ln(K/I^2) + \frac{I}{2\sqrt{I^2-4K}} \ln \frac{2K-I^2-I\sqrt{I^2-4K}}{2K-I^2+I\sqrt{I^2-4K}} \end{aligned} \quad \text{.....(4-20)}$$

となる。

いま h と x の関係を求める場合、 X は C_1, C_2, x によつて直接きめられる値で Y が未知量であるが、(4-16)、(4-17)式の計算においては未知量 Y を適当に与えてこれに対応する X を求め、これから Y と X によつて h をきめる方法をとらなければならない。

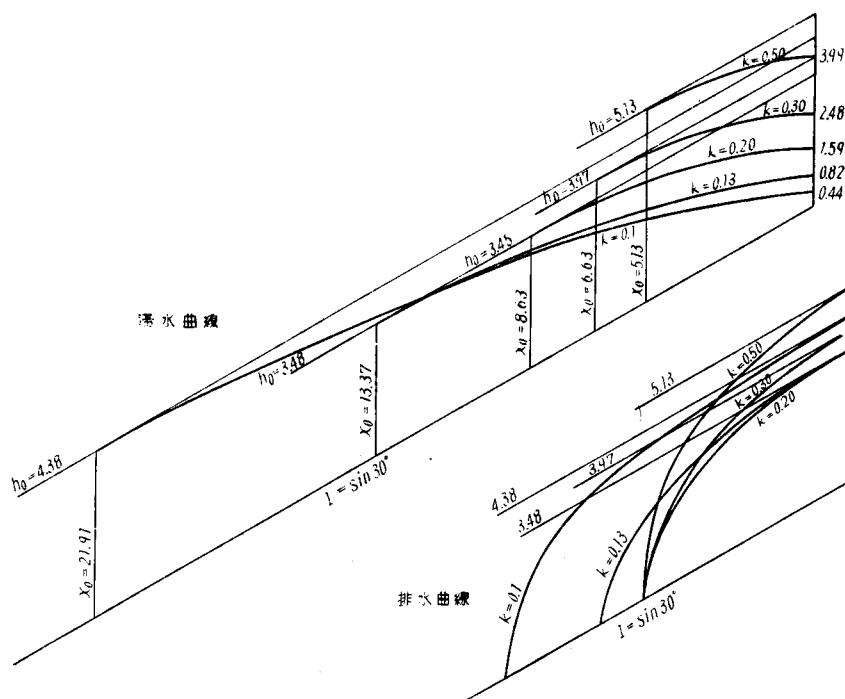
また h の最大値より下流部すなわち流量が増加しながら水深は減少する部分は、斜面の下方に排水の良好な地点があるときたとえば暗きよ排水が行われているような場合に、この場所の排水能力によつてどのように滞水面低下効果があるかを示すものと見なすことができる。

これらの事情をさらに明白に説明するために数値計算例をあげてみよう。いま $I=0, K=0.1, 0.13, 0.2, 0.3, 0.5$ の場合に対し、 $C_2=0, C_1=0$ として x と h の関係を求めると、土層の透水系数 k を一定として単位長あたりの浸透量 C_1 を変化させたときの計算値を表4-3に、また C_1 を一定として k を変化させた場合の水面形を図4-4に示す。ここに C_1 を0としたのはこの考えている地域の upstream からの流入水はないことを意味し、 C_1 については h_0 をいろいろに変化させた場合にもつとも計算しやすい基準値となるものをうるために0と仮定したが、水面形については C_1 の値によつて X_0 の大きさが C_1 分の1になるだけであつて根本的な相異は生じないから一応この表および図によつて一般的な考察を行うことができる。図中縦線によつて示しているのは h_0 の生ずる位置でこれより上流が滞水部下流が排水の影響を示している。まず第一に気づくことは地表からの浸透水量がこの程度であれば滞水層はほとんど土層全体にわたつて地表面近くまで達していることで、これは豪雨によつて崩壊を生ずるような時期には全土層がほとんどその空隙を水で満されていいると考えてよいよを示している。また h_0 より下流部の排水曲線によると局部的排水による効果はあまり大きいものとはなり得ず、全面的な排水をはからなければ斜面の土壌を豪雨時に湿潤状態から免れさすことはできない。

表 4-3

K	7	100	10	7	5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0.1	0
0.1	X	0.0444	0.745	1.436	3.082	11.37	16.33	21.91	26.85	30.54	31.96	32.42	32.44
	h	4.435	7.447	10.05	15.41	34.11	40.83	43.82	40.28	30.54	15.98	3.242	0
	x	0.444	7.447	14.36	30.82	113.7	163.3	219.1	268.5	305.4	319.6	324.2	324.4
0.13	X	0.0636	0.929	1.608	2.902	7.934	10.18	13.37	16.60	19.11	20.50	20.89	20.90
	h	6.360	9.286	11.26	14.51	23.80	25.45	26.75	24.90	19.11	10.25	2.089	0
	x	0.489	7.143	12.37	22.32	61.03	78.31	102.9	127.7	140.0	157.7	160.7	160.8
0.2	X	0.0798	0.998	1.584	2.526	5.266	6.704	8.627	10.92	13.08	14.47	14.90	14.92
	h	7.982	9.981	11.09	12.63	15.80	16.76	17.25	16.38	13.08	7.235	1.490	0
	x	0.399	4.991	7.920	12.63	26.33	33.52	43.14	54.60	65.40	72.35	74.50	74.60
0.3	X	0.0829	0.959	1.471	2.229	4.190	5.232	6.632	8.538	10.61	12.21	12.73	12.75
	h	8.293	9.586	10.30	11.13	12.57	13.08	13.26	12.07	10.61	6.105	1.273	0
	x	0.276	3.195	4.903	7.420	13.97	17.44	22.11	28.46	35.37	40.70	42.43	42.50
0.5	X	0.0789	0.858	1.272	1.864	3.319	4.062	5.132	5.526	8.724	10.69	11.30	11.46
	h	7.789	8.580	8.906	9.320	9.957	10.156	10.264	9.790	8.733	5.745	1.130	0
	x	0.158	1.716	2.545	3.728	6.638	8.124	10.26	13.05	17.45	21.38	22.59	22.93

図4-4



ものと判断することができる。この理論はさきに準一様流を仮定しているのて、排水曲線端部の水面勾配が急なところでは誤差を生ずると考えなければならないが、一般的な傾向としては上述の考察も容認される。またこの数値例は(4-16)式すなわち $4K-P > 0$ なる場合を取扱つたが、實際上 $4K-P < 0$ というような場合は表層からの浸透量がきわめて少ないときを表わし、解としては(4-17)式も

