

群の高次構造とその同伴ファイブレーション

— 高次群論とその幾何学 事始め —

高村茂 京都大学理学研究科数学教室

2023 年 6 月 15 日

概要

線形近似という言葉があるように、1 次部分は扱いやすく、高次部分は複雑で扱いにくい。しかし、複雑な方が豊かな世界が広がっていることはまある。たとえば、1 次式の理論である線形代数から、高次式を扱う代数幾何に移ると、多様な空間が現われ豊かな幾何が広がる。本稿では、群に対して「高次の対象」をまず導入し、そこからどのように・どのような“幾何”が生じるか解説する（注：古典的な群論の対象である“群の元”や“部分群・コセット”は、われわれの観点では 0 次と 1 次）。なお、本稿の内容は「群の高次構造の理論」の幾何的側面のごく一部である（群としてリー群をとると、より一層幾何的な設定になり、代数群をとると代数幾何的な設定になるが、これらには触れなかった）。また、幾何的側面以外にも別の側面（代数的、数論的、表現論的、組み合わせ的など）が広がっている。これらに関しては、稿を改めて論じたい。

1 序：背景と動機と紆余曲折と

群論の基本事項として、有限群 G の部分群の位数は G の位数 $|G|$ を割り切る、がある（ラグランジュの定理）。このことから、 G の真部分群の位数は $|G|/2$ を越えないことがわかる。学生の頃、これを知ったとき不思議な気がした—群論は、部分群を基にして理論を組み立てているが、それはあくまで $|G|/2$ 以下の部分の情報を反映しているだけで、残り半分の情報は打ち捨てられている。これは完全な理論ではないのではないか、と感じたことを憶えている。はたして、 $|G|/2$ 以下の部分だけがわかったとして、群が“完全に”わかったと言えるのだろうか。残り半分の部分の情報も取り込んだ、あるいは反映した理論があるのではないか、と当時おぼろげながら思ったものである。What is going on with the remaining half? 図 1 参照。

それ以来、折に触れてこの問題に立ち返ってきた（本業のリーマン面・代数曲線の族やモジュライ空間の研究 ([Ta5],[Ta7] など) のかたわら）。そして、群の「残り半分」を記述するのが、本稿で導入する“群の高次構造”ではないかと思うようになった。これは著者の手作り数学みたいなものであるが、その背景や哲学をざっくり説明していこう。

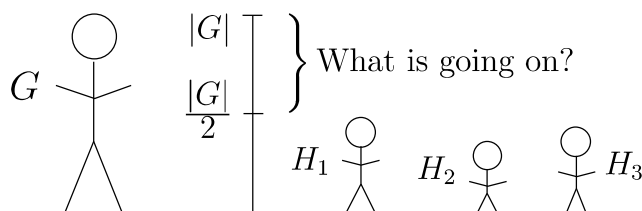


図 1: 真部分群 H_i の位数は高々 $\frac{|G|}{2}$ である. これを越えると群論の“空白地帯”である。

線形代数は1次の理論である（内積は2次式だが）。一方、多様体は曲がっているので高次の理論である。ただし、微分可能多様体の場合は、その上のモース関数の2次までの情報からその位相型が決定できる（モース理論）。対照的に、特異点の定義や描写には高次部分が入り込む。さて、われわれの観点では、古典的な群論は低次（2次以下）の理論である—群 G の元 a は0次（スカラー）、部分群 H やコセット aH は1次の対象、また両側コセット KaH は2次の対象。これらを「高次化」した n 次対象 ($n = 2, 3, 4, \dots$) として、部分群積（セクト） $H_1 H_2 \cdots H_n$ やコセット積（クラン） $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ を導入する。これらは G の部分集合として具体的に次で与えられる：

$$\begin{cases} H_1 H_2 \cdots H_n := \{h_1 h_2 \cdots h_n : h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}, \\ a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n := \{a_1 h_1 a_2 h_2 \cdots a_n h_n : h_i \in H_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}. \end{cases}$$

セクトやクランは、一般に非常に複雑である。これは群 G の性質を色濃く反映している証左とも言えようが、 n が大きくなると、セクトやクランを具体的に書き下そうとすると多大な計算を要する。

観察 セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ やクラン $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ は多項式 $x_1 x_2 \cdots x_n$ や係数入りの多項式 $c_1 x_1 c_2 x_2 \cdots c_n x_n$ のアナロジーに見えるが、多項式が「シンボル」（記号）であるのに対し、 $H_1 H_2 \cdots H_n$ や $a_1 H_1 a_2 H_2 \cdots a_n H_n$ は単なるシンボルではなく、内部構造をもつ—実際 G の部分集合である。それゆえ、シンボルのような機械的な取扱いができない—という点では厄介でもあるが、逆にそこに新たな発想が求められ面白味もでてくる。

有限群 G に対し、セクトやクランの位数は、（部分群の位数と違って） $|G|/2$ から $|G|$ の間を取り得る—そのようなセクトやクランは「古典的な群論の残り半分」の空白地帯に位置している。一般に、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ は n が大きくなるにつれ、位数が増大していき、 $|G|/2$ を越えて $|G|$ に近づいていく。

群 G の部分群 $H_1, H_2, \dots, H_n$ が生成する G の部分群 $\langle H_1, H_2, \dots, H_n \rangle$ は、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ とはまったく異なる。前者の元は、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の元たちの順序を気にしない積であるのに対し、後者の元は、順序付けられた積 $h_1 h_2 \cdots h_n$ である。

つまり $H_1 H_2 \cdots H_n$ は、きめ細かい情報（順序積情報）だけを抽出している。また、 $\langle H_1, H_2, \dots, H_n \rangle$ は古典的な群論の範疇に収まるが（部分群ゆえ）、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ は、古典的な群論の範疇には収まらない。単純化して言えば、

$$\text{高次群論} = \text{古典群論} + \text{順序積情報}.$$

部分群たちのなすポセット（半順序集合：半順序は包含関係で定義）のハッセ図は、有限群論で活躍する（ガロア理論でもおなじみである）。セクトのなすポセットに対しても同様にハッセ図を考えることができる。これにより、群の中にセクトたちがどのように分布しているか一目瞭然である。たとえば、 G が二面体群 D_4 （位数は8）のとき、セクト・ポセットのハッセ図は図2のとおりである。位数が $\frac{|D_8|}{2} (= 4)$ を越えるものがたくさんある。

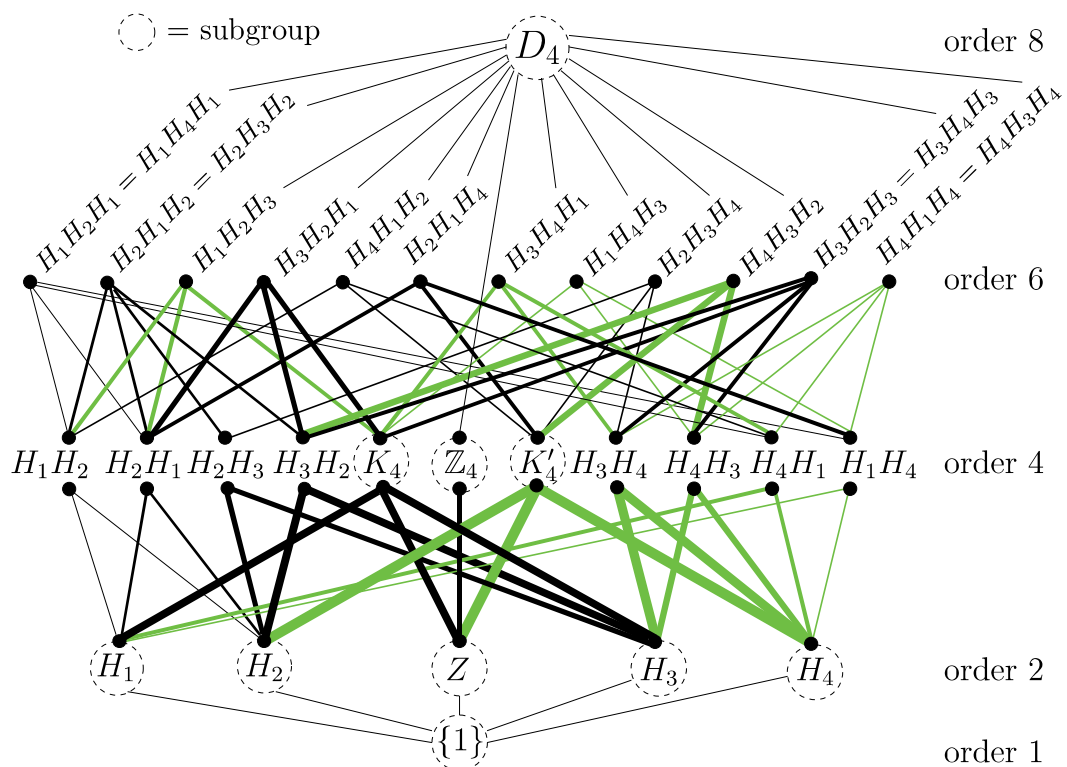


図2: D_4 のセクト・ポセットのハッセ図: $Z (\cong \mathbb{Z}_2)$ は D_4 の中心, H_1, H_2, H_3, H_4 はそれ以外の $\mathbb{Z}_2$ であり, K_4 と K_4' はクライン四元群 ($\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). 注: スペースの都合上 K_4 や K_4' を分解するセクトは描いていない。これらは $K_4 = H_1 H_3 = H_3 H_1 = Z H_1 = H_1 Z = Z H_3 = H_3 Z$ および $K_4' = H_2 H_4 = H_4 H_2 = Z H_2 = H_2 Z = Z H_4 = H_4 Z$.

