

p 進体の巡回 p 拡大の分岐定数について

九大理 末吉 豊

$\mathbb{Q}_p$ を有理 p 進数体、 $k/\mathbb{Q}_p$ を有限次拡大とし、 ord_k で k の正規付値を表わす。 K/k を有限次ガロア拡大、 G をそのガロア群とし、 $G_i = \{\sigma \in G \mid \text{ord}_K(a^\sigma - a) \geq i+1 \text{ for } \forall a \in \mathcal{O}_K\}$ ($i \geq -1$) を第 i 次分岐群とする。ここで、 $\mathcal{O}_K$ は K の整数環を表わす。 $G_i \neq G_{i+1}$ なる整数 i は lower ramification number と呼ばれる。 $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ に対して、 $i-1 < x \leq i$ のとき、 $G_x = G_i$ と定義し、 $\varphi_{K/k}(x) = \int_0^x (G_0 : G_t)^{-1} dt$ とおく。 $G^{\varphi_{K/k}(x)} = G_x$ とおいて、 $G^t \neq G^{t+\varepsilon}$ for $\forall \varepsilon > 0$ なる t を upper ramification number と呼ぶ。ここでは、upper ramification number のことを単に分岐定数ということにする。

K/k が abel 拡大なら、Hasse-Arf の定理により、 K/k の分岐定数はすべて整数、特に K/k が完全分岐な p^m 次巡回拡大なら、その分岐定数 $t_1 < \dots < t_m$ がすべて自然数である。そこで、 k および m 個の自然数 $t_1 < \dots < t_m$ が与えられたとき、 $t_1, \dots, t_m$ がある完全分岐な p^m 次巡回拡大 K/k の分岐定数となるための必要十分条件を求める問題が考えられる。この問題に対して、

次のように Maus (k が 1 の原始 p 乗根 ζ_1 を含まない場合、及び、 k が 1 の原始 p^s 乗根 ζ_s を含み、 $\text{ord}_k(\zeta_s - 1) \neq 0 \pmod{p}$ が成り立つ場合) [1]、Miki (一般の場合) [2], [3] により解答が与えられた。

$e = \text{ord}_k(p)$, $\# \bar{k} = p^f$ (但し、 $\bar{k}$ は k の剰余体)、 $e' = e/(p-1)$ とおき、 $U = U^0 = k$ の単数群、 $U^i = \{u \in U \mid \text{ord}_k(u-1) \geq i\}$ 、 $P(t) = \min(pt, t+e)$ for $t \geq 0$ 、 $f_k = \{t \in \mathbb{Z} \mid 0 < t < pe', t \not\equiv 0 \pmod{p}\}$ とする。 $\zeta_1 \in k$ のとき、 $\zeta_s \in k$, $\zeta_{s+1} \notin k$ で s を定め、 $p^e \parallel \text{ord}_k(\zeta_s - 1)$ とすると、[3] の Lemma 17 により、

$$\zeta_s = \sum_{i=0}^{p^e} \zeta_1^{p^{e-1}} \cdots \zeta_e, \quad \zeta_e \neq 1, \quad \zeta_i \in U^1$$

なる分解で条件

- a) $\text{ord}_k(\zeta_e - 1) \in f_k \cup \{pe'\}$.
- b) $\zeta_i \neq 1$ なる i ($0 \leq i \leq e-1$) に対して、 $\text{ord}_k(\zeta_i - 1) \in f_k$.
- c) $\zeta_i \neq 1, \zeta_j \neq 1$ なる i, j ($0 \leq j < i \leq e$) に対して

$$\text{ord}_k(\zeta_i - 1) > p^{i-j} \text{ord}_k(\zeta_j - 1).$$

をみたすものがある。しかも、 $\lambda_i = \text{ord}_k(\zeta_i - 1)$ とおくとき、集合 $\{\lambda_i \mid \lambda_i \neq \infty\}$ は k のみで定まって、上の分解及び ζ_s の選び方によらない。以上の準備の下で、Maus, Miki の結果は次のように述べられる。