必要であるが、現象を考察する上では重要性がないのでこれを省略した。

§ 4 透水層による揚圧力について

斜面内部に存在する透水層に達した水は地下水流をなして流下するが、この場合水脈の下端における排水が良好であり、また部分的に透水性の小さい個所が存在しないならば、地下水は円滑に流下し土層に圧力を及ぼすような現象は起らない。しかし実際には透水層の厚さが均一でしかも透水性にも変化がないというような場合は考えられず、狭さく部の上流側では流れに対する抵抗を生じ土層に圧力を及ぼすものと考えなければならない。しかして地下水脈がほとんど不透水性とみなしうるような層内に存在するならば、管路における断面縮小部に生ずる現象とほぼ同じ状態になるものと推定してさしつかえないが、いま対象としている場合は水脈を囲む層自体が透水性を有し、そのため水圧の上昇にともなつて水脈からの浸出が起り流量が減少しかつ水圧が低下することを考慮しなければならない。

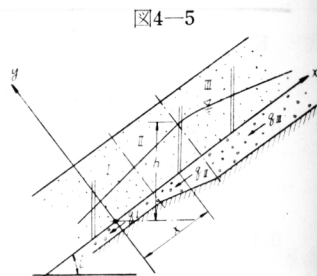


図4-5

いま模型的な状態として図に示すように Zone I から Zone III の間で次第に層の厚さが大きくなっているような場合を考えてみる。上方から流れてきた流量 q_1 はそのまま流下することはできず、この附近では地下水層面よりも高い水頭を生じ、これによつて大きい圧力勾配を与えられ、流速が増加すると同時にこの水頭のため上層中へ浸出して流量を減少しつつ流下することになる。この場合の水圧分布について以下水理学的考察を行つてみる。

まず原点から斜面に平行に上方に向つて x 軸を、これと直角に y 軸をとり x における基準面からの水頭高を h とする。この水脈の透水係数を k とすれば水脈中の流量 q は

$$q = k \int_A \frac{\partial h}{\partial x} da \quad \dots\dots\dots (4-21)$$

とあらわされる。また微小区間 dx において上層へ浸出する流量 dq は

$$dq = k' \frac{\partial h}{\partial y} \bigg|_{y=0} dx \quad \dots\dots\dots (4-22)$$

となり、此処に k' は上層の透水係数である。この水脈から浸出した流れは上層中に次第に飽和層を形成した流量を増しつつ流下するのであるが、その場合この境界面に直角な方向の流速成分は境界面で最大で上層に入るに従つて減少し、地下水自由表面においては 0 になるものとする。すなわち定常状態においては自由水面上でこれと直角方向の速度成分は存在しない。よつてここで与えられる条件は

$$y=0 \text{ において } h' = h - x \sin i \text{ および}$$

$$y=y_1 \text{ において } h'=0, \frac{\partial h'}{\partial y}=0$$

である。これらの条件を満足する最も簡単な仮定は

$$h' = c(y_1 - y)^2, \frac{\partial h'}{\partial y} = 2c(y_1 - y) \quad \dots\dots\dots (4-23)$$

となり近似的にこの仮定が成立するものとすれば、(4-22)式は

$$dq = 2ck'(h - x \sin i) dx \quad \dots\dots\dots (4-24)$$

と書くことができる。また(4-21)式において透層中の $\frac{\partial h}{\partial x}$ は y 方向にはほとんど変化しないものと考えてよいから

$$q = kA \frac{dh}{dx} \quad \dots\dots\dots (4-25)$$

としてさしつかえない。ここに A は透水層断面積である。

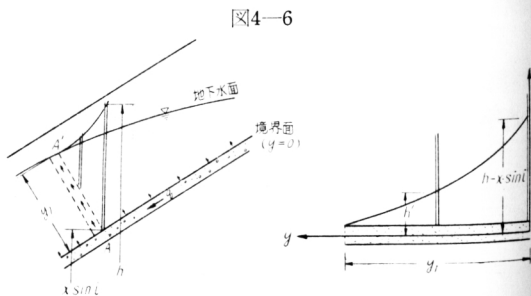


図4-6

さてこの流れの連続式を作る場合、地下水脈中の流れと上層中の流れの和が一定であるという条件も考えられるが、透水層にくらべ上層ははるかに透水性が悪いと考えてよいから地下水脈中における流れの連続条件だけをとりあげても十分な近似性があるものとする。よつて(4-25)式を x で微分して(4-24)式に代入すれば

$$Ak \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{d(Ak)}{dx} \cdot \frac{dh}{dx} - Kh + Kx \sin i = 0 \quad \dots\dots\dots(4-26)$$

となる。ここに $K=2ck'$ であつて(4-26)式が地下水脈水流の基礎方程式である。

まず $Ak = \text{const.}$ すなわち透水性の変化しない領域における解を求める。このとき(4-26)式は

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \alpha h + \beta x = 0 \quad \dots\dots\dots(4-27)$$

となりここに $\alpha = K/Ak$, $\beta = K \sin i / Ak$ である。この式の同次型

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \alpha h = 0$$

の一般解は

$$h = Ae^{x\sqrt{\alpha}} + Be^{-x\sqrt{\alpha}} \quad \dots\dots\dots(4-28)$$

であるから、恒数変化により A , B を求め

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\beta}{2\alpha} e^{-x\sqrt{\alpha}} \left(x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) + C_1 \\ B &= \frac{\beta}{2\alpha} e^{-x\sqrt{\alpha}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) + C_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4-29)$$

とし、これを(4-28)式に代入すると(4-27)式の一般解は次のように与えられる。

$$h = \frac{\beta}{\alpha} x + C_1 e^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha}} \quad \dots\dots\dots(4-30)$$

次に透水性が次第に変化する場合これを x の1次関数であらわすとすれば、

$$Ak = a + bx \quad \dots\dots\dots(4-31)$$

となり(4-26)式は

$$(a+bx) \frac{d^2 h}{dx^2} + b \frac{dh}{dx} - Kh + Kx \sin i = 0 \quad \dots\dots\dots(4-32)$$