群の高次構造の立場から、セクト・ポセットは重要な研究対象である（たとえば、それから作られる単体複体の代数トポロジー的な性質など）。しかし本稿では、群の高次構造の別の側面を概説するのが目標なので、これ以上立ち入らない。さて、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ や

クラン $a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n$ は形式的には多項式みたいなものだが（係数が群の元で、変数が部分群）である。しかし、多項式 $x_1x_2\cdots x_n$ は単にシンボル（記号）で「内部構造」がないのに対し、セクトやクランには内部構造があるので、単なるシンボルとして扱うことができず、「積」 $H_1H_2\cdots H_n$ や $a_1H_1a_2H_2\cdots a_nH_n$ を計算するにも多大な労力を要する。こういったことが、今まで考察の対象とすることを阻んでいたのであろう。とくに群が非可換な場合、計算機を使っても、計算の壁は依然として高い。こういう極度に複雑なものから意味のある数学を創り出すためには、発想の転換が必要である。そこで、根源的に

そもそも内部構造をもつ「多項式もどき」の幾何はどうあるべきか

をまず考えてみる。そして、これのヒントとなるよい問題設定を模索しよう。以下では議論を簡単にするため、セクトに絞って話を進める。代数幾何との対比で思索を進めていく。多項式自体は図形ではなく、単にシンボルであり、その零点集合として図形が「後天的に」定まる（一方、セクト $H_1H_2\cdots H_n$ はそれ自体、すでに図形である（内部構造を持つ））。代数多様体よりも一般的なスキームでは、可換環から図形を作り出す—素イデアル全体の集合にザリスキ位相を入れて位相空間を作る。ただし、「幾何」を展開するためには、位相空間を作っただけでは不十分で、その“上部構造”、つまりその上の関数のなす構造層も考える。これにより理論がグッと豊かになる（層コホモロジーが定義される）。このように空間上に構造層も込めて考えたものを「環付き空間」というが、これが代数幾何を展開するための基本設定である。翻ってみると、セクト $H_1H_2\cdots H_n$ には“上部構造”に当たるものが、アприオリにはない。

セクトに対し、構造層に相当するような基盤的役割を果たすものはないのだろうか。あるとすれば、それはどういったものだろうか。

これは雲をつかむような問いなので、“地に足のついた”具体的な問題をまず設定して、それを通じて思索を進めていきたい。そのため、しばし歴史をさかのぼる。代数幾何の現代的発展のもとになった動機のひとつは、有限体上で定義された代数多様体に対してもオイラー数などの位相不変量を定義したい、というものだった。位相幾何学ではオイラー数はベッチ数の交代和で与えられることを念頭に置いて、有限体上で定義された代数多様体に対しても（コ）ホモロジー理論を打ち立てようというのが、グロタンディークによるスキーム論建設の原動力であった。

では、群の高次構造の場合、「オイラー数」に相当するものは何だろうか？

われわれは、それはセクトの「位数」（元の個数）であると考え（セクトが有限な場合）。すると、次のような“地に足のついた”疑問が自然に湧いてくる。セクトの位数 $|H_1H_2\cdots H_n|$ ($n \geq 2$) はどのように決まるのだろうか。何か法則はあるのであろうか。 n が大きくなるに

つれて、 $|H_1 H_2 \cdots H_n|$ は複雑な挙動をするようになるが、なぜなのか。われわれは、これを直接計算で説明しようとはしない——計算の渦に巻き込まれて、「因^よって来たところ」がなかなか見えてこないため。その代わり、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ 上の“ファイブレーション”

$$\pi: H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \longrightarrow H_1 H_2 \cdots H_n, \quad \pi(h_1, h_2, \dots, h_n) = h_1 h_2 \cdots h_n$$

を導入し、これを経由して理解しようという方針をとる（問題設定の幾何学化）。

ファイブレーションという用語は、いろいろな分野（代数トポロジー、代数幾何、微分トポロジーなど）で違った意味で使われている。ここでは、代数幾何で使われている、楕円ファイブレーション（たとえば楕円曲面）やレフシェッツ・ファイブレーションを意識して、とりあえず“ファイブレーション”と呼んだ——われわれは π のファイバーの記述やその挙動の描写に関心があるので。

正式には、“ファイブレーション” $\pi: H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ を**相乗**、すなわち**シナジー**と呼ぶことにする。

辞書を引くと「相乗」は次のような意味なので、ぴったりくる。

- 1) 2 個以上の数を掛け合わせる。また、その積。
- 2) 複数の要因 (factor) が相互に働き合って、掛け合わせたほどの大きさになること。

補足 ベクトル束の理論を知っている人から見ると、シナジーは全空間が直積 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ なので、自明束みたいなものか、と思ってしまうかもしれないが、さにあらず。自明束と違って、写像 π は一般にとっても複雑である。

シナジーの構造は $|H_1 H_2 \cdots H_n|$ と関係する。たとえば、最も簡単な $n = 2$ のとき、シナジー $\pi: H_1 \times H_2 \rightarrow H_1 H_2$ の任意のファイバー $\pi^{-1}(x)$ ($x \in H_1 H_2$) は（集合として） $H_1 \cap H_2$ に同型であり——つまり $H_1 \cap H_2$ 束——、 $H_1 H_2$ は $H_1 \times H_2$ を $H_1 \cap H_2$ で割って得られる商になっている（補題 2.1）：

$$H_1 H_2 \cong (H_1 \times H_2) / (H_1 \cap H_2).$$

このことから、 $H_1 H_2$ が有限のときは、 $|H_1 H_2| = |H_1| |H_2| / |H_1 \cap H_2|$ が成り立つことがわかる。（注：セクトの位数は、セクトが有限でないと定義されないが、シナジーはセクトが有限かどうかに関わらず定義される。）

$n = 2$ のときはシナジの構造は簡明であるが—すべてのファイバーは同型—、 $n \geq 3$ のときは一般に複雑であり、ファイバー $\pi^{-1}(x)$ ($x \in H_1 H_2 \cdots H_n$) は x とともにダイナミックスに変化する—退化現象などが起こる。この事実は $|H_1 H_2 \cdots H_n|$ の「複雑さ」と密接に関係する。また、 $h_1 h_2 \cdots h_n \in H_1 H_2 \cdots H_n$ 上のファイバーは、表示 $h_1 h_2 \cdots h_n = k_1 k_2 \cdots k_n$ ($(k_1, k_2, \dots, k_n) \in H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$) 全体からなることに注意する。これは“語の表示”(代数) が“ファイバー”(幾何) に翻訳されることを意味する。

シナジのファイバー $\pi^{-1}(x)$ ($x \in H_1 H_2 \cdots H_n$) のダイナミズム—パラメータ x を動かしたときの変動—は、群 G の(古典的な群論がカバーしない)構造を幾何的に捉えている。

群 G の部分群 $H_1, H_2, \dots, H_n$ に対するシナジ $\pi: H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ は、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の群構造だけでは定まらない。 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の G の中への入り方—いかに埋め込まれているか—に依存する。もし $H_1, H_2, \dots, H_n$ が別の群 G' の部分群にもなっている場合、それに対するシナジ $\pi': H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ は、一般に π とは異なる。つまり、シナジは、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の内的構造だけでなく、外的構造 (G への埋め込まれ方) を反映している。

また、シナジのファイバーは単なる集合ではなく、その点のあいだの「相互関係」が規定され、ネットワーク状になっている—正確に言うと、**亜群** (groupoid) の構造をもつ (§4 で構成)。とくに、群 G が有限の場合、アプリオリにはシナジのファイバーは単なる有限集合であるが、亜群構造が入って、特殊なグラフの頂点集合とみなせる。このことは、有限体上で定義された代数多様体が単なる有限集合ではなく、ザリスキ位相により位相空間になることと現象的に似ている—どちらも「集合」から「幾何的対象」に昇格する。

以上のことを鑑みると、シナジは代数多様体の構造層のような“基盤的役割”を果たすものと期待される。実際、われわれはシナジをセクトの「上部構造」とみなし、これを起点として理論を組み立てていく。