定理 (Maus-Miki) $k/\mathbb{Q}_p$ を有限次拡大、 $t_1, \dots, t_m$ を m 個の自然数とする。 $t_1, \dots, t_m$ がある完全分岐な p^m 次巡回拡大 K/k

の分岐定数となるための必要十分条件は、 $t_1, \dots, t_m$ が次の条件 i), ii), iii) をみたすことである。

$$i) \quad t_{i+1} \geq P(t_i) \quad \text{for } i=1, \dots, n-1,$$

$$ii) \quad t_i = P(t) \quad \text{for some } t \in \mathbb{N} \quad \text{ならば、}$$

$$\begin{cases} S_i \in k \text{ のとき、 } i \geq 2 \text{ かつ } t = t_{i-1}, \\ S_i \in k, t \neq e' \text{ のとき、 } i \geq 2 \text{ かつ } t = t_{i-1}, \end{cases}$$

$$iii) \quad t_i = 0 \quad \text{for } i \leq 0 \text{ とおく。}$$

$$iii-1) \quad f=1 \text{ のとき、}$$

ある j ($1 \leq j \leq m$) に対して、次の条件

$$C(j): \begin{cases} t_{j-i} \leq \lambda_{e-i} \quad (0 \leq i \leq l) \\ I = \{i \mid 0 \leq i \leq l, t_{j-i} = \lambda_{e-i}\} \text{ とおくとき、} \\ \#I = \begin{cases} \text{odd} & (p=2) \\ 1 & (p \neq 2) \end{cases} \end{cases}$$

が成立すれば、 $m \leq j + s - 1$ 。

$$iii-2) \quad f > 1 \text{ のとき、}$$

ある j ($1 \leq j \leq m$) に対して

$$\begin{cases} t_j \neq P(t_{j-1}) \\ t_j = \lambda_e = pe' \\ t_{j-i} < \lambda_{e-i} \quad (1 \leq i \leq l) \end{cases}$$

が成立すれば、 $m \leq j + s - 1$ 。

Remark: 条件 i), ii) は次のようにもかける。

$$1) t_i \in f_k (S_i \notin k), t_i \in f_k \cup \{pe\} (S_i \in k).$$

$$2) t_i < e' \text{ なら、 } t_{i+1} = pt_i$$

$$\text{又は、 } t_{i+1} > pt_i \text{ かつ } \begin{cases} t_{i+1} \in f_k (S_i \notin k) \\ t_{i+1} \in f_k \cup \{pe\} (S_i \in k), \end{cases}$$

$$3) t_i \geq e' \text{ なら、 } t_{i+1} = t_i + e.$$

ここでは、局所類体論によって K に対応する norm の群 $N_{K/k} K^\times = M$ を具体的に 1 つ与えることによって上記定理の (K/k) の存在証明の別証明を与える。これは、 $S_i \notin k$ の場合、及び $S_i \in k$ かつ $\text{ord}_k(S_i - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ の場合に Murs を与えた証明の一般化である。

M を $k^\times$ の部分群、 K を M に対応する k 上の類体とする。このとき、 K/k が完全分岐な p^m 次巡回拡大で $t_1, \dots, t_m$ を分岐定数にもつための必要十分条件は

d) $k^\times / M$ は位数 p^m の巡回群である。

$$M_i = M k^{\times p^i} \quad (i=0, 1, \dots, m) \text{ とおく。}$$

$$e) \quad M_i \not\supset U^{t_i}, M_i \supset U^{t_{i+1}} \quad (i=1, \dots, m).$$

をみたすことである。従って定理の条件 i), ii), iii) をみたす $t_1, \dots, t_m$ に対して、d), e) をみたす M を構成すればよい。なお、条件 i), ii), iii) が必要であることは、d), e) および準同型 $\rho_t: U^t/U^{t+1} \rightarrow U^{p(t)}/U^{p(t)+1}$, $\rho_t(u U^{t+1}) = u^p U^{p(t)+1}$ の性質を用いて証明できる。

$$F = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in f_k, y = 1, \dots, f\} & (S_1 \notin k) \\ \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in f_k, y = 1, \dots, f\} \cup \{(pe', 1)\} & (S_1 \in k) \end{cases}$$