となる。この式において $a+bx=X$ と置けば、

$$\frac{d^2 h}{dX^2} + \frac{1}{X} \cdot \frac{dh}{dX} - \frac{K}{b^2} \frac{h}{X} + \frac{K \sin i}{b^2} \cdot \frac{X-a}{X} = 0 \quad \dots\dots\dots(4-33)$$

となり、さらに $K/b^2 = \alpha'$, $K \sin i / b^2 = \beta'$ と置き $\xi = 2\sqrt{\alpha'X}$, $X = \xi^2 / 4\alpha'$ なる変換を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha'^2}{\xi^2} \cdot \frac{d^2 h}{d\xi^2} - \left(\frac{4\alpha'^2}{\xi^2} - \frac{8\alpha'^2}{\xi} \right) \frac{dh}{d\xi} - \frac{4\alpha'^2}{\xi^2} h + \frac{\beta'(\xi^2 - 4\alpha'a)}{\xi^2} &= 0 \\ \therefore \frac{d^2 h}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{dh}{d\xi} - h &= \frac{\beta'}{4\alpha'^2} (4\alpha'a - \xi) \quad \dots\dots\dots(4-34) \end{aligned}$$

となる。(4-34)式の同次型は0次の変形 Bessel 方程式であるからその一般解は

$$h = A'I_0(\xi) + B'K_0(\xi) \quad \dots\dots\dots(4-35)$$

であつて、 A' , B' を恒数変化法で求めると

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{\beta'}{4\alpha'^2} \{ -4\alpha'a\xi K_1(\xi) - 2\xi^2 K_2(\xi) + \xi^3 K_3(\xi) \} + C_1' \\ B' &= \frac{\beta'}{4\alpha'^2} \{ -4\alpha'a\xi I_1(\xi) + 2\xi^2 I_2(\xi) + \xi^3 I_3(\xi) \} + C_2' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4-36)$$

が求められる。ここに $I_n(\xi)$, $K_n(\xi)$ はいずれも n 次の変形 Bessel 関数である。これを(4-35)式に代入して(4-34)式の一般解を求めると次式のようになる。

$$h = \frac{\beta'^2}{4\alpha'^2} \{-4\alpha'\xi(I_0K_1 + K_0I_1) - 2\xi^2(I_0K_2 - K_0I_2) + \xi^3(I_0K_3 + K_0I_3)\} + C_1'I_0 + C_2'K_0$$

$$\therefore h = \frac{\beta'}{4\alpha'^2} (\xi^2 - 4 - 4\alpha'a) + C_1'I_0(\xi) + C_2'(\xi) \dots\dots\dots(4-37)$$

(4-30)および(4-37)式において C_1 , C_2 , C_1' , C_2' はいずれも境界の条件によつてきめられる積分常数である。これを簡単な場合に求めてみよう。

まず図に示すように断面 x_2 において $(Ak)_I$ から $(Ak)_{II}$ に急変する場合は。

$$\left. \begin{aligned} h_I &= x \sin i + C_{1I} e^{x\sqrt{K/(Ak)_I}} + C_{2I} e^{-x\sqrt{K/(Ak)_I}} \\ h_{II} &= x \sin i + C_{1II} e^{x\sqrt{K/(Ak)_{II}}} + C_{2II} e^{-x\sqrt{K/(Ak)_{II}}} \\ (dh/dx)_I &= \sin i + \sqrt{K/(Ak)_I} \{C_{1I} e^{x\sqrt{K/(Ak)_I}} - C_{2I} e^{-x\sqrt{K/(Ak)_I}}\} \\ (dh/dx)_{II} &= \sin i + \sqrt{K/(Ak)_{II}} \{C_{1II} e^{x\sqrt{K/(Ak)_{II}}} - C_{2II} e^{-x\sqrt{K/(Ak)_{II}}}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-38)$$

となり斜面上端および下端の条件として

$$\left. \begin{aligned} x=x_1 \text{ において } h_I &= H_1 \text{ or } (Ak)_I (dh/dx)_I = Q_1 \\ x=x_3 \text{ において } h_{II} &= H_2 \text{ or } (Ak)_{II} (dh/dx)_{II} = Q_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4-39)$$

が与えられ、また $x=x_2$ における水頭高が等しく流量が連続であるという条件から

$x=x_2$ において

$$h_I = h_{II}, (Ak)_I (dh/dx)_I = (Ak)_{II} (dh/dx)_{II} \dots\dots\dots(4-40)$$

が得られ、これら4条件から C_{1I} , C_{2I} , C_{1II} , C_{2II} が決定される。

透水性が直線的に次第に変化する場合、図に示すこの部分 (Zone II) の中点を座標原点にえらび (4-37) 式を次のように書き改める。

$$\alpha' = K/b^2, \quad \beta' = K \sin i/b^3, \quad \xi = 2\sqrt{K(a+bx)/b^2},$$

$$a = \{(Ak)_I + (Ak)_{II}\}/2, \quad b = \{(Ak)_I - (Ak)_{II}\}/2$$

であるから

$$h_I = x \sin i + \frac{b \sin i}{K} + C_3 I_0 \left\{ \frac{4Kx_0}{(Ak)_{II} - (Ak)_I} \cdot \sqrt{\frac{(Ak)_I}{K}} \right\}$$

$$+ C_4 K_0 \left\{ \frac{4Kx_0}{(Ak)_{II} - (Ak)_I} \cdot \sqrt{\frac{(Ak)_I}{K}} \right\} \dots\dots\dots(4-41)$$

となり式中 $(Ak)_I$ は $-x_0 < 0 < x_0$ の範囲内で $a+bx$ で与えられ、 I_0 , K_0 は $(Ak)_I$ を変数とする関数である。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x=x_1 \text{ において } h_I &= H_1 \text{ or } (Ak)_I (dh/dx)_I = Q_1 \\ x=-x_0 \text{ において } h_I &= h_{II} \text{ および } (dh/dx)_I = (dh/dx)_{II} \\ x=x_0 \text{ において } h_{II} &= h_{II} \text{ および } (dh/dx)_{II} = (dh/dx)_{II} \\ x=x_3 \text{ において } h_{II} &= H_2 \text{ or } (Ak)_{II} (dh/dx)_{II} = Q_2 \end{aligned} \right\}$$