対照表は次ページ

代数幾何	「高次」群論
射影空間 $\mathbb{P}^n$	群 G
$\mathbb{P}^n$ の代数多様体 X	G のセクト $H_1 H_2 \cdots H_n$
構造層 $\mathcal{O}_X \rightarrow X$	シナジー (相乗) $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$
オイラー数 $\chi(X)$	位数 $ H_1 H_2 \cdots H_n $
X のザリスキ位相	$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ 上のシナジー亜群 (§4 参照)

強調しておく、シナジーは古典的な群論では定義されず、群の高次構造を考えて初めて定義される概念である。この観点からは次の対応がある：

古典的な代数幾何	古典的な群論
現代的な代数幾何 (スキーム論)	「高次」群論
スキーム (環付き空間)	シナジー
$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)} \rightarrow \mathrm{Spec}(R), (R: \text{可換環})$	$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$

上の対照表は、あくまで一つの見方であって、必要に応じて別の見方をすることもある。たとえば、次のような対照を念頭に置くことも。(一つの見方にこだわりすぎると、思考の柔軟性を失いがちである。)

特異点論	「高次」群論
代数多様体 X	セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$
X の特異点解消 $\widehat{X} \rightarrow X$	シナジー $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ ($H_1 H_2 \cdots H_n$ の ‘特異点解消’)
X の正規化 $X_\nu \rightarrow X$ (X_ν は正規特異点のみもつ)	代数的簡約化 $H_1 * H_2 * \cdots * H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ (ここで $H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ はプレセクト。§2 参照)
X_ν の特異点解消 $\widehat{X} \rightarrow X_\nu$	幾何的簡約化 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ (§2 参照)
特異点解消の分解 $\widehat{X} \rightarrow X_\nu \rightarrow X$	シナジーの分解 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 * H_2 * \cdots * H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$

古典群論から高次群論への道程

* 研究での体験談や失敗談を残しておくことは、他の研究者や学生さんの参考になるかもしれないので、“個人的振り返り”を記しておく。

群の高次構造の理論が「まだ形になる前」の段階で、

“何を研究対象とすべきか”、そして “どういう視点で研究すべきか”

を手探りで模索し、「次第に形をなす」ところまで、著者の“思索の跡”をこれまで述べてきた。このあと迷界を脱し、「はっきりと形をなす」段階へ向かっていくのだが、それは概念系の創出およびそれとセットになった用語系と記号系の確立を迫られることでもあった（これはこれで大変なのだが、明確にステージが変わった気がしたものである）。

振り返ってみれば、

(*) 「群の世界に“ファイブレーション”（シナジー）を導入し、そのファイバーの記述やファイバーの挙動の描写を考察の中心に据える」（幾何学化）

という着想がターニングポイントであった。それ以前には、部分群ポセットの“自然な一般化”としてのセクト・ポセットにフォーカスしていたが、具体例を調べるのさえけっこう大変であった。ここで、“自然な一般化”というのが^{くせもの}曲者で、“自然な一般化”だからといって、必ずしも“自然な対象”であるとはいいきれない。セクト・ポセット自体の重要性は明らかではあるが、“より根幹的”あるいは“より本質的”な対象で「古典群論にはなく、高次群論にはある対象（しかも古典群論の対象の一般化ではないもの）」が存在するのではないか、と次第に思うようになった。それを模索して辿った道筋は、これまで述べてきた通りである。

シナジーは古典的な群論では定義されず、群の高次構造を考えて初めて定義される概念なので、古典群論と高次群論をわかつ分水嶺となっている。

シナジーは非常にシンプルな概念であるが、シンプルであるがゆえに、潜在力（ポテンシャル）を秘めていると思われる。

一見すると、上の着想(*)はそれまでの著者の本業（リーマン面・代数曲線の退化族や分裂族、モジュライ空間、商族）の研究が活かされているように思えるが、それは hindsight（後知恵）で、この方向性に気づくのは長きにわたった紆余曲折のあとであった—灯台下暗し。しかしながら、かつて手作りで理論を作った経験（リーマン面の退化の分裂族の理論, [Ta7]）は、理論の組み立ての肝がどこにあるのかを見抜くのに役立った—あくまで経験が役立ったわけで、知識が直接的に役立ったわけではない。

群の高次構造の理論の perspective

群の高次構造の全体像としてさまざまな側面をまとめておく。

1. 幾何的側面： シナジー $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ の構造（本稿で解説; 詳しくは [Ta2]）。この側面は、いわば“ゲージ理論的”である。（一方、グロモフらにより発展した幾何学的群論は、双曲幾何や負曲率多様体論の流れである。）
2. ガロア理論的側面： セクトを modify した“プレセクト”（セクトより扱いやすい）を使って展開。部分群ポセットの中の updown パスと組み合わせて記述。
3. 表現論的側面： クランを modify した“プレ克蘭”を使って展開。誘導表現論の球関数に対する“解析接続”の構成など。（誘導表現に関しては、たとえば [小林・大島], [西山], [BrtD] 参照。）
4. 組み合わせ的側面： セクト・ポセットから作られる単体複体の代数トポロジー的性質。
5. 数論的側面： 群 G のセクトへの分解 $G = H_1 H_2 \cdots H_n$ のうち、それ以上分解できないものを素因子分解という。任意の有限群が（高々有限通りの）素因子分解をもつことや、素因子分解が一意的である有限群の分類定理などを [Ta1] で示した。
6. さらなる幾何的側面： 本稿では一般的な群 G で論じるが、 G としてリー群を取ると、諸々の構成が“より幾何的”になる。たとえば、本稿では単に「集合」であるものが「多様体」や「等質空間」になる、など。また、 G として代数群を取ると、諸々の構成が代数幾何的になる。

序の最後に 群の高次構造から、群の新たな知見が得られるのか？という問いには、まだ高次構造の理論が発展途上なので何とも言えない、というのが当たり障りのない答えであるが、実際は次のように考えている。代数幾何（高次式）は線形代数（1次式）の延長上にあるが、だからと言って代数幾何の研究から「線形代数の新たな知見を得る」という動機で研究する人はまずいないと思う。問題意識もまったく別であるし、方法論も違うのは周知の通り。私見では、古典的な群論とは別に、群の高次構造の世界——高次群論 (higher group theory)——が広がっており（両者は深く関係はするが）、後者は後者として独立した興味の対象でいいのではないかと思っている。

2 語 (word) の簡約からシナジーの幾何的簡約へ

以降は、[Ta2] のおおまかな解説である（厳密な説明よりもわかりやすさを優先している）。

群 G の部分群 $H_1, H_2, \dots, H_n$ に対し、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ を考える。シナジー（相乗） $\pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ は $\pi(h_1, h_2, \dots, h_n) = h_1 h_2 \cdots h_n$ で与えられる。これは $H_1, H_2, \dots, H_n$ の G の中への入り方に依存し、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ の抽象的な群構造だけでは決まらない（実際、積 $h_1 h_2 \cdots h_n$ は G での積である）。したがって、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ がさらに別の群 G' の部分群になっている場合、これに対するシナジー $\pi' : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ は、一般に π とは異なる。

補足しておく、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ は“順序付けられた積”なので、積の順序を変えるとセクトも変化する。つまり、 $\{1, 2, \dots, n\}$ の置換 σ に対し、一般に $H_1 H_2 \cdots H_n \neq H_{\sigma(1)} H_{\sigma(2)} \cdots H_{\sigma(n)}$ である（ G の部分集合として）。実際、 G が有限群の場合、 $|H_1 H_2 \cdots H_n| \neq |H_{\sigma(1)} H_{\sigma(2)} \cdots H_{\sigma(n)}|$ となることもある。一方、直積群 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ は順序を変えても同型である：

$$H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \cong H_{\sigma(1)} \times H_{\sigma(2)} \times \cdots \times H_{\sigma(n)}.$$

一般に $H_1 H_2 \cdots H_n \neq H_{\sigma(1)} H_{\sigma(2)} \cdots H_{\sigma(n)}$ なので、2 つのシナジー

$$\begin{cases} H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \longrightarrow H_1 H_2 \cdots H_n, \\ H_{\sigma(1)} \times H_{\sigma(2)} \times \cdots \times H_{\sigma(n)} \longrightarrow H_{\sigma(1)} H_{\sigma(2)} \cdots H_{\sigma(n)} \end{cases}$$

は一般に異なる。

さて、シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ をどのように描写したらよいのだろうか。まずは、最も簡単な $n = 2$ のときを考える。このとき、次が成り立つ。

補題 2.1. シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \rightarrow H_1 H_2$ は、 $H_1 \times H_2$ への群 $H_1 \cap H_2$ の作用

$(h_1, h_2) \mapsto (h_1 \alpha, \alpha^{-1} h_2)$, $\alpha \in H_1 \cap H_2$ の商写像になっている。したがって、

- π の任意のファイバーは $H_1 \cap H_2$ に（集合として）同型である。
- $H_1 H_2$ は群作用の商： $H_1 H_2 = (H_1 \times H_2) / (H_1 \cap H_2)$ 。

