

有限群の cohomology について

東京教育大 理 服 部 昭

G を有限群, M を G -加群とする. とくに断らなければ,
 $H^k(G, M)$ は modified cohomology を意味するものとする.
 従って $|G| = g$ とすれば $H^k(G, M)$ の各元 ξ は $g\xi = 0$
 をみたす. もし M が有限生成ならば, $H^k(G, M)$ は有限群
 である.

もしあらゆる整数 k と G のあらゆる部分群 H について
 $H^k(H, M) = 0$ が成り立つならば, M は cohomologically tri-
 vial であるという. たとえば M において $x \mapsto gx$ が自
 己同型をなせば, M は coh. trivial である. また $\{G, 1\}$ -
 射影的加群 M , とくに G -射影的加群も coh. trivial である.
 しかし cohomological triviality の問題として研究がはい
 められたのは, 一部分の k や H についての $H^k(H, M) = 0$
 から, すべての k , H についての $H^k(H, M) = 0$ を導き
 出すという問題であり, これは周知のように類体論の coho-

mology による記述に端を築いたものであるが、その研究の過程において M の射影性などのような intrinsic な性格との関連も明らかにされてきた。以下において既知の結果の解説を述べるが、ほとんど Serre [6], Uchida [5] によっている。従って証明も概略の説明に止める。

はじめに準備として、よく知られた次の3事項を挙げる：

(0.1) 次元操作： 任意の M に対し、 M', M'' でつぎをみたすものが存在する。

$$H^k(H, M) \cong H^{k+1}(H, M') \quad \forall k, \forall H \subset G,$$

$$H^k(H, M) \cong H^{k-1}(H, M'') \quad \forall k, \forall H \subset G.$$

(0.2) Hochschild - Serre の完全系列： $H \triangleleft G$ とする。もし $H^i(H, M) = 0, i = 1, \dots, k-1$ ならば、つぎの完全系列が成立する：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^k(G/H, M^H) &\xrightarrow{\text{infl}} H^k(G, M) \xrightarrow{\text{res}} H^k(H, M)^G \\ &\xrightarrow{\text{tg}} H^{k+1}(G/H, M^H) \xrightarrow{\text{infl}} H^{k+1}(G, M) \end{aligned}$$

(0.3) Herbrand 商： 巡回群 G の cohomology は周期 2 をもつ。 G -加群 M について

$$h(M) = H^0(G, M) \text{ の位数} / H^1(G, M) \text{ の位数}$$

とおくとき、つぎが成り立つ：

$$i) \quad 0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0 \text{ (完全)} \Rightarrow h(M_2) = h(M_1)h(M_3).$$

$$ii) \quad M \text{ 有限} \Rightarrow h(M) = 1.$$

§ 1 p -群

定理 1.1 ([4], [5]) G を p -群, M を有限 G -加群とすると,

$$\exists k: H^k(G, M) = 0 \Rightarrow M \text{ cohomologically trivial}$$

証明 位数についての帰納法. $|G| = p$ のときはよい. $k = 1$ としてよい (次元操作). $H \triangleleft G$ で $H \neq G, \neq 1$ なるものをとる. まず $0 \rightarrow H^1(G/H, M^H) \rightarrow H^1(G, M) = 0$ (完全) により $H^k(G/H, M^H) = 0$ ($\forall k$). したがって

$$0 = H^1(G, M) \rightarrow H^1(H, M)^G \rightarrow H^2(G/H, M^H) = 0 \text{ (完全)}$$

と $H^1(H, M)$ の元数が p の冪なることから, $H^1(H, M) = 0$. 従って $H^k(H, M) = 0$ ($\forall k$). G の真部分群は或る H に含まれるから, $H^k(K, M) = 0$ ($\forall k, \forall K \subsetneq G$). $k \geq 2$ についての $H^k(G, M) = 0$ は

$$0 \rightarrow H^k(G/H, M^H) \rightarrow H^k(G, M) \rightarrow H^k(H, M) = 0 \text{ (完全)}$$

から得られる. また $H^0(G/H, M^H) = 0$, $H^0(H, M) = 0$ から $H^0(G, M) = 0$. 次元操作をすれば上の方法で $H^{-1}(G, M) = 0$. 以下同様に $H^k(G, M) = 0$ ($k \leq 0$) !