となり、この6条件から積分常数 C_{1I} , C_{2I} , C_{1II} , C_{2II} , C_{1II} , C_{2II} が決定される。

次に適当な数値による計算例を示してみる。まず透水性が急変する場合に対し

$$K/(Ak)_I = 1/10 \text{ とし,}$$

図4-7

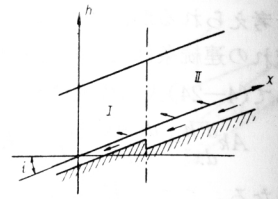
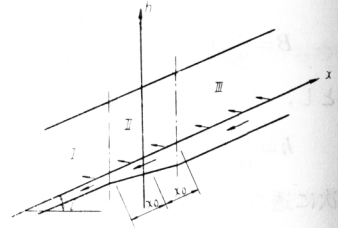


図4-8



$K/(Ak)_I = 1/20, 1/30, 1/50, 1/100$ の4つの場合につき両端の条件として
 $x = \pm 10m, 20m, 50m$ において $h = x \sin i$ すなわち水頭高が境界面の高さとも一致し上部土層へ圧力
 を及ぼさなくなるような場合について計算すると, ($i = 30^\circ$ とする)

$x_1 = -10, x_3 = +10$ (Case I)

$$\begin{aligned} K/(Ak)_I \begin{cases} h_I = 0.5x + 0.65399e^{0.3162x} - 0.0024e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.00118e^{0.2236x} + 0.65273e^{-0.2236x} \end{cases} \\ 1/20 \begin{cases} h_I = 0.5x + 1.12023e^{0.3162x} - 0.00203e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.02978e^{0.1826x} + 1.14798e^{-0.1826x} \end{cases} \\ 1/30 \begin{cases} h_I = 0.5x + 1.94502e^{0.3162x} - 0.00333e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.11289e^{0.1414x} + 1.90923e^{-0.1414x} \end{cases} \\ 1/50 \begin{cases} h_I = 0.5x + 2.76505e^{0.3162x} - 0.00499e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.34199e^{0.1x} + 3.19205e^{-0.1x} \end{cases} \\ 1/100 \end{aligned}$$

$x_1 = -20, x_3 = +20$ (Case II)

$$\begin{aligned} 1/20 \begin{cases} h_I = 0.5x + 0.65485e^{0.3162x} - 0.00049e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.0009e^{0.2236x} + 0.65493e^{-0.2236x} \end{cases} \\ 1/30 \begin{cases} h_I = 0.5x + 1.15646e^{0.3162x} - 0.0001e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.00078e^{0.1826x} + 1.15723e^{-0.1826x} \end{cases} \\ 1/50 \begin{cases} h_I = 0.5x + 1.94502e^{0.3162x} - 0.00001e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.00680e^{0.1414x} + 1.95181e^{-0.1414x} \end{cases} \\ 1/100 \begin{cases} h_I = 0.5x + 3.32472e^{0.3162x} - 0.00021e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.06203e^{0.1x} + 3.38654e^{-0.1414x} \end{cases} \end{aligned}$$

$x_1 = -50, x_3 = +50$ (Case III)

$$\begin{aligned} 1/20 \begin{cases} h_I = 0.5x + 0.79057e^{0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x + 0.79057e^{-0.2236x} \end{cases} \\ 1/30 \begin{cases} h_I = 0.5x + 1.15744e^{0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x + 1.15744e^{-0.1826x} \end{cases} \\ 1/50 \begin{cases} h_I = 0.5x + 1.95441e^{0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x + 1.95441e^{-0.1414x} \end{cases} \\ 1/100 \begin{cases} h_I = 0.5x + 3.41871e^{0.3162x} - 0.00016e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x - 0.00016e^{0.1x} + 3.41871e^{-0.1x} \end{cases} \end{aligned}$$

次に断面が次第に変化する場合の例として $K/(Ak)_I = 1/10, K/(Ak)_{II} = 1/50$ として

$$x_{01} = 5.091 \div 5.0 \quad x_{02} = 9.899 \div 10.0 \quad x_{03} = 14.142 \div 15.0$$

の3つの場合につき計算しそれぞれ Case IV₁, IV₂, IV₃ とすると次式が与えられる。

Case IV₁

$$\begin{cases} h_I = 0.5x + 5.9850e^{0.3162x} - 0.0000020e^{-0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x + 1.96421 - 0.066859 I_0 \{0.12728 \sqrt{(Ak)_I / K}\} - 3.6300 K_0 \{0.12728 \sqrt{(Ak)_I / K}\} \\ h_{III} = 0.5x - 0.0002458e^{0.1414x} + 2.8020e^{-0.1414x} \end{cases}$$

Case IV₂

$$\begin{cases} h_I = 0.5x + 16.4417e^{0.3162x} \\ h_{II} = 0.5x + 1.01016 - 0.0010873 I_0 \{0.24749 \sqrt{(Ak)_I / K}\} - 9.9962 K_0 \{0.24749 \sqrt{(Ak)_I / K}\} \\ h_{III} = 0.5x - 0.0000012e^{0.1414x} + 3.3310e^{-0.1414x} \end{cases}$$

Case IV₃

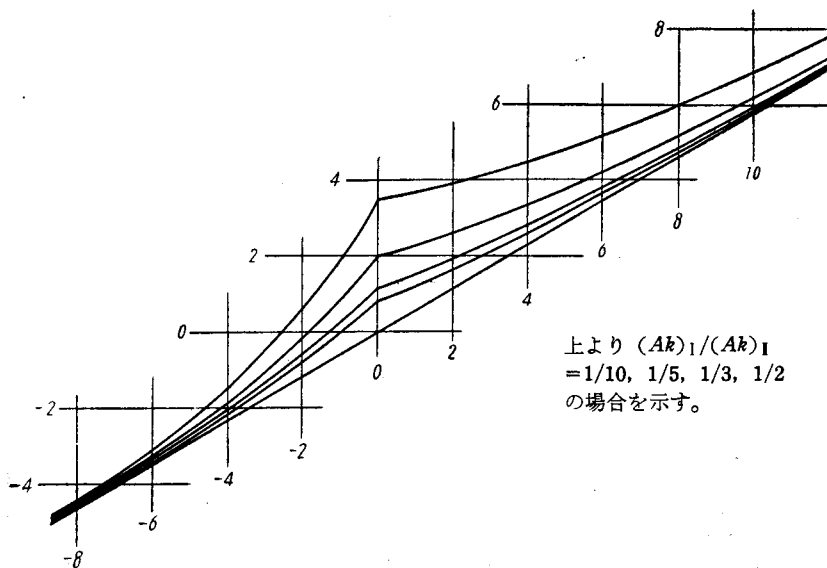
$$\begin{cases} h_1 = 0.5x + 46.0782 e^{0.31823x} \\ h_1 = 0.5x + 0.70710 + 0.00005566 I_0 \{0.35356 \sqrt{(Ak)_I / K}\} - 15.1476 K_0 \{0.35356 \sqrt{(Ak)_I / K}\} \\ h_1 = 0.5x + 4.06216 e^{-0.1414x} \end{cases}$$