（ここで、 $H_1 \cap H_2$ は、 H_1 と H_2 の抽象的な群構造（内的構造）からは決まらず、 G の中への H_1 と H_2 の入り方（外的構造）に依存していることに注意。）

証明. 2 点 $(h_1, h_2), (h'_1, h'_2) \in H_1 \times H_2$ が、 π により同じ点にうつるのは（つまり同じファイバー上にあるのは）、 $h_1 h_2 = h'_1 h'_2$ のときである。これが成り立つのはどういうときか考えてみる。書き直すと $h_1^{-1} h'_1 = h_2 h'_2^{-1}$ 。ここで $h_1^{-1} h'_1 \in H_1$, $h_2 h'_2^{-1} \in H_2$ ゆえ $h_1^{-1} h'_1 = h_2 h'_2^{-1} \in H_1 \cap H_2$ である。 $H_1 \cap H_2$ のこの元を α と表すと、 $h'_1 = h_1 \alpha$, $h'_2 = \alpha^{-1} h_2$ 。すなわち $(h'_1, h'_2) = (h_1 \alpha, \alpha^{-1} h_2)$ である。逆にこのとき $h'_1 h'_2 = h_1 \alpha \cdot \alpha^{-1} h_2 = h_1 h_2$ である。したがって

$$\begin{aligned} (h_1, h_2), (h'_1, h'_2) \in H_1 \times H_2 \text{ が } \pi \text{ により同じ点にうつる} \\ \iff (h'_1, h'_2) = (h_1 \alpha, \alpha^{-1} h_2), \exists \alpha \in H_1 \cap H_2. \end{aligned}$$

よって、シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \rightarrow H_1 H_2$ は、 $H_1 \times H_2$ への群作用 $(h_1, h_2) \mapsto (h_1 \alpha, \alpha^{-1} h_2)$, $\alpha \in H_1 \cap H_2$ の商写像になっている。□

観察 上の証明で出てきた等式 $h_1 \alpha \cdot \alpha^{-1} h_2 = h_1 h_2$ は自由群の語 (word) の簡約操作に似ている—思い出しておくと、簡約操作とは、自由群 F の語が $x_1 x_2 \cdots x_n y y^{-1} x_{n+1} \cdots x_m$ ($x_i, y \in F$) のように冗長な部分 $y y^{-1}$ を含んでいれば、それを除去すること [近藤] p.134, [HEO] p.35. この操作の観点からは $H_1 \times H_2$ の $H_1 \cap H_2$ 作用による商 $(H_1 \times H_2)/(H_1 \cap H_2)$ であるセクト $H_1 H_2$ は“幾何的な簡約化”とみなせる。これを $n \geq 3$ のときに拡張することを考える。

まず、セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ に対し、直積群 $\Gamma := (H_1 \cap H_2) \times (H_2 \cap H_3) \times \cdots \times (H_{n-1} \cap H_n)$ を交差群 (intersection group) という。これの元 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in \Gamma$ (ここで $\alpha_i \in H_i \cap H_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$)) に対し、 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ の自己同型写像

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto (h_1 \alpha_1, \alpha_1^{-1} h_2 \alpha_2, \alpha_2^{-1} h_3 \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}^{-1} h_{n-1} \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}^{-1} h_n)$$

を共鳴変換 (resonant transformation あるいは resonator) という—隣り合う α_i, α_i^{-1} ($i = 1, 2, \dots, n-1$) たちが「互いに共鳴するかのよう」に見えるので。このとき、

定義 2.2. 2つの元

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) \text{ と } (h_1 \alpha_1, \alpha_1^{-1} h_2 \alpha_2, \alpha_2^{-1} h_3 \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}^{-1} h_{n-1} \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1}^{-1} h_n)$$

は共鳴している (resonant) という。(これは「 h と $\alpha^{-1} h \alpha$ が共役」の一般化ともみなせる。)

次も導入しておく。

定義 2.3. (1) 交差群 Γ の各元を $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ へ共鳴変換で作用させることにより定まる Γ の $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ への群作用を共鳴群作用 (resonant group action) という—このため、交差群 Γ を共鳴群 (resonant group) ということもある。

(2) 商 $(H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n)/\Gamma$ をプレセクト (presect) といい、 $H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ と表す。商写像 $\eta : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ を幾何的簡約化 (geometric reduction) という。(注：下の図式で、プレセクトはセクトの“前”に現われるので、「プレ」。)

比較 2.4. 自由群の語の簡約化は $y y^{-1}$ の形の部分を「除去」するのに対し、われわれの幾何的簡約化では、 α_i, α_i^{-1} などを「挿入」してから割る、という点で異なる。

シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ は、幾何的簡約化と“残りの部分”である代数的簡約化 (algebraic reduction) の合成に分解される (下の図式参照)。共鳴群作用

は自由な作用なので、幾何的簡約化はいわば「非分岐ガロア被覆」である。一方、代数的簡約化は、代数幾何における「代数多様体の正規化」の対応物と考えられる。

$$\begin{array}{ccc}
 H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n & & \\
 \downarrow \text{シナジー: } \pi & \searrow \eta: \text{幾何的簡約化 ('非分岐ガロア被覆')} & \\
 & H_1 * H_2 * \cdots * H_n: \text{プレセクト} & \\
 & \swarrow \nu: \text{代数的簡約化 ('セクトの正規化')} & \\
 H_1 H_2 \cdots H_n. & &
 \end{array}$$

補足 2.5. G としてリー群を取り、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ をその閉部分群にとると、“より幾何的”な設定になる。実際、このときプレセクト $H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ は等質空間である。

幾何的簡約化は、群作用による商なのでわかりやすい。一方、代数的簡約化は難しい。 $n = 2$ の場合は、代数的簡約化 $\nu: H_1 * H_2 \rightarrow H_1 H_2$ は自明（つまり同型写像）なので、シナジーは幾何的簡約化と一致し、話が簡単である。しかし、 $n \geq 3$ の場合は、代数的簡約化は一般に自明ではなく、シナジーの難しい部分はこの部分に集中する。

比較 2.6. セクト $H_1 H_2 \cdots H_n$ には G の関係式が反映していて、セクトの構造を複雑にする要因になっている。これに対し、プレセクト $H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ にはマイルドな関係式だけしか反映していないので（たとえば $n = 2$ のときは $h_1 h_2 = h_1 \alpha \cdot \alpha^{-1} h_2$, $\alpha \in H_1 \cap H_2$ ）、構造が簡単で扱いやすい。

プレセクト $H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ は、部分群たち $H_1, H_2, \dots, H_n$ を「つなげて」得られたものともみなせる—直感的に言うと、共鳴作用で割るということは、隣り合う H_i と H_{i+1} を $H_i \cap H_{i+1}$ に沿って同一視することである。これは、多様体が開集合系を貼り合わせて得られることと似ていて、プレセクトが「幾何的な存在」であることを強くうかがわせる。また、2つのプレセクト $H_1 * H_2 * \cdots * H_n$ と $K_1 * K_2 * \cdots * K_m$ を「つなげて」プレセクト $H_1 * H_2 * \cdots * H_n * K_1 * K_2 * \cdots * K_m$ を作れることにも注意。

補足 2.7. クランに対しても、その「プレ化」であるプレクランを考えることができる。これは、両側コセットを「つなげて」構成される。プレクランは表現論に応用を持つ（球関数の“解析接続”の構成など）。

3 シナジーの構造定理

$n \geq 3$ のとき、シナジー（相乗） $\pi: H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ は、 $n = 2$ のとき（共鳴作用による商写像）とはまったく異なる様相を呈する。 $n = 2$ のときはすべてのファイバーは同型であるが（補題 2.1）、 $n \geq 3$ のときは一般にそうではない。

例 3.1. (位数8の) 二面体群 $D_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = e, bab^{-1} = a^3 \rangle$ の、位数2の巡回部分群 $H_1 := \langle b \rangle, H_2 := \langle ab \rangle, H_3 := \langle a^2b \rangle$ を取る. このときシナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ のファイバーは、一点あるいは二点の2通りの場合がある (図3 参照)。

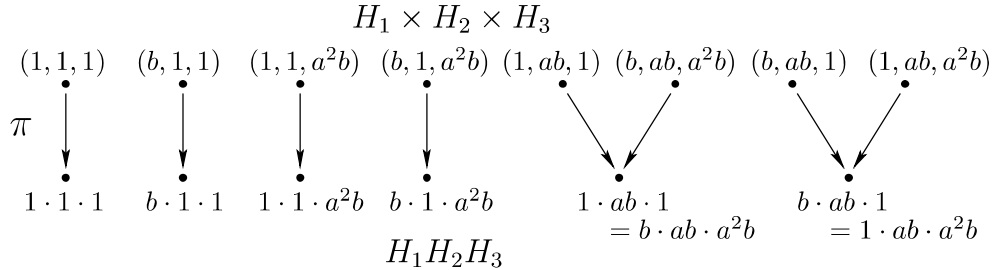


図 3: $H_1 \times H_2 \times H_3$ の8つの点のうち、4つの点に対しては π は1対1、残りの4つの点 (2つの点の2組) に対しては、2対1になっている。