とおく。 $\mathbb{Z}_p$ -module U' の生成元 $\{\eta_{xy}\}_{(x,y) \in F}$ を

$$\begin{cases} \text{ord}_k(\eta_{xy} - 1) = x & \text{for } \forall (x, y) \in F, \\ \eta_{\lambda_i, 1} = \xi_i & \text{for } \lambda_i \neq \infty \text{ if } S_1 \in k, \end{cases}$$

をみたすようにとれば、

$$U' = \begin{cases} \prod_{(x,y) \in F} \eta_{xy}^{\mathbb{Z}_p} & (\text{直積}) \quad (S_1 \notin k) \\ \prod_{(x,y) \in F - \{(\lambda_\ell, 1)\}} \eta_{xy}^{\mathbb{Z}_p} \times \langle S_5 \rangle & (\text{直積}) \quad (S_1 \in k) \end{cases}$$

である。

$$F_0 = \begin{cases} f_k & S_1 \notin k \\ f_k \cup \{pe'\} & S_1 \in k \end{cases}$$

$$F_1 = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_r}\} = \{t_i \mid p(t_{i-1}) \neq t_i\}, i_1 < \dots < i_r$$

$$F_2 = \{\lambda_i \mid 0 \leq i \leq \ell, \lambda_i \neq \infty\}$$

とおく。 π を k の 1 つの素元とする。

(I) $f=1$ のとき

(A) $S_1 \notin k$ または $S_1 \in k$ かつ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ のとき

定理 1 今述べた条件の下で、

$$\alpha_z = \eta_{t_{i_z}, 1} \quad (z=1, \dots, r), \quad \beta_z = \alpha_1^{-p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2, \dots, r)$$

$$M = \langle k^{\times p^m}, \pi, \eta_{x_1} \quad (x \in F_0 - F_1), \beta_z \quad (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 M は条件 d), e) をみたす。

(B) $S_1 \in \mathcal{K}$ が $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ のとき

$E = \{z \mid t_{iz} \in F_1 \cap F_2\}$ とおく。 $t_{iz} = \lambda_i$ のとき、 $i = i(z)$ とかく

$\min \{i_z - i(z) \mid z \in E\}$ を与える z を $z_1 < \dots < z_v$ ($v \geq 1$) とする。

補題 1 $\{t_1, \dots, t_m\} \cap F_2 = F_1 \cap F_2$ 。

補題 2 条件

$$C(j'): \begin{cases} t_{j'-i} \leq \lambda_{\ell-i} & \text{for } 0 \leq i \leq \ell \text{ s.t. } j'-i \in \{i_z \mid z \in E\}, \\ \text{等号が少なくとも 1 か所で成立する。} \end{cases}$$

をみたすような $j' \leq i_r$ がただ 1 つ存在する。しかも上の等号

の個数は v に等しく、 $j' = \ell - i(z) + i_z$ 、但し、 z は $z_1, \dots, z_v$ の

いずれでもよい、で与えられる。

系 1 もし条件 $C(j)$ をみたす j が存在するなら $j = j'$ で $v = \text{odd}$ ($p=2$) または 1 ($p \neq 2$)。

系 2 補題 2 の j' に対して $C(j')$ が成り立たないならば、

$$0 \leq \exists h \leq \ell \text{ s.t. } \begin{cases} j'-h \notin \{i_z \mid z \in E\}, \ell-h \notin \{i(z) \mid z \in E\} \\ t_{j'-h} > \lambda_{\ell-h} \end{cases}$$

定理 2 条件 (B) の下で

(B-1) $v = \text{even} \geq 2$ ($p=2$)、 $v \geq 2$ ($p \neq 2$) のとき、

$a_z \in \mathbb{Z}$ ($z=1, \dots, r$) を

$$\begin{cases} a_z \not\equiv 0 \pmod{p}, a_1 = 1, a_z = 1 \text{ for } z \notin E, \\ \sum_{z \in E} a_z p^{i_z - 1 + \ell - i(z)} = 0 \end{cases}$$