いま Case III について各式の値を計算したものを表4-4, 図4-9に示す。また両端の条件による差を示すために $(Ak)_I / (Ak)_I = 1/5$ の場合について x_1, x_3 の値が $10m$ のものと $50m$ のものを比較したのが表4-5, 図4-10である。さらにまた透水性が次第に変化する場合 Case IV について変化が急であるか徐々であるかによる差を Case IV₁, IV₂, IV₃ に対して計算したものが表4-6, 図4-11である。このうち表4-4および図4-9は h をそのまま示してあるが他のものについては, その差を一層明らかにするためと, 上の土層に及ぼす水圧をあらわす意味で $h' = h - \sin i$ を示している。表および図によつてわかるように, 透水性急変の場合圧力最大値は急変部に現われ変化率が大きくなるとともに増大している。しかして1/10に低下するということはほとんど閉塞に近い状態を意味すると考えてよくこの場合は収縮部の上流部にはほとんど水頭勾配のない状態が現われている。両端境界の条件を比較すると5倍の距離の点で同じ条件を与えた場合の差が1割程度であり, その影響は比較的小さいものと考えることができるので x_2 を無限大として計算した値によつてほぼ大勢を推察しうる。また透水性

表4-4
(Ak)_I / (Ak)_{II}

$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$	
x	h	x	h	x	h	x	h
-9.49	-4.70	-9.49	-4.69	-9.49	-4.65	-9.49	-4.57
-8.54	-4.27	-8.54	-4.19	-8.54	-4.14	-8.54	-4.04
-7.59	-3.72	-7.54	-3.69	-7.59	-3.62	-7.59	-3.48
-6.64	-3.22	-6.64	-3.18	-6.64	-3.08	-6.64	-2.90
-5.69	-2.72	-5.69	-2.66	-5.69	-2.52	-5.69	-2.28
-4.74	-2.20	-4.74	-2.11	-4.74	-1.94	-4.74	-1.61
-3.94	-1.73	-3.94	-1.62	-3.94	-1.38	-3.94	-0.94
-2.85	-1.10	-2.85	-0.95	-2.85	-0.63	-2.85	-0.03
-1.90	-0.52	-1.90	-0.31	-1.90	+0.12	-1.90	0.93
-0.95	+0.11	-0.95	-0.38	-0.95	0.97	-0.95	2.06
-0.63	0.33	-0.63	0.63	-0.63	1.28	-0.63	2.48
-0.32	0.56	-0.32	0.89	-0.32	1.61	-0.32	2.94
0	0.79	0	1.16	0	1.95	0	3.42
0.45	0.94	0.55	1.32	0.35	2.04	0.5	3.50
0.89	1.09	0.10	1.50	0.71	2.12	1	3.59
1.34	1.26	1.64	1.68	0.06	2.21	1.5	3.69
2.68	1.78	3.29	2.28	1.41	2.31	2	3.80
4.03	2.33	4.93	2.94	2.12	2.51	3	4.03
5.37	2.92	6.57	3.59	2.83	2.73	4	4.29
6.71	3.53	8.21	4.37	4.24	3.20	6	4.88
8.05	4.16	9.86	5.12	6.37	3.98	9	5.89
9.39	4.79	11.50	5.72	8.49	4.83	12	7.03
10.73	5.44	13.14	6.68	10.61	5.74	15	8.26
12.07	6.09	14.79	7.47	12.73	6.69	18	9.57
13.42	6.75	16.43	8.27	14.85	7.67		
				16.97	8.66		

図4-9



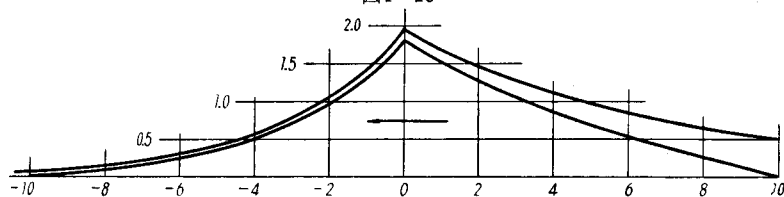
上より $(Ak)_I/(Ak)_{II}$
 $= 1/10, 1/5, 1/3, 1/2$
 の場合を示す。

表 4-5

X	h-x, simi	
	$x_1=10$	$x_1=50$
-10	0	0.035
-9.49	0.023	0.097
-8.54	0.071	0.131
-7.59	0.127	0.177
-6.64	0.193	0.239
-5.69	0.277	0.323
-4.74	0.387	0.436
-3.79	0.531	0.589
-2.85	0.724	0.795
-1.90	0.982	1.073
-0.95	1.329	1.448
-0.63	1.470	1.600
-0.32	1.625	1.768
0	1.796	1.954
0.35	1.697	1.859
0.71	1.603	1.768
1.06	1.512	1.682
1.41	1.425	1.600
2.12	1.252	1.448
2.83	1.111	1.310
4.24	0.842	1.073
6.37	0.499	0.795
8.49	0.100	0.589
10	0	0.507

上は $x_1=50$
 下は $x_1=10$ を示す。

図4-10



漸変の場合は圧力最大値はやはり変化部中央に生じるが、縮小が徐々であれば圧力上昇は次第に低下している。これらのことがらを総合して考えてみると、何かの原因によつて地下透水層の一部が閉塞されあるいは急に透水性が低下すると、その上流部一帯に大きい揚圧力が作用し、このため上部土層中の中立応力が増大しせん断抵抗力が減少する状態になる。この影響を最も大きく受ける部分はすべり面下部のいわゆる受働すべりの部分であるので、この附近を下端とする崩壊を生ずる可能性が大きくなる。実際の山崩れにおいて山腹の一点から水を吹き出すと同時に上部の斜面が一挙に崩落するという見聞が知られているが、これはこのような水圧によつて釣合がやぶれ、土の移動が開始されると同時にその弱線を伝つて被圧地下水が噴出するものと解することができる。