以下では、議論をはっきりさせるため、まず、 $n = 3$ のときを説明する。あとで見るように、実は、シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ の構造は、2つのセクトの交点 $t \in H_1 H_2 \cap H_2 H_3$ と関係する (§5)。

余談 ベズーの定理：2つの平面代数曲線 $f(x, y) = 0$ と $g(x, y) = 0$ の交点数の総和は、“各交点での重複度も込めて” 次数の積 $\deg(f) \deg(g)$ で与えられる。しかし、彼の証明は直感的であったため、厳密な証明および“各交点での重複度”の正確な定式化が探求され、現代的な代数幾何の交点理論の発展を促した。 高次群論においても、理論の萌芽に“交点”が関わってくるのは興味深い。

用語 以下では簡単のため、“シナジー π の同じファイバー上にある”ということを同ファイバー的 (isofibric) ということにする。

2つの点 $(k_1, k_2, k_3), (h_1, h_2, h_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ が同ファイバー的であるための条件 $k_1 k_2 k_3 = h_1 h_2 h_3$ を幾何的に言い換える。まず、 $(h_1^{-1} k_1) k_2 = h_2 (h_3 k_3^{-1})$ と書き直す。ここで $\sigma := h_1^{-1} k_1 (\in H_1), \tau := h_3 k_3^{-1} (\in H_3)$ とおくと、 $\sigma k_2 = h_2 \tau$. 書き直して、 $k_2 = \sigma^{-1} h_2 \tau$. また、 $k_1 = h_1 \sigma, k_3 = \tau^{-1} h_3$ である。まとめて書くと

$$(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3).$$

逆にこのとき、 $(k_1, k_2, k_3), (h_1, h_2, h_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ は同ファイバー的である。実際、 $k_1 k_2 k_3 = h_1 \sigma \cdot \sigma^{-1} h_2 \tau \cdot \tau^{-1} h_3 = h_1 h_2 h_3$. よって次がわかった：

命題 3.2. $(k_1, k_2, k_3), (h_1, h_2, h_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ が同ファイバー的

$$\iff (k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3) \text{ をみたす } \sigma \in H_1, \tau \in H_3 \text{ が存在する。}$$

上の結果を念頭に置いて、次の概念を導入する：

定義 3.3. 2点 $(k_1, k_2, k_3), (h_1, h_2, h_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ に対し、

$$(k_1, k_2, k_3) = (h_1\sigma, \sigma^{-1}h_2\tau, \tau^{-1}h_3), \quad \exists \sigma \in H_1, \exists \tau \in H_3$$

が成り立っていれば、 (k_1, k_2, k_3) と (h_1, h_2, h_3) は**擬共鳴している** (pseudo-resonant) という。注：これは定義 2.2 で導入した「共鳴」の一般化である ($\sigma \in H_1 \cap H_2, \tau \in H_2 \cap H_3$ のときが共鳴)。

「擬共鳴」を使って命題 3.2 を言い換えると、

命題 3.4. $H_1 \times H_2 \times H_3$ の 2 点が同ファイバー的であることと擬共鳴であることは同値である。

定義 3.5. (1) 2つの元 $h_2, k_2 \in H_2$ に対し、 $k_2 = \sigma^{-1}h_2\tau$ を満たす $\sigma \in H_1, \tau \in H_3$ が存在するとき、 h_2 と k_2 は**双役** (bijugate) という。cf. 共役 (conjugate)。

(2) $h_2 \in H_2$ に対し、 $\sigma^{-1}h_2\tau \in H_2$ を満たす $(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3$ を h_2 の**双役子** (bijugator) という。

2点 $(k_1, k_2, k_3), (h_1, h_2, h_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ が同ファイバー的であることと同値な、命題 3.2 の条件 $(k_1, k_2, k_3) = (h_1\sigma, \sigma^{-1}h_2\tau, \tau^{-1}h_3)$ ($\exists \sigma \in H_1, \exists \tau \in H_3$) を考える。第 2 座標を比べて $k_2 = \sigma^{-1}h_2\tau$ 。ここで $k_2 \in H_2$ ゆえ $\sigma^{-1}h_2\tau \in H_2$ 。つまり $(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3$ は h_2 の双役子である。逆に、 h_2 の任意の双役子 $(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3$ に対し、 (h_1, h_2, h_3) に同ファイバー的な点 $\in H_1 \times H_2 \times H_3$ を $(h_1\sigma, \sigma^{-1}h_2\tau, \tau^{-1}h_3)$ で定めることができる。したがって (h_1, h_2, h_3) と同ファイバー的な元全体の集合 (つまりファイバー $\pi^{-1}(h_1h_2h_3)$) と $h_2 \in H_2$ の双役子全体の集合のあいだに一対一対応がある。後者を h_2 の**双役子集合** (bijugator set) といい、 $\mathcal{B}_{h_2}$ で表す：

$$\mathcal{B}_{h_2} := \{(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3 : \sigma^{-1}h_2\tau \in H_2\}.$$

まとめておくと、

命題 3.6.

$$\pi^{-1}(h_1h_2h_3) \cong \mathcal{B}_{h_2} \text{ via } \begin{cases} (\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{h_2} \mapsto (h_1\sigma, \sigma^{-1}h_2\tau, \tau^{-1}h_3) \in \pi^{-1}(h_1h_2h_3), \\ (k_1, k_2, k_3) \in \pi^{-1}(h_1h_2h_3) \mapsto (h_1^{-1}k_1, h_3k_3^{-1}) \in \mathcal{B}_{h_2}. \end{cases}$$

同型 $\pi^{-1}(h_1h_2h_3) \cong \mathcal{B}_{h_2}$ より、次がわかる：

系 3.7. $\pi^{-1}(h_1h_2h_3)$ は、集合としては h_2 だけで決まり、 h_1, h_3 にはよらない。

したがって、両側コセット $H_1h_2H_3$ のどの点 $x_1h_2x_3$ ($x_1 \in H_1, x_3 \in H_3$) のファイバー $\pi^{-1}(x_1h_2x_3)$ も（集合として）同型である。よって次が示せた—equifiber という用語は、特異点論の用語 equisingularity（同型な特異点が連なってできた特異点）から拝借：

等ファイバー定理 (Equifiber theorem) 各 $h_2 \in H_2$ に対し、 $H_1h_2H_3$ の上の点のファイバーはすべて同型である。実際、 $\pi^{-1}(x)$ ($\forall x \in H_1h_2H_3$) は（集合として）双役子集合 B_{h_2} に同型である。

注：リー群の設定では、集合は空間におきかわり、「集合として同型である」は「空間として同型である」におきかわる。

セクト $H_1H_2H_3$ を両側コセットの和 $H_1H_2H_3 = \bigcup_{h_2 \in H_2} H_1h_2H_3$ として表す。一般に、これは非交和ではない。代表元を取り、非交和 $H_1H_2H_3 = \coprod_{i \in I} H_1h_2^{(i)}H_3$ としておく。等ファイバー定理より、次が従う：

シナジー分解定理 シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1H_2H_3$ を考える。底空間の分解 $H_1H_2H_3 = \coprod_{i \in I} H_1h_2^{(i)}H_3$ の各成分 $H_1h_2^{(i)}H_3$ 上で π のファイバーはすべて同型である。

たとえば、例 3.1 の場合、シナジー分解は図 4 の通りである。

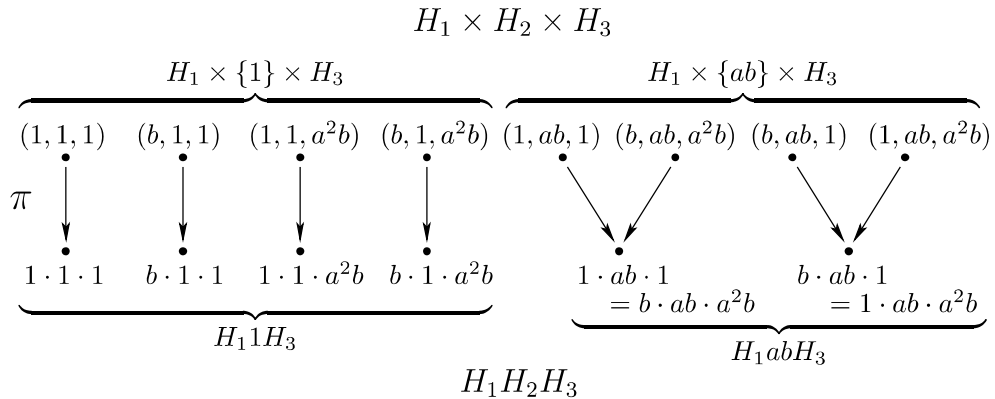


図 4: シナジー分解：ここで、 $H_1H_2H_3 = H_11H_3 \amalg H_1abH_3$ （非交和）。

シナジーの記述のアルゴリズム

シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1H_2H_3$ の決定は、次の手順で行えばよい：

Step 1. π のシナジー分解を行う。これは、両側コセット分解 $H_1H_2H_3 = \coprod_{i \in I} H_1h_2^{(i)}H_3$ から求まる。

