

正則分割の組合せ論と対称群の指標表

水川裕司 (防衛大学校), 山田裕史 (岡山大学理学部)

Hiroshi Mizukawa (National Defense Academy),

Hiro-Fumi Yamada (Okayama University)

本稿は山田が書いている. 久しぶりに数理解で講演させていただいた. 多分 10 年ぶりぐらいだろう. 参加者に外国人がいるので配慮せよ, という事で拙い英語を喋ったのだが, その反動で, この報告集には日本語で書かせていただく. 別の数理解研究集会で水川が講演し, その報告も出版されている [Mi] ので, なるべく重複がないように書くつもりである.

自然数 n に対して自然数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ が n の分割であるとは $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1$, $|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\ell = n$ をみたすことと定義する. このとき $|\lambda|$ を λ のサイズ, $\ell = \ell(\lambda)$ を λ の長さと呼ぶ. 分割を表すのに現れるパートの重複度を用いる場合がある. すなわち $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$ などと書く. 途中にカンマを入れない方が一般的だ. ここで $m_i = m_i(\lambda)$ はパート $i \geq 1$ の λ における登場回数である. 従って $|\lambda| = m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n$ だ. 自然数と言ったときには 0 を含めることがあるが, 0 の分割 $\emptyset$ をも考慮した方が便利である. 自然数 n の分割全体を $\mathcal{P}(n)$ で表し, さらに n に関する和集合を $\mathcal{P}$ で表す. 集合 $\mathcal{P}(n)$ の元の個数を分割数とよんで $p(n)$ で表す習慣である. まずは小手調べで次の母関数の公式を示して欲しい. ここで q は母関数の不定元である.

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - q^k}.$$

本稿では右辺の無限積を $\Phi(q)$ で表す. もう一つ, 母関数の扱いに慣れていただくために次の式も課題とする. 任意の自然数 $i \geq 1$ に対して

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} m_i(\lambda)q^{|\lambda|} = \Phi(q) \frac{q^i}{1 - q^i}.$$

この手の母関数の表示は、わかってしまえば当たり前に見えるのだが、それを説明しようとするとは結構大変である。専門家の Andrews はさすがに手慣れていて、[AE] には素晴らしい解説が散りばめられている。名著だ。

以下では自然数 $r \geq 2$ を固定する。対称群のモジュラー表現論と関係する部分では r を素数とする必要があるが、組合せ論的な議論では当面、任意の自然数でよい。ここで定義を 2 つ。分割 $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$ が r -正則であるとは、任意の i に対して $m_i < r$ を満たすこと。また r -類正則であるとは、任意の i に対して $m_{ri} = 0$ であること。それぞれの全体の集合を $\mathcal{P}_r$, $\mathcal{P}^r$ と書く。個数の母関数は以下の通り。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_r} q^{|\lambda|} = \prod_{k \geq 1} (1 + q^k + \dots + q^{(r-1)k}) = \prod_{k \geq 1} \frac{1 - q^{rk}}{1 - q^k} = \prod_{k \neq 0} \frac{1}{1 - q^k} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^r} q^{|\lambda|}.$$

上の計算で、また以下でも “ $\not\equiv$ ” は “ $\not\equiv \pmod{r}$ ” を意味する。この無限積（無限和）を $\Phi_r(q)$ で表す。

さて自然数 $j \geq 1$ に対して

$$V_j(n) := \sum_{\rho \in \mathcal{P}^r(n)} m_j(\rho)$$

$$W_j(n) := \sum_{\rho \in \mathcal{P}^r(n)} |\{i \geq 1; m_i(\rho) \geq j\}|$$

とおく。突然だがここから r -類正則分割を表すのに λ ではなく ρ を用いることにした。たとえば $r = 4$ とすると $\mathcal{P}^4(8)$ は 16 個の元からなる。 V とか W を表にしてみると以下ようになる。

j	1	2	3	4	5	6	7	8
$V_j(8)$	38	16	8	0	3	2	1	0
$W_j(8)$	33	15	8	5	3	2	1	1

ここで最初の命題。

命題 1. 自然数 $j \not\equiv 0 \pmod{r}$ に対して

$$V_j(n) = \sum_{\alpha \geq 0} W_{r\alpha+j}(n).$$

証明は母関数をいじればできる。まず $V_j(n)$ の n に関する母関数は先ほど見たように

$$\sum_{n \geq 0} V_j(n) q^n = \Phi_r(q) \frac{q^j}{1 - q^j}.$$

である。一方 W の方は以下のようになる。

$$\sum_{n \geq 0} W_j(n) q^n = \Phi_r(q) \sum_{k \neq 0} q^{jk} = \Phi_r(q) \sum_{k \geq 1} (q^{jk} - q^{rjk}) = \Phi_r(q) \left(\frac{q^j}{1 - q^j} - \frac{q^{rj}}{1 - q^{rj}} \right).$$