をみたすようにとり、

$$\alpha_z = \eta_{t_{iz}, 1} \quad (z=1, \dots, r), \quad \beta_z = \alpha_1^{-a_z \cdot p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2, \dots, r)$$

$$M = \langle \mathbb{Z}^{\times p^m}, \pi, \eta_{x_1} (x \in F_0 - F_1), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 M は条件 d), e) をみたす。

(B-2) $v = \text{odd}$ ($p=2$), $v=1$ ($p \neq 2$) で条件 $C(\ell - i(z) + i_z)$ が成り立っているとき、

仮定より、 $\ell - i(z) + i_z + s - 1 \geq m$ である。このとき、 M を定理 1 と同様に定義すれば、 M は条件 d), e) をみたす。

(B-3) $v = \text{odd}$ ($p=2$), $v=1$ ($p \neq 2$) で条件 $C(\ell - i(z) + i_z)$ が成り立たないとき、

α_z, β_z を定理 1 と同様に定義し、系 2 の h を用いて、

$$\eta = \eta_{\lambda_{e-h}, 1} \alpha_1^{\sum_{z \in E} p^{i_z-1} + \ell - i(z) - h}$$

$$M = \langle \mathbb{Z}^{\times p^m}, \pi, \eta_{x_1} (x \in F_0 - F_1 - \{\lambda_{e-h}\}), \eta, \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 M は条件 d), e) をみたす。

(II) $f > 1$ のとき

定理 3 (A') $\lambda_e \neq pe'$ 又は $t_{ir} \neq pe'$ のとき、

$$F_3 = \begin{cases} \{(t_{iz}, f) \mid z=1, \dots, r\} & (t_{ir} \neq pe') \\ \{(t_{iz}, f) \mid z=1, \dots, r-1\} \cup \{(pe', 1)\} & (t_{ir} = pe') \end{cases}$$

$$\alpha_z = \eta_{t_{iz}, f} \quad (z=1, \dots, r-1), \quad \alpha_r = \begin{cases} \eta_{t_{ir}, f} & (t_{ir} \neq pe') \\ \eta_{pe', 1} & (t_{ir} = pe') \end{cases}$$

$$\beta_z = \alpha_1^{-p^{i_z-1}} \alpha_z \quad (z=2, \dots, r)$$

$$M = \langle k^{xpm}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_3), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 M は条件 d), e) をみたす。

(B') $t_{ir} = pe' = \lambda_e$ のとき

$$F_4 = \{(t_{iz}, 1) \mid z=1, \dots, r\} \text{ とおく。}$$

(B'-1) $1 \leq i \leq l$ に対し、 $t_{ir-i} \leq \lambda_{e-i}$ で等号の成り立つ i が少くとも 1 つあるとき

E を $f=1$ のときと同様に定義し、 α_z, β_z を定理 2 (B-1) のときと同様にとり、

$$M = \langle k^{xpm}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_4), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 M は条件 d), e) をみたす。

(B'-2) $1 \leq i \leq l$ に対し、 $t_{ir-i} < \lambda_{e-i}$ が成り立つとき

仮定より $i_r + s - 1 \geq m$ が成り立つ。 α_z, β_z を定理 2 (B-2) のようにとり、

$$M = \langle k^{xpm}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_4), \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 M は条件 d), e) をみたす。

(B'-3) $1 \leq h \leq l$ で $t_{ir-h} > \lambda_{e-h}$ なる h が存在するとき

α_z, β_z, η を定理 2 (B-3) のようにとり、

$$M = \langle k^{xpm}, \pi, \eta_{xy} ((x, y) \in F - F_4 - \{(t_{ir-h}, 1)\}), \eta, \beta_z (z=2, \dots, r) \rangle$$

とおけば、 M は条件 d), e) をみたす。

参 考 文 献

- [1] E. Maus, Existenz p -adischer Zahlkörper zu vorgegebenem Verzweigungsverhalten, Dissertation, Hamburg, 1965
- [2] H. Miki, 局所体の分岐定数について、第25回代数学シンポジウム, 1979. 8. 27-30, 北大.
- [3] H. Miki, On the ramification numbers of cyclic p -extensions over local fields, J. Reine Angew. Math., to appear.