Step 2. π のファイバーを決定する。等ファイバー定理より、Step 1 の各 $H_1 h_2^{(i)} H_3$ の任意の点のファイバーは $\mathcal{B}_{h_2^{(i)}}$ に同型である。よって $\mathcal{B}_{h_2^{(i)}}$ を計算すればよい。

4 シナジーから定まる亜群

$H_1, H_2, \dots, H_n$ は群 G の部分群とする。シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \dots H_n$ のファイバーは、単なる集合ではなく、(シナジーから定まる) 亜群構造が入ることを説明する—実際は、ファイバーだけでなく、 $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ 全体に亜群構造が入る。

大ざっぱに言うと、「亜群」は特殊な有向グラフである—どの矢に対しても、つねに逆向きの矢が存在する (群の公理の「逆元の存在」のアナロジー)。図 5 参照。亜群は、特殊な圏—すべての射が可逆—ともみなせる。([Wei] は亜群についての啓発的な解説記事である。)

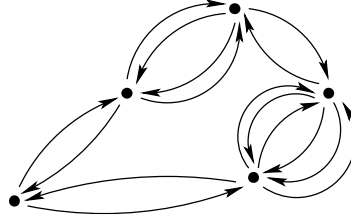


図 5: 亜群のグラフ：各矢に対し、逆向きの矢がある。

群 G が有限の場合、アプリオリには、シナジーのファイバーは単なる有限集合である。しかし、ファイバーには亜群の構造が入り、特殊なグラフの頂点集合になっている。類似：有限体上で定義された代数多様体は、単なる有限集合ではなく「空間」である—ザリスキ位相により位相空間となっている。

以下では、アイデアをはっきりさせるため $n = 3$ のときに構成する (一般の場合は [Ta2] 参照)。準備から始める。2 点 $(k_1, k_2, k_3), (h_1, h_2, h_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ が同ファイバー的であることはそれらが擬共鳴であることと同値である (命題 3.4)。ここで、後者の条件は

$$(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3), \quad \exists \sigma \in H_1, \exists \tau \in H_3.$$

このとき $(h_1, h_2, h_3) \sim (k_1, k_2, k_3)$ と表すと、これは $H_1 \times H_2 \times H_3$ の同値条件を定める (擬共鳴同値)。またこのとき、点 (h_1, h_2, h_3) に同値な点全体がファイバー $\pi^{-1}(h_1 h_2 h_3)$ である。

実は、擬共鳴は単に同値関係を定めるだけでなく、 $H_1 \times H_2 \times H_3$ 上に「亜群構造」を定める。

「同値関係」と「亜群」の違い 2つの元 a, b に対し、「同値関係」では a と b が同値か否か、の2択である。一方、「亜群」の場合は、 a と b が同値よりもきめ細かく、 a と b が“どのように同値か”を記述する—こういう設定は、幾何的な対象 a と b が同型かどうかよりも細かく、 a と b が“どのような同型写像で同型か”を網羅的に記述したいとき、とりわけモジュライ問題で自然に現われる。グラフ的に言うと、同値関係 $a \sim b$ は a から b へのひとつの矢だけを表しているのに対し、亜群の場合は、 a から b への矢は、一般に複数ある。この「矢の集合」が圏論の Hom set である。

話を元に戻す。シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ から亜群を次のように構成する。まず、頂点集合を $H_1 \times H_2 \times H_3$ とする。次に、2つの頂点 $(h_1, h_2, h_3), (k_1, k_2, k_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ に対し、もし

$$(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3), \quad \exists (\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3$$

ならば、 (h_1, h_2, h_3) から (k_1, k_2, k_3) への矢—正確には (σ, τ) -矢—を描く（注：圏論的に言うと、矢は「射」である）。

補足 4.1 (矢の一意性). 頂点 (h_1, h_2, h_3) から頂点 (k_1, k_2, k_3) への矢は、 (σ, τ) -矢だけである。実際、 (σ, τ) と異なる $(\sigma', \tau') \in H_1 \times H_3$ に対し、 $(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma', \sigma'^{-1} h_2 \tau', \tau'^{-1} h_3)$ となっているとすると、 $(h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3) = (h_1 \sigma', \sigma'^{-1} h_2 \tau', \tau'^{-1} h_3)$. とくに、 $h_1 \sigma = h_1 \sigma', \tau^{-1} h_3 = \tau'^{-1} h_3$. これより $\sigma = \sigma', \tau = \tau'$ になってしまう。

上で定めた矢が亜群の条件を満たすことを確認しておく：

- 逆矢の存在:

(h_1, h_2, h_3) から (k_1, k_2, k_3) への (σ, τ) -矢に対して、 (k_1, k_2, k_3) から (h_1, h_2, h_3) への逆向きの矢 (σ^{-1}, τ^{-1}) -矢がある。実際、 $(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3)$ を逆に解くと、 $(h_1, h_2, h_3) = (k_1 \sigma^{-1}, \sigma k_2 \tau^{-1}, \tau k_3)$.

- 矢の合成性:

(h_1, h_2, h_3) から (k_1, k_2, k_3) への (σ, τ) -矢と (k_1, k_2, k_3) から (l_1, l_2, l_3) への (σ', τ') -矢の合成は $(\sigma \sigma', \tau \tau')$ -矢である。実際、

$(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3)$ と $(l_1, l_2, l_3) = (k_1 \sigma', \sigma'^{-1} k_2 \tau', \tau'^{-1} k_3)$ において、左等式を右等式に代入すると、 $(l_1, l_2, l_3) = (h_1 (\sigma \sigma'), (\sigma \sigma')^{-1} h_2 (\tau \tau'), (\tau \tau')^{-1} h_3)$.

定義 4.2. 上で構成した亜群をシナジー亜群という。

この亜群の各連結成分は部分亜群であり、シナジー・ファイバー亜群という（その頂点集合は、シナジーのファイバーである）。

シナジー亜群は $H_1 \times H_2 \times H_3$ に作用する： (h_1, h_2, h_3) から (k_1, k_2, k_3) への (σ, τ) -矢は (h_1, h_2, h_3) を (k_1, k_2, k_3) へうつす。そして、セクト $H_1 H_2 H_3$ はこの亜群作用商である。

以下では、“矢”を（射とみなして）“擬共鳴”ということにする。まとめておくと、

定理 4.3. シナジー $\pi: H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ に対し、その擬共鳴たちは $H_1 \times H_2 \times H_3$ 上に亜群構造（シナジー亜群）を定める—各ファイバーはこの亜群の連結成分の頂点集合である。そして、シナジー $\pi: H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ はシナジー亜群の $H_1 \times H_2 \times H_3$ への作用の商写像である。

補足 4.4. 一般のシナジー $\pi: H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ に対しても同様のことが成り立つ（[Ta2] 参照）。ただし、 $n = 2$ のときは、亜群作用商よりも強く、群作用商である。実際、共鳴群作用による商である（補題 2.1）。

次を注意しておく：

- 群 G の部分群 H_1, H_2, H_3 に対し、直積群 $H_1 \times H_2 \times H_3$ の群構造は、 H_1, H_2, H_3 の抽象的な群構造だけにより決まるが、 $H_1 \times H_2 \times H_3$ のシナジー亜群構造は、 H_1, H_2, H_3 の群 G の中への入り方に依存する。 H_1, H_2, H_3 が別の群 G' の部分群にもなっている場合、これに対するシナジー $\pi': H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ は、一般に π とは異なるので、この場合の $H_1 \times H_2 \times H_3$ のシナジー亜群構造は、 G の場合とは一般に異なる。

- 擬共鳴条件 $(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3)$ ($\exists \sigma \in H_1, \exists \tau \in H_3$) について：

点 $(x_1, x_2, x_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ に対し、 $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 \sigma, \sigma^{-1} x_2 \tau, \tau^{-1} x_3)$ は一般に $H_1 \times H_2 \times H_3$ の自己同型写像を定めない—像 $(x_1 \sigma, \sigma^{-1} x_2 \tau, \tau^{-1} x_3) \notin H_1 \times H_2 \times H_3$ となることがある。実際、一般には $\sigma^{-1} x_2 \tau \notin H_2$ （一方、つねに $x_1 \sigma \in H_1, \tau^{-1} x_3 \in H_3$ であるが）。したがって、（共鳴たちと違って）一般に擬共鳴たちは群をなさない。あくまで亜群をなすのである。