上述の理論解析結果に対し、長さ 250cm、巾 30cm、高 90cm の片面硝子張箱に約 30° の斜面を作り人工地下水による崩壊実験ならびに水圧分布の測定を行つた。表層と透水層の透水係数比は約 1/100、透水層縮小比 1/2, 1/3, 1/5, 1/10、および長さ 16, 24, 32cm の区間で縮小比が 1/3 になるような場合について実験した結果、一応この理論解析と同様の傾向を示す実測値を得ている。実験技術上改善すべき問題もあり、実験自体としては今後種々の測定を組合わせた結果をまつのが至当と考えられるので、ここでは単に理論的考察の適応性を一応裏付け得たことを附記するにとどめる。

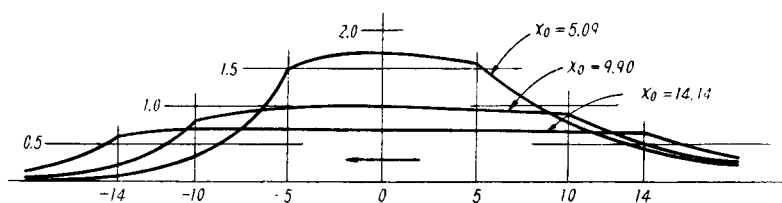
結 論

山くずれの機構を解明するために、山腹斜面の釣合状態に対して塑性平衡条件、弾性平衡条件およ

表 4-6

Case 1		Case 2		Case 3	
X	h—xsimi	X	h—xsimi	X	h—xsimi
-18.97	0.019	-18.97	0.048	-18.97	0.131
-17.08	0.034	-17.08	0.087	-17.08	0.239
-15.81	0.050	-15.81	0.130	-15.81	0.356
-14.54	0.075	-14.54	0.193	-14.54	0.531
-14.17	0.085	-14.17	0.218	-14.14	0.605
-13.28	0.112	-13.28	0.288	-13.73	0.619
-12.02	0.167	-12.02	0.430	-12.37	0.650
-10.75	0.250	-10.75	0.641	-10.13	0.677
-9.93	0.324	-9.93	0.832		
-9.49	0.372	-9.90	0.840		
-8.22	0.556	-9.68	0.853		
-6.96	0.829	-8.30	0.908	-7.62	0.690
-5.69	1.236	-6.77	0.941		
-5.12	1.480				
-5.09	1.495	-5.07	0.961		
-4.46	1.568			-4.87	0.696
-3.71	1.626	-3.21	0.971		
-2.88	1.666				
-1.98	1.691			-1.85	0.698
-1.00	1.703	-1.19	0.984		
0.06	1.705	0.99	0.971		
1.46	1.696			1.41	0.696
2.67	1.677				
3.69	1.648	3.33	0.962		
5.09	1.609			4.94	0.690
5.66	1.344	5.84	0.947		
7.07	1.216				
8.49	0.995	8.49	0.923	8.71	0.679
9.90	0.815	9.90	0.906		
10.61	0.737	10.61	0.820		
11.31	0.667	11.31	0.742		
12.73	0.546	12.73	0.607	12.73	0.659
14.14	0.447	14.14	0.497	14.14	0.649
14.85	0.404	14.85	0.450	14.85	0.587
15.56	0.366	15.56	0.407	15.56	0.531
16.97	0.300	16.97	0.333	16.97	0.435
19.09	0.222	19.09	0.247	19.09	0.322

图4-11



び近似解法についての力学的考察を行い、またこれに大きい影響を及ぼす斜面中の地下水の作用について水理学的考察を行った。これらの結果を要約し、これら相互の関係を説明すれば次のとおりである。

まず塑性平衡条件に対しては、すべり面の形を解析的に求める方法について考察し、これと同時に限界的な釣合状態について論じた。この場合 Caquot 理論における基礎式を用い数値積分法によつてこれを解く方法をとつた。境界条件として斜面長を与えられたとき、これから出発して数値積分を行い $v' > (v + \mu)/2\mu$ に達すればこの斜面は安定であると判定される。また $v' = 0$ をうればこれより少し深い点を最深部とする一個の連続したすべり面が求められ、この面にそつて崩壊を生ずる。このようにして求められたすべり土塊は従来のどの理論によるものよりも深くかつ長いものになる。またこの理論によれば安蔵理論における平面すべり面は可能なすべり面中もつとも浅いものとなり、この値のちょうど2倍の深さを持つもつとも深く短いすべり面にいたるまで、斜面長に応じて種々のすべり面が与えられる。また従来の諸理論における抵抗力の方がすべり力よりも大きくなるという矛盾を解消することができる。斜面を構成する土が均一な層である場合のみならず、強度の異なる平行な成層状態の斜面における山くずれに対してもこの理論は容易に応用され、表層強化の効果を数値的に表現することができる。強度増大の効果は滑動力の減少として示され、層厚の減少率は下層との境界面において最大となる。しかし下層内においても減少効果はなお増大し表層の厚さがある限度以上になれば下層の深さいかにかはらず安定を保ちうる。しかし減少量の増加は滑動力の増加にくらべると次第に小さくなるため、表層の強度があまり大きくない場合や強化層の厚さが薄い場合には深部における効果は相対的には低下し、そのため強化されないときよりも深いすべり面においては崩壊するといふ場合も生じる。これらの結論を導いた理論は、その根本において地表面と平行な面上の応力は地表からの深さのみの関数であるという仮定にもとづいており、この仮定自体に対しては不完全のそしりを免れないと考えるが、より複雑な仮定は数学的取扱いを不可能にし、またこの仮定によつて導かれる結論は現実の現象をかなりよく説明しうると認められるのでこの仮定をさらにせんさくすることは行わない。