例 ([5]) M が有限でないとき上の型の命題は成り立たない. p を奇素数, $|G| = p$, σ を G の生成元とする. $a_1, a_2, \dots$ を基底とする $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ -自由加群 M に G の作用を $\sigma a_i = a_i + p a_{i+1}$ によって定義すれば, $H^0(G, M) =$

0, $H^{-1}(G, M) \neq 0$.

命題 1.2 G を p -群, $pM = 0$ とする. もし $H_1(G, M) = 0$ ならば, M は $\mathbb{F}_p[G]$ -自由加群である.

証明 $I_G = \ker(Z[G] \rightarrow Z)$ とおく. $M/I_G M$ の $\mathbb{F}_p$ -基底 $\{u_i\}$ を lift した $\{a_i\}$ は M を生成する. よって $\mathbb{F}_p[G]$ -自由加群 L から $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ (完全) をつくるとき,

$$0 = H_1(G, M) \rightarrow H_0(G, K) \rightarrow H_0(G, L) \xrightarrow{\sim} H_0(G, M) \text{ (完全)}$$

よって $H_0(G, K) = 0$. I_G の冪零性から, $K = 0$!

系 1.3 G を p -群, $pM = 0$ とするとき, つぎの3性質は同値である.

a) $\exists k: H^k(G, M) = 0,$

b) M は cohomologically trivial,

c) M は $\mathbb{F}_p[G]$ -自由加群.

証明 a) $\Rightarrow$ c) を示せばよく, これは次元操作 $H^n(G, M) \cong H^{n-k-2}(G, M')$ により前命題に帰する !

定理 1.4 G を p -群, M を p -torsion-free とするとき, つぎの3性質は同値である.

a) $\exists k: H^k(G, M) = H^{k+1}(G, M) = 0,$

b) M は cohomologically trivial,

c) M/pM は $\mathbb{F}_p[G]$ -自由加群.

証明 $0 \rightarrow M \xrightarrow{p} M \rightarrow M/pM \rightarrow 0$ (完全) により

$$0 = H^k(G, M) \rightarrow H^k(G, M/pM) \rightarrow H^{k+1}(G, M) = 0 \text{ (完全)}$$

よって $H^k(G, M/pM) = 0$ となり, (1.3) により M/pM は

$F_p[G]$ -自由. したがって M/pM を $F_p[G]$ -自由とすれば, $F_p[H]$ -

自由でもある (H は G の任意の部分群). よって $H^k(H, M)$

$$\xrightarrow{p} H^k(H, M) \text{ は同型. よって } H^k(H, M) = 0 \text{ !}$$

命題 1.5 G, M は (1.4) に於ける性質を有するとする.

M がさらに $\mathbb{Z}$ -自由であれば, 任意の torsion-free G -module

N について, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ は cohomologically trivial.

証明 $0 \rightarrow \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{p} \text{Hom}(M, N) \rightarrow \text{Hom}(M, N/pN) \rightarrow 0$

は完全系列. ことに $\text{Hom}(M, N/pN) \cong \text{Hom}(M/pM, N/pN)$ で,

M/pM が $F_p[G]$ -free であるから $\text{Hom}(M/pM, N/pN)$ は

$\{G, 1\}$ -射影的で, 従って coh. trivial. よって前定理の

場合と同じように, $\text{Hom}(M, N)$ coh. trivial を得る !

予想 1. ∞ (淡中) G が p -群のとき,

$$\exists k \neq l \pmod{2} \quad H^k(G, M) = H^l(G, M) = 0$$

$$\Rightarrow M \text{ cohomologically trivial}$$

この予想は次の場合には正しい ([5]):

1) $l - k = 3$, M 有限生成.

2) G は 2 位の巡回群の直積.