普遍シナジーとその亜群

シナジー $\pi: H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n \rightarrow H_1 H_2 \cdots H_n$ を考える。ここで、群 G の部分群 $H_1, H_2, \dots, H_n$ がすべて G に一致するときは $H_1 H_2 \cdots H_n$ は $GG \cdots G$ 、つまり G に一致する。したがって、シナジーは $\pi: G^n \rightarrow G$ で与えられる。ただし、 $G^n := \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_n$ とおいた。 $\pi: G^n \rightarrow G$ を**普遍シナジー**（universal synergy）という。普遍シナジーでは、擬共鳴はつねに共鳴になっている。したがって、普遍シナジーから定まるシナジー亜群は、実は共鳴群である。これを**普遍シナジー群**（universal synergy group）または**普遍共鳴群**（universal resonant group）という。この群は、具体的には直積群 G^{n-1} である。

5 2つのセクトの交点と双分解

シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ を考える。思い出しておくと、2点 $(k_1, k_2, k_3), (h_1, h_2, h_3) \in H_1 \times H_2 \times H_3$ が同ファイバー的であることは次と同値である (命題 3.2):

$$(k_1, k_2, k_3) = (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3), \quad \exists \sigma \in H_1, \exists \tau \in H_3.$$

第2座標を比べて、 $k_2 = \sigma^{-1} h_2 \tau$ (つまり k_2 と h_2 は双役)。これは $\sigma k_2 = h_2 \tau$ と書き直せる。ここで $\sigma k_2 \in H_1 H_2$ ($\sigma \in H_1$ ゆえ)、 $h_2 \tau \in H_2 H_3$ ($\tau \in H_3$ ゆえ)。よって $\sigma k_2 = h_2 \tau \in H_1 H_2 \cap H_2 H_3$ である。この元を $t \in H_1 H_2 \cap H_2 H_3$ と表すと、 $t = \sigma k_2 = h_2 \tau$ 。これを $t \in H_1 H_2 \cap H_2 H_3$ の**双分解** (bifactorization) という。

【われわれの視点】

双分解は、代数幾何の交点理論における「重複度」のカウンターパートである。

実際、双分解 $t = \sigma k_2 = h_2 \tau$ (ここで $\sigma k_2 \in H_1 H_2$, $h_2 \tau \in H_2 H_3$) は、 $H_1 H_2 \cap H_2 H_3$ の交点 t のまわりの様子を表していると考えられる (図6参照)。ここで、 σk_2 は $H_1 H_2$ 方向の情報、 $h_2 \tau$ は $H_2 H_3$ 方向の情報を与えている。これは、代数幾何で交点の**重複度**が、交点の周りの様子 (横断的に交わっている、あるいは接している—また、何重で接しているか) を表していることのアナロジーとみなせる。(なお、 $n=3$ のときの “ $H_1 H_2 \cap H_2 H_3$ の交点” は、一般の n の場合は “ $H_1 H_2 \cdots H_{n-1} \cap H_2 H_3 \cdots H_n$ の交点” にとってかわる。)

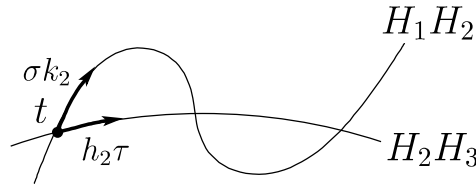


図6: 双分解 $t = \sigma k_2 = h_2 \tau$ は t のまわりの局所情報 ($H_1 H_2$ 方向と $H_2 H_3$ 方向の情報) を与えている—ただし、この図はあくまで理解を助けるための模式図である。

定義 5.1. $h_2 \in H_2$ の**双分解集合** (bifactorization set) を次で定める:

$$\mathcal{F}_{h_2} := \{(\sigma, k_2, \tau) \in H_1 \times H_2 \times H_3 : \sigma k_2 = h_2 \tau\}.$$

(注: これは $H_1 \times H_2 \times H_3$ の部分集合であるが、一般には部分群ではない。)

思い出しておくと、 $h_2 \in H_2$ の双役子集合は次で与えられる。

$$\mathcal{B}_{h_2} := \{(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3 : \sigma^{-1} h_2 \tau \in H_2\}.$$

三位一体定理 (Trinity theorem) 次の同型対応がある：

$$\text{ファイバー } \pi^{-1}(h_1 h_2 h_3) \xleftarrow{\cong} \text{双役子集合 } \mathcal{B}_{h_2} \xrightarrow{\cong} \text{双分解集合 } \mathcal{F}_{h_2}.$$

ここで、各同型は次で与えられる：

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{B}_{h_2} \cong \pi^{-1}(h_1 h_2 h_3) \text{ via } & \begin{cases} (\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{h_2} \mapsto (h_1 \sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau^{-1} h_3) \in \pi^{-1}(h_1 h_2 h_3), \\ (k_1, k_2, k_3) \in \pi^{-1}(h_1 h_2 h_3) \mapsto (h_1^{-1} k_1, h_3 k_3^{-1}) \in \mathcal{B}_{h_2}. \end{cases} \\ \bullet \mathcal{B}_{h_2} \cong \mathcal{F}_{h_2} \text{ via } & \begin{cases} (\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{h_2} \mapsto (\sigma, \sigma^{-1} h_2 \tau, \tau) \in \mathcal{F}_{h_2}, \\ (\sigma, k_2, \tau) \in \mathcal{F}_{h_2} \mapsto (\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{h_2}. \end{cases} \end{aligned}$$

6 補足： 双役子集合 $\mathcal{B}_{h_2}$ の構造

H_1, H_2, H_3 は群 G の部分群とし、シナジー $\pi : H_1 \times H_2 \times H_3 \rightarrow H_1 H_2 H_3$ を考える。 $h_2 \in H_2$ に対し、両側コセット $H_1 h_2 H_3$ の任意の点 x に対し、ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は双役子集合 $\mathcal{B}_{h_2}$ と同型である（等ファイバー定理）。それゆえ $\mathcal{B}_{h_2}$ の構造を理解することは重要である。

以下、 $h_2 \in H_2$ は固定しておく。 h_2 の双役子集合 $\mathcal{B}_{h_2} := \{(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3 : \sigma^{-1} h_2 \tau \in H_2\}$ は $H_1 \times H_3$ の部分集合であるが、一般には部分群ではない。一方、 h_2 の**双中心化群** (bicentralizer) $\mathcal{C}_{h_2} := \{(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3 : h_2 = \sigma^{-1} h_2 \tau\}$ は $\mathcal{B}_{h_2}$ の部分集合であるが、($\mathcal{B}_{h_2}$ と違って) $H_1 \times H_3$ の部分群である。次に、 h_2 と双役な H_2 の元からなる集合

$$\mathcal{K}_{h_2} := \{k_2 \in H_2 : k_2 = \sigma^{-1} h_2 \tau \text{ } (\exists \sigma \in H_1, \exists \tau \in H_3)\}$$

を考える。 $\mathcal{K}_{h_2}$ を、 h_2 の**双役集合** (bijugation set) という。以下では、群 G の単位元を e で表す。次に注意する：

- (i) $(e, e) \in \mathcal{B}_{h_2}$ (実際、 $e^{-1} h_2 e = h_2 \in H_2$ である)。
- (ii) $h_2 \in \mathcal{K}_{h_2}$ (実際、 $h_2 = e^{-1} h_2 e$ である)。

双役集合 $\mathcal{K}_{h_2}$ 上の‘ファイバー束’

写像 $p : \mathcal{B}_{h_2} \rightarrow \mathcal{K}_{h_2}$, $p(\sigma, \tau) := \sigma^{-1} h_2 \tau$ を**双役写像** (bijugation map) という。これは全射である。実際、 $\mathcal{K}_{h_2}$ の任意の元 k_2 は ($\mathcal{K}_{h_2}$ の定義より) $k_2 = \sigma^{-1} h_2 \tau$ ($\exists (\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3$) と表せることからわかる。

以下では、 $k_2 \in \mathcal{K}_{h_2}$ に対し、ファイバー $p^{-1}(k_2)$ を求める。まず特別な場合から始める。 k_2 が h_2 のときは次が成り立つことに注意する：

$$\begin{aligned}
(\sigma, \tau) \in p^{-1}(h_2) &\iff \sigma^{-1}h_2\tau = h_2 \\
&\iff (\sigma, \tau) \in \mathcal{C}_{h_2}.
\end{aligned}$$

よって次が得られた。

補題 6.1. $p^{-1}(h_2) = \mathcal{C}_{h_2}$. (注: $p(e, e) = h_2$ ゆえ $(e, e) \in p^{-1}(h_2)$ である。)