次に弾性平衡条件における応力分布ならびに変形状態の考察は、崩壊を生ずる以前の安定な斜面のあり方を探究しこれと塑性平衡状態とを対比することによつて、より一般的な問題として解明するために行つたものである。この場合数学的取扱を簡単にするために3辺を固定された矩形弾性体の底面が傾斜したとき自重によつて生ずる応力、変形について2次元変形の問題として取扱つた。この解は x , y の3次以下の多項式および三角関数と双曲線関数の積の級数和によつて与えられ、物体力のポテンシャルをフーリエ級数に展開することによつて、底面自由支持の場合と完全固定の場合に対して境界条件を満足させることができる。この両者のもつとも大きい相異は応力、変形ともに、前者においては土層の厚さが小さくなるほど大きくなるに反し、後者においては厚さが大きいほど小さくなる点にある。この事実は底部にすべり層を持たない均質な斜面が安定している場合は土層が薄い方が安全であるに反し、すべり層を生じあるいは底部に軟弱な層を有するような場合には薄い方がかえつて危険であることを意味している。また別の表現をするならば、深いすべりにおいては底部ですべりを生じて比較的安定であるに反し、浅いすべりでは土層内部の破壊へと移行し一挙に崩落する可能性が大きいことを示すものといえる。また弾性平衡状態においては、地表面の変位量は斜面中点に対して対称形をなし、かつ変形量の大部分は斜面上下端に生じる。したがつて圧縮力、引張力においても上下端が大きく中央部においては大きい応力、変形は現われない。また土はその強度の性質上引張り抵抗力が小さいのでまず上端に割れ目を生じ、これによつて下端部の圧縮応力が倍加され、この部分の破壊によつて崩壊の状態に達するものと考えられる。これらの考察は理論式の数値計算結果から知られるところであるが、なお底面自由支持の場合の変形状態を寒天を用いた模型実験と比較し

た結果は傾向的にかなりの一致を示し、これらの考察を一応裏づけるものと認められる。

近似計算法は前述の諸理論が山くずれの機構を理解することを主目的としているために、その取扱がかなり複雑になり実際問題を検討する目的には不便を免れないので、これをなるべく簡単にかつできるだけ合理的に取扱うための実用的解法としての意味を持つている。この方法はすべり面の形を簡単な幾何学的曲線で近似させ、すべり面上のみにおいて塑性平衡条件を満足させるもので、筆者の提案した方法は従来からもつとも広く用いられている円弧すべり面の仮定にもとづく一解法である。この仮定による種々の研究を検討した結果、分塊相互間に働く内力の方向をすべり面接線の方向にとり、滑動力および抵抗力の円の中心に対するモーメントを積分したものととの比によつて安全係数を表わし、最危険すべり面ならびに限界すべり面を見つける計算式と計算図表を与えた。またこの解法自体を検討するために、地表面に平行な方向の滑動力と抵抗力の釣合を考えた場合、および分塊間内力の方向を地表面と平行と仮定した場合について計算した結果、本計算法との差は小さくかつ安全側にあることがわかった。すべり面の形を対数らせ線で近似させる方法は一層よい近似を与えるものと認められているので、この仮定による一解法をこころみだが、この方法は実用的解法としては複雑になりすぎるきらいがあるにもかかわらず、前述の解法と大差ない結果を与え、かつ危険側になり、結局さきに提案した方法が適当であるという結論に達した。

最後に山くずれの安定条件に対する地下水の影響については、まず中立応力による土の見掛強度の低下について論じ、このような中立応力発生の原因となる地下不透水層上の滞水層および透水層中を流れる地下水が上部の土層に与える圧力についての水理学的考察を行つた。中立応力によつて土粒子間の垂直応力が減少し、土の摩擦抵抗が減少することはすでに従来から指摘されているところで、ここで取りあげた問題はいわゆる受働土圧と主働土圧の差を土層の抵抗力とみなす前述の考え方においてその効果がどの程度に現れるか、および平面すべり面の深さがどれだけ浅くなるかというもつとも簡単な例によつてこれを確認したもので、他の諸理論との結びつきにおいては単なる数値処理上の問題といえる。不透水層上の地下水面形については、豪雨時に発生する山くずれを想定し地下水流定常状態に対する水理計算を行つた。その結果を要約するならば、まず滞水層は定常状態においては一般に斜面上部においてもかなり地表面近くまで上昇し、表層の浸透性が下層よりもはるかに小さい場合でなければ、山くずれが起るような時期には斜面土層がほぼ全般的に飽和状態にあると考えねばならない。また排水の影響も局部的効果しか望まれず排水工によつて斜面の湿潤を防ぐためには全面的な排水を要するものと考えられる。透水層による揚圧力は山くずれあるいは地すべりの誘因としてもつとも重要なものと見られ、透水性の変化する部分においてはかなり大きい水圧が上部土層にかかり、これによつて生ずる中立応力のため安定を破られるとする考え方が正当なものと解される。透水性が急激に変化する場合と徐々に変化する場合に対しその水圧分布を解析的に求めると、指数関数および変形ベッセル関数によつてこれを表わすことができる。計算された理論値は模型実験によつても一応裏づけられ、またこの場合は滞水層による水圧と異り、地表面よりも高い水頭を示す被圧地下水が作用する例も現われ、斜面の安定に対し重大な影響を与えることを確認した。

以上第1節ないし第4節において考察した諸理論は、一連の目的において各要素部分をなしているが、それぞれを取りあげれば互に全く独立した基礎理論によつて考察せられるべき問題とみなされるので、その取扱いにおいても直接これらを結びつけることは行わなかつた。

本題の研究にあたり頭初より御懇篤な御指導を賜つた村上恵二先生、遠藤隆一先生、日置象一郎先生に深甚な謝意を捧げる。また数値計算、模型実験に御協力いただいた中山光司氏、横田知昭氏ならびに終始御援助いただいた京都大学農学部砂防工学研究室の諸氏に感謝する。なお本研究は一部文部省科学研究費補助金による研究結果が含まれている。