§2 一般の有限群

以下において G は位数 g の有限群, $p|g$ と記すときの p は素数, G_p は G の Sylow p -部分群を表わすものとする.

定理 2.1 M が $\mathbb{Z}$ -自由のとき, 次の3性質は同値である.

$$a) \quad \forall p|g \exists k_p : H^{k_p}(G_p, M) = H^{k_p+1}(G_p, M) = 0,$$

b) M は cohomologically trivial,

c) M は $\mathbb{Z}[G]$ -projective.

証明 $a) \Rightarrow c)$ を示せばよい. 自由加群 L をもって,

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ (完全)} \text{ をとるとき,}$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, L) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M) \rightarrow 0 \text{ (完全)}$$

G_p, M, N に (1.5) を適用すれば, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ は G_p -coh. trivial. $p|g$ は任意だから, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ は G -coh. trivial. すると

$$\text{Hom}_G(M, L) \rightarrow \text{Hom}_G(M, M) \rightarrow H^1(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)) = 0 \text{ (完全)}$$

これは $L \rightarrow M \rightarrow 0$ が split することを示す。

定理 2.2 $\Rightarrow$ は同値である.

$$a) \quad \forall p|g \exists k_p : H^{k_p}(G_p, M) = H^{k_p+1}(G_p, M) = 0,$$

b) M は cohomologically trivial,

$$c) \quad dh_{\mathbb{Z}[G]} M < \infty,$$

$$d) \quad dh_{\mathbb{Z}[G]} M \leq 1.$$

証明 $c) \Rightarrow b)$ 仮定により有限射影分解

$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, (P_i 射影的) がある. P_i は coh. trivial であるから, cohomology 完全系列を用いて容易に M の coh. triviality がわかる.

a) $\Rightarrow$ d) 自由加群 L をもって $0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ (完全) をつくれば, N は $\mathbb{Z}$ -自由で, やはり a) と同様の性質をもつ. これには (2.1) が適用されるから, N は射影的である. ■

定理 2.3 (淡中, [5]) ある $k \not\equiv h \pmod{2}$ と G のすべての部分群 H について $H^k(H, M) = H^h(H, M) = 0$ とすれば, M は cohomologically trivial.

証明 位数に関する帰納法. G 巡回群のときはよい.

G が p -群でないければ, $\forall p \mid g$ について M は G_p -coh. trivial. よって G -coh. trivial. G が p -群 ($\neq 1$) のとき, 極大部分群 H をとる. $H^n(H, M) = 0$ ($\forall n$) であるから,

$$0 \rightarrow H^k(G/H, M^H) \rightarrow H^k(G, M) = 0 \quad (\text{完全})$$

$$0 \rightarrow H^{k+1}(G/H, M^H) \rightarrow H^{k+1}(G, M) \rightarrow H^{k+1}(H, M) = 0 \quad (\text{完全})$$

G/H は巡回群で, $h \equiv k+1 \pmod{2}$ であるから, $H^{k+1}(G/H, M^H) = 0$. よって $H^{k+1}(G, M) = 0$. これと $H^k(G, M) = 0$ とから M が coh. trivial なることが得られる. ■

上の定理の条件のうち, H は Sylow 群に限定してよいだろうというものが予想 1. ∞ である.

文 献

- [1] J.Tate, The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. Math. 56 (1952) 294-297.
- [2] T.Nakayama, On modules of trivial cohomology over a finite group, I. Ill. J. Math. 1 (1957) 36-43, II. Nagoya Math. J. 12 (1957) 171-176.
- [3] D.S.Rim, Modules over finite groups, Ann. Math. 69 (1959) 700-712.
- [4] W.Gaschütz, Kohomologische Trivialitäten und äussere Automorphismen von p -Gruppen, Math. Z. 88 (1965) 432-433.
- [5] K.Uchida, On Tannaka's conjecture on the cohomologically trivial modules, Proc. Jap. Acad. 41 (1965) 249-253.
- [6] J.-P.Serre, Corps locaux, Hermann, 1962.
- [7] S.Lang, Rapport sur la cohomologie des groupes, Benjamin, 1966.