次に、一般の $k_2 \in \mathcal{K}_{h_2}$ に対し、 $p^{-1}(k_2)$ を求める。まず、 $\mathcal{K}_{h_2}$ の定義より $k_2 = \sigma^{-1}h_2\tau$ ($(\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{h_2}$) と表せる。このとき $p(\sigma, \tau) = k_2$, すなわち $(\sigma, \tau) \in p^{-1}(k_2)$ である。次に (σ, τ) と同ファイバー的な (σ', τ') (つまり $(\sigma', \tau') \in p^{-1}(k_2)$) が満たす条件を調べる。 (σ, τ) と (σ', τ') はそれぞれ $k_2 = \sigma^{-1}h_2\tau$ および $k_2 = (\sigma')^{-1}h_2\tau'$ を満たすので、 $\sigma^{-1}h_2\tau = (\sigma')^{-1}h_2\tau'$ である。これより

$$h_2 = (\sigma'\sigma^{-1})^{-1}h_2(\tau'\tau^{-1}).$$

つまり $(\sigma'\sigma^{-1}, \tau'\tau^{-1}) \in \mathcal{C}_{h_2}$ である。言い換えると $(\sigma', \tau') \in \mathcal{C}_{h_2} \cdot (\sigma, \tau)$. したがって、

$$(\sigma', \tau') \in p^{-1}(k_2) \iff (\sigma', \tau') \in \mathcal{C}_{h_2} \cdot (\sigma, \tau).$$

よって、次が成り立つ：

命題 6.2. $k_2 \in \mathcal{K}_{h_2}$ に対し、 $k_2 = \sigma^{-1}h_2\tau$ ($(\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{h_2}$) と表す。このとき

$$p^{-1}(k_2) = \mathcal{C}_{h_2} \cdot (\sigma, \tau).$$

つまり $p^{-1}(k_2)$ は、双中心化群 $\mathcal{C}_{h_2}$ を“右から” (σ, τ) だけ「平行移動」したものである。ここで、 $\mathcal{C}_{h_2}$ は (e, e) を含むが、 $\mathcal{C}_{h_2} \cdot (\sigma, \tau)$ は一般には含まない—たとえて言うのアフィン空間的である（下の補足 6.3 参照）。

補足 6.3. 一般のアフィン空間は「原点のないベクトル空間」。大ざっぱに言うと、ベクトル空間を平行移動したもの（このとき原点は他点にうつる）。

命題 6.2 より直ちに次が従う：

系 6.4. 双役写像 $p : \mathcal{B}_{h_2} \rightarrow \mathcal{K}_{h_2}$, $p(\sigma, \tau) := \sigma^{-1}h_2\tau$ のすべてのファイバーは双中心化群 $\mathcal{C}_{h_2}$ に（集合として）同型である。つまり p は、 $\mathcal{K}_{h_2}$ 上の‘ファイバー束’—双中心化群束—である。

$$(6.1) \quad \text{fiber}(\cong \mathcal{C}_{h_2}) \xrightarrow[\text{単射}]{\hookrightarrow} \mathcal{B}_{h_2} \xrightarrow[\text{全射}]{p} \mathcal{K}_{h_2}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \cup & \cup \\
& (\sigma, \tau) & \sigma^{-1}h_2\tau.
\end{array}$$

$\mathcal{B}_{h_2}$ と $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}$ の関係

双役写像 $p: \mathcal{B}_{h_2} \rightarrow \mathcal{K}_{h_2}$, $p(\sigma, \tau) := \sigma^{-1}h_2\tau$ に対し, $k_2 \in \mathcal{K}_{h_2}$ のファイバー $p^{-1}(k_2)$ は, 双中心化群 $\mathcal{C}_{h_2}$ を “右から” (σ, τ) だけ「平行移動」したものの, つまり $p^{-1}(k_2) = \mathcal{C}_{h_2} \cdot (\sigma, \tau)$ である (命題 6.2)。実は, 双役子集合に対しても「同様なこと」が成り立つ (ただし, “右から” が “左から” になる)。実際, $\mathcal{B}_{h_2}$ において, h_2 を $x_1^{-1}h_2x_3 \in H_1h_2H_3$ に取り換えると—のちの計算の都合上, $x_1h_2x_3$ ではなく $x_1^{-1}h_2x_3$ と取る—, $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}$ は $\mathcal{B}_{h_2}$ を “左から” (x_1^{-1}, x_3^{-1}) だけ平行移動したものの, つまり $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3} = (x_1^{-1}, x_3^{-1}) \cdot \mathcal{B}_{h_2}$ になる。これを示すために, まず思い出しておく:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{h_2} = \{(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3 : \sigma^{-1}h_2\tau \in H_2\}, \\ \mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3} = \{(\sigma, \tau) \in H_1 \times H_3 : \sigma^{-1}(x_1^{-1}h_2x_3)\tau \in H_2\}. \end{cases}$$

ここで, $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}$ の条件 $\sigma^{-1}(x_1^{-1}h_2x_3)\tau \in H_2$ は, $(x_1\sigma)^{-1}h_2(x_3\tau) \in H_2$ と書き換えられる。 $(\sigma', \tau') := (x_1\sigma, x_3\tau)$ とおくと, $\sigma'^{-1}h_2\tau' \in H_2$. これは $\mathcal{B}_{h_2}$ の条件にほかならない。ここで $(\sigma', \tau') = (x_1, x_3) \cdot (\sigma, \tau)$ に注意すると, 次の全単射が得られる:

$$(\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3} \longmapsto (x_1, x_3) \cdot (\sigma, \tau) \in \mathcal{B}_{h_2}.$$

つまり, $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}$ の元を左から (x_1, x_3) 倍すると $\mathcal{B}_{h_2}$ の元になる。よって,

$$\mathcal{B}_{h_2} = (x_1, x_3) \cdot \mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}.$$

これより, $(x_1, x_3)^{-1} \cdot \mathcal{B}_{h_2} = \mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}$. ここで, $(x_1, x_3)^{-1} = (x_1^{-1}, x_3^{-1})$ ゆえ, 次が得られた:

命題 6.5. $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3} = (x_1^{-1}, x_3^{-1}) \cdot \mathcal{B}_{h_2}$. つまり, $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}$ は $\mathcal{B}_{h_2}$ を “左から” (x_1^{-1}, x_3^{-1}) だけ「平行移動」したものである。

(注: $x_1 = x_3 = e$ のときは $\mathcal{B}_{x_1^{-1}h_2x_3}$ は $\mathcal{B}_{h_2}$ であり, 上の関係式は自明になる。つまり, $\mathcal{B}_{h_2} = (e, e) \cdot \mathcal{B}_{h_2}$.)

参考文献

- [小林・大島] 小林俊行, 大島利雄, “リー群と表現論”, 岩波書店, (2005) p.454 同伴 G -主束の切断への G 作用
- [近藤] 近藤武, “群論 II”, 岩波書店 (1991) p.134 word の簡約化

- [西山] 西山享, “表現論の方法と考え方”, (2000)
<http://rtweb.math.kyoto-u.ac.jp/preprint/nagoya.pdf>
 p.26 誘導表現と球関数 (2つの部分群の誘導表現のあいだの intertwiner の構成), p.27
 球関数, p.29 球関数の構成
- [HEO] D. Holt, B. Eick, E.A. O’Brien, *Handbook of Computational Group Theory*, CRC Press (2005) p.35 word の簡約化
- [Brtd] T. Bröcker, and T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Springer (1985) p.143 Induced representations
- [HiSaTa] R. Hirakawa, K. Sasaki, and S. Takamura, *Poset-blowdowns of generalized quaternion groups*, (2023), to appear from Int. J. Group Theory
- [HiTa1] R. Hirakawa, and S. Takamura, *Quotient families of elliptic curves associated with representations of dihedral groups*, Publ. RIMS. **55** no.2 (2019), 319–367
- [HiTa2] ———, *Degenerations of Riemann surfaces associated with the regular polyhedra and the soccer ball*, J. Math. Soc. Japan **69** No.3 (2017), 1213–1233
- [nLab] nLab, *Induced representation*, p.10 nice figurative diagram
<https://ncatlab.org/nlab/show/induced+representation>
- [Ta1] S. Takamura, *Prime factorizations of finite groups*, Preprint (2023)
- [Ta2] ———, *Fibrations over subgroup products*, Preprint (2023)
- [Ta3] ———, *Blowdown maps between subgroup posets*, Tokyo J. of Math. **45** (2) (2022), 467–499
- [Ta4] ———, *Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams*, Osaka J. Math. **58** (4) (2021), 885–897
- [Ta5] ———, *Linearization of quotient families*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **26** (2019), 361–389
- [Ta6] ———, *Representations of finite groups, quotient families, and regular polyhedra* (in Japanese), Symposium on topology of manifolds (2014)
<https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kiyonok/ym2014/takamura.pdf>

- [Ta7] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, III, (Splitting Deformations of Degenerations of Complex Curves)*, Springer Lecture Notes in Math. **1886** (2006)
- [Ta8] ———, *Towards the classification of atoms of degenerations, I, (Splitting criteria via configurations of singular fibers)*, J. Math. Soc. Japan **56** (1) (2004) 115–145
- [Wei] A. Weinstein, *Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry*, Notices of the AMS, **43** (7) (1996), 744–752