参 考 文 献

- 武居有恒：山崩れの力学的研Ⅱ，Ⅲ新砂防29号，1958。
 最上武雄：土の力学，1948。
 安藏善之輔：地氈の力学的研究，九大工学部彙報，19—5，1940。
 Frontard, M.: Calculs de Stabilité des Barrages en Terre. 2ed Congr. on Large Dams., Vol. 4, 1946.
 Resal, J.: Poussée des Terres., II em Part., 1910.
 野満隆治：山崩れについて，地球物理，6—2，1942。
 日高孝次：数値積分法上，1946。
 倉西正嗣：弾性学，1948。
 林 桂一：数値計算と解析，1950。
 武居有恒：山崩れの力学的研究Ⅰ，新砂防13号，1954。
 Fellenius, W.: Erdstatische Berechnung mit Reibung und Kohasion, 1935.
 Krynin, D. P.: Soil Mechanics, 1947.
 Jaky, J.: Stability of Earth Slopes. Proc. Intern. Conf. Soil Mechanics. Vol. 22, 1936.
 Taylor, D. W.: Note on the stability of Slopes. Proc. Intern. Conf. Soil Mech. Vol. 3, 1936.
 Meyer, O. H.: Computation of the Stability of Slopes. Proc. A. S. C. E. Soil. Mech. Div., 1924.
 山口昇：地氈りの深さに関する一考察，土質調査委員会報告3，1943。
 武居有恒：円弧すべり面の仮定に基づく山崩れ平衡条件に対する一計算法新砂防7，1952。
 Lorenz, H.: Verhindern und Stabilisieren von Böschungsrutschungen. Bautechnik, 1948.
 Muskat, M.: The Flow of Homogeneous Fluids through Porus Media, 1937.
 Terzaghi, K.: Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischen Grundlage, 1925.
 Terzaghi, K.: The mechanics of Shear Failures on Clay Slopes and the Creep of Retaining Walls. Public Road Vol. 10, 1929.
 Terzaghi, K.: The Shearing Resistance of Saturated Soil and Angle between the Plane of Shear. 1st. Conf. of Soil Mech. Vol. 1, 1936.
 Terzaghi, K.: Theoretical Soil Mechanics, 1943.
 Terzaghi, K., Peck, R. B.: Soil Mechanics in Engineering Practice, 1948.
 Terzaghi, K.: Mechanics of Landslides. Harvad Soil Mech series 36, 1950.
 田中 茂：豪雨による砂質斜面の崩壊機構，新砂防22，1956。
 物部長穂：水理学，1950。

Summary

For the purpose of clarifying the mechanism of the landslide, the author studied the following items. The static consideration on the equilibrium condition of slopes, as for the plastic state, elastic state and the approximate solution. The hydraulic consideration on the ground water pressure which has a dangerous effect on the stability of slopes.

The first, the author considered with the analitical solution of sliding surface, and discussed the plastic equilibrium condition of slopes, at the same time. In this study, the fundamental equation is based on the Dr Caquot's assumption, and the calculation is carried out by the method of neumerical integration. Consequently, I obtained the largest sliding mass as compared with any result of traditional theorems, and excluded the contradiction of larger resisting force against smaller sliding force of sliding mass, which included with hitherto studys. When the boundary condition is given as the length of the slope, the numerical integration is started from this point, and dicision of equilibrium is given as the fixed relation of calculated values. The shapes of sliding surface vary with the given length of the slope, and the most shallow one is the plane liding surface as same as the one of Dr. Anzō's theorem. The most deep

one has a double depth of former, and slide can not occur in the outside of this sliding surface. This theorem may be easily applied on the case of stratified slopes which consist of different strength. The effect of strengthened surface layer is expressed as the decrease of the sliding force, and it increases with the thickness of surface layer. The ratio of the decrease magnitude and the total sliding force reach the maximum at the boundary of the two layers, in spite of the continuous increase of magnitude in the beneath layer. When the degree of strengthen and the thickness of this layer may exceed the some fixed limit, the landslide can not occur in everywhere, while they remain in this limit the slide occurs with some larger sliding mass against the case of slope with uniform layer.

The studies on the stress distribution and the deformation of mass, based on the elastic equilibrium condition, have a purpose of clarifying the stable states before the plastic condition is satisfied. For simplifying the problem, the rectangular elastic body which is fixed on three side and inclined to the horizon is assumed, then the states deformed by the action of own gravity force are treated as the problem of two dimensional deformation. The solution of this problem is given as the sum of the polynomial expression of x , y with third order, and the series of the products of trigonometric function and hyperbolic function. The boundary conditions, the case of the free support of three sides, and the case of the perfect fixed base side and free supported two sides, are both satisfied with the treatment of the potential function of the body force with developing to the Fourier's series. The most remarkable difference between two cases is that, in the former, the stresses and the deformations are decrease with the thickness of the body, but the latter are increase. This conclusion shows the fact that, when the slopes have no sliding layer in their base, the thicker bodies are more stable than the thinner bodies, but once the base slides have been possessed, the thinner bodies become danger than the thicker one. The stresses and the deformations of surface distribute symmetrically with the center of surface, and the magnitudes of them are far larger in the end portion than the center. In the first time, the failure occurs in upper portion, because of the constitution of strength of earth, then the increase of compression in lower portion causes the wholly break-down, because of the development of transformation originated from the previous upper portion failure. While above consideration are depend on the numerical calculation of former theorem, the deformation state in the case of free support has been compared with the simple model test, and I have gained the fairly well consequence in the tendency.

As the former theorems have a principal intention of understanding the mechanism of landslide, the treatments are troublesome for dealing with the practical problems, the approximate solutions have the meaning of simple and possibly reasonable practical calculation method. The authors method is based on the assumption of circular sliding surface, which has been used most popularly on the problem, and the direction of internal force between vertical sliding slice is assumed as parallel to the sliding surface. The safety factor is expressed as the ratio of the integrated values of each slice's resisting moment for the center of sliding circle and the one of sliding moment. Then, the simple equations and the computation charts are given for finding the most dangerous sliding surface and the critical sliding surface. The cases, which considering the equilibrium of total sliding force and resisting force, or assuming the direction of internal force is parallel to the surface, are investigated for the purpose of examin

ing this solution. And the differences with this solution are very small and they are in safety side. Samely, the assumption of loglithimic spiral sliding surface is examined, but this solution is troublesome for practical use, in spite of the difference with the former is small. Consequently the solution founaly proposed is considered to the most suitable one.

The effect of the ground water affecting to the stability of slope may be explained as the decrease of the apparent strength of earth due to the action of neutral stress. The causes of the production of those neutral stress are the accumulated water above the impermeable base, and the uplift pressure through the permeable layer under the surface zone. The auther drived the theoretical solutions for these problem and gained the following conclusions. In the steady state, the accumulated ground water rise nearby the surface of slope even in the upper portion. Therefor, excepting the case of the low permeable surface layer, whole slope may be saturated at the time of landslide occurrence. And the effect of the drainage is limited in narrow area, then the drainage system for preventing the satulation of slope must be distributed in whole area. The uplift pressure through the permeable layer is considered as the most dangerous causes for the the landslides and landcreeps. In the region near-by the portion of varying the permeability, the large hydraulic pressure acts on the upper layer, and the neutral strees according to this action weekens the strength of earth. The distribution of hydraulic pressure can be expressed as the exponential functions or the deformed Bessel's functions, as the change of permeability is suddenly or slowly. The theoretically calculated values was partly examined by the simple experiment, and for this result it was cirtilied that the hydraulic pressure rise by far above the surface of slope occationally, and the phenomena may causes the typieal landslide.