

氏 名	う え だ か ず し 植 田 一 石
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2963 号
学位授与の日付	平 成 18 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Homological Mirror Symmetry for Toric del Pezzo Surfaces (トーリック del Pezzo 曲面に対するホモロジー的ミラー対称性)
論文調査委員	(主 査) 助教授 河 合 俊 哉 教 授 齋 藤 恭 司 教 授 柏 原 正 樹

論 文 内 容 の 要 旨

ミラー対称性(予想)とは超弦理論に由来する未だ全容が解明されていない数学的な現象であり, ある多様体の複素幾何学と別の多様体(ミラー多様体)のシンプレクティック幾何学の間に親密な関係があることを指す。元来はある Calabi-Yau 多様体とそのミラー多様体である別の Calabi-Yau 多様体の間に発見されたものであるが, トーリック Fano 多様体の場合にも「代数的トーラスとその上の正則関数の組」を「ミラー多様体」として適宜選べばミラー対称性が成立すると予想されている。ミラー対称性には様々なバージョンが存在するが, Kontsevich は1994年にホモロジー的ミラー対称性予想というものを提唱した。これは, 複素幾何学側では接続層の導来圏, シンプレクティック幾何学側では深谷圏(の導来圏)を考え, 両者が三角圏として同値であることを主張するものである。本論文はトーリック del Pezzo 曲面(= 2次元トーリック Fano 多様体)の場合にホモロジー的ミラー対称性を証明したものである。

$N = \mathbb{Z}^2$, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$ と置き, X を $N_{\mathbb{R}}$ の扇 Σ から決まるトーリック del Pezzo 曲面とする。 Σ の一次元錐の原始的な生成元の集合の凸包を Newton 多角形に持つ一般の2変数 Laurent 多項式 W を一つ選んで固定する。 W は $(\mathbb{C}^*)^2 = \text{Spec } \mathbb{C}[N]$ から $\mathbb{C}$ への正則関数を定める。Seidel の仕事により対象が W の消滅サイクルで, 射がそれらの間の Floer ホモロジーであるような A_{∞} 圏 $\mathfrak{H}^{\text{uf}} W$ が定まり, さらに twisted complex を考えることで, その導来圏 $D^b \mathfrak{H}^{\text{uf}} W$ を構成することができる。一方, X は代数多様体なので, 接続層の導来圏 $D^b \text{coh} X$ が定まる。

定理 トーリック del Pezzo 曲面 X とそのミラー $((\mathbb{C}^*)^2, W)$ に対して, 三角圏の同値

$$D^b \text{coh} X \cong D^b \mathfrak{H}^{\text{uf}} W$$

が存在する。

証明の要点は以下の通りである。左辺においては X が射影平面の点を中心とした爆裂を繰り返して得られことに注意して, Beilinson による射影平面上の接続層の導来圏の生成元に関する結果と, Orlov による爆裂による導来圏の振る舞いに関する結果を組み合わせ, 生成元を見つける。それらの間の射の計算は接続層のコホモロジーの計算に帰着する。右辺は, 定義より消滅サイクルで生成されており, それらの間の Floer ホモロジーの計算は W のファイバーが実2次元である特殊事情から具体的に三角形の張り方を調べることによって実行できる。両辺の生成元の間に対応をつけ, それらの間の射の構造を具体的に比較することにより証明が完成する。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

ミラー対称性とは一般にある多様体と別の「ミラー多様体」との間のフーリエ変換のような現象を指すが, 元々は多様体としてカラビ-ヤウ多様体の場合に発見され, その場合にはミラー多様体はまた別のカラビ-ヤウ多様体になる。トーリック

クファノ多様体の場合には「ミラー多様体」として「代数的トーラスとそのアフィン直線へのファイバー構造（射影を W と記す）の組」をとればよく、 W はファノ多様体の記述に用いたトーリック幾何のデータから容易に定まることが以前より良く知られている。

Kontsevich により提唱されたホモロジー的ミラー対称性予想とはある複素多様体の接続層の導来圏とそのミラー多様体に対して定まる深谷圏との間に三角圏としての同値関係が存在すると主張するものであった。この予想を具体例で検証しようとする二つの三角圏の明示的記述が必要となる。接続層の導来圏の構造を決めることは代数的問題であり、多くの場合に具体的結果が知られている。より困難なのは深谷圏の記述でありそのためにはフレアーホモロジーとその積構造を知る必要がある。これは擬正則円盤の数え上げ問題となり一般には難しい問題である。しかし、予想への試みや成功例は既にいくつかある。P. Seidel はトーリックファノ多様体の場合のホモロジー的ミラー対称性予想の証明のための数学的枠組みを整備し、具体的に射影曲面の場合に証明を与えた。射影平面上の接続層の導来圏に関しては Beilinson による結果が知られており、何も苦労は要しない。深谷圏の方も、実はこの場合 W のファイバーが複素 1 次元となり、擬正則円盤の数え上げ問題は三角形の張り方をみるだけでよく劇的に簡単になってしまう。その後、P. Seidel は 4 次曲面としての $K3$ 曲面に対してホモロジー的ミラー対称性予想の検証を行っているがこの場合はもっと事情が複雑である。

植田氏の結果はトーリック曲面である射影曲面の 3 点爆裂に対して P. Seidel による射影曲面の場合と同様な考察を遂行して予想を証明したものである。接続層の導来圏の構造に関しては Beilinson の結果に加えて爆裂による導来圏の振る舞いに関する Orlov の結果を使っており、容易である。深谷圏側ではやはり W のファイバーが複素 1 次元で三角形の張り方をみるだけでよいことが効いている。以上より明らかなように本論文の結果が非常に斬新である訳ではない。また、証明の過程において、非常に独創的なアイデアが現れているという訳でもない。しかしながら、ホモロジー的ミラー対称性の理解には多くのことが絡み合い、また具体例による検証はまだ十分豊富になされているとは言い難い。さらに、本論文のような具体的な計算においては、多くの手間を必要とするので、これらをまとめあげて最終的な結果に到達するには努力と力量が必要であったことは間違いない。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値のあるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。