従って

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\alpha \geq 0} W_{r^\alpha j}(n) \right) q^n &= \sum_{\alpha \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} W_{r^\alpha j}(n) q^n \right) \\ &= \sum_{\alpha \geq 0} \Phi_r(q) \left(\frac{q^{r^\alpha j}}{1 - q^{r^\alpha j}} - \frac{q^{r^{\alpha+1}j}}{1 - q^{r^{\alpha+1}j}} \right) = \Phi_r(q) \frac{q^j}{1 - q^j} = \sum_{n \geq 0} V_j(n) q^n \end{aligned}$$

となり命題が示された。

ここでまた記号を導入する。分割 $\rho = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$ に対して

$$a_\rho := \prod_{i \geq 1} i^{m_i}, \quad b_\rho := \prod_{i \geq 1} (m_i!)$$

と置く。分割としての表示のときには i^{m_i} は積ではなくむしろ和だったのだが、ここでは本当に冪積である。また

$$\begin{aligned} a_n &:= \prod_{\rho \in \mathcal{P}(n)} a_\rho, \quad b_n := \prod_{\rho \in \mathcal{P}(n)} b_\rho, \\ a_{r,n} &:= \prod_{\rho \in \mathcal{P}^r(n)} a_\rho, \quad b_{r,n} := \prod_{\rho \in \mathcal{P}^r(n)} b_\rho \end{aligned}$$

とする。今更だが $r > n$ のときには r に関する制限がなくなってしまうので $\mathcal{P}_r(n) = \mathcal{P}^r(n) = \mathcal{P}(n)$ であり、 $a_{r,n} = a_n$, $b_{r,n} = b_n$ であることに注意する。少し計算してみよう。

$$a_{r,n} = \prod_{j \geq 1} j^{\sum_{\rho \in \mathcal{P}^r(n)} m_j(\rho)} = \prod_{j \neq 0} j^{V_j(n)}.$$

一方 $b_{r,n}$ については

$$\begin{aligned}
 b_{r,n} &= \prod_{j \geq 1} j^{W_j(n)} = \prod_{k \neq 0} \prod_{\alpha \geq 0} (r^\alpha k)^{W_{r^\alpha k}(n)} \\
 &= \left(\prod_{k \neq 0} \prod_{\alpha \geq 0} r^{\alpha W_{r^\alpha k}(n)} \right) \left(\prod_{k \neq 0} \prod_{\alpha \geq 0} k^{W_{r^\alpha k}(n)} \right) \\
 &= r^{c_{r,n}} \prod_{j \neq 0} j^{V_j(n)}
 \end{aligned}$$

となる。途中で $j = r^\alpha k$, $k \neq 0$ と因数分解した。また

$$c_{r,n} = \sum_{j \neq 0} \sum_{\alpha \geq 0} \alpha W_{r^\alpha j}(n)$$

と置いた。まとめれば次のようになる。

命題 2. $b_{r,n} = r^{c_{r,n}} a_{r,n}$.

もし $r > n$ ならば $W_{r^\alpha j}(n) = 0$ ($\alpha \geq 1$), つまり $c_{r,n} = 0$ となるので, 結局 $a_n = b_n$ も示されたことになる。またもし r が素数ならば $r^{c_{r,n}}$ は $b_{r,n}$ の r -部分, すなわち $(b_{r,n})_r = r^{c_{r,n}}$ である。ちょっとマニアックだが $c_{r,n}$ の母関数も面白い。

命題 3. $\sum_{n \geq 0} c_{r,n} q^n = \Phi_r(q) \sum_{m \geq 1} \frac{q^{rm}}{1 - q^{rm}}$.

証明は, 和を取る順番を取り替えるだけだ。まず $j \not\equiv 0 \pmod{r}$ を固定して

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\alpha \geq 0} \alpha W_{r^\alpha j}(n) \right) q^n &= \sum_{\alpha \geq 0} \alpha \left(\sum_{n \geq 0} W_{r^\alpha j}(n) q^n \right) \\
 &= \sum_{\alpha \geq 0} \alpha \Phi_r(q) \left(\frac{q^{r^\alpha j}}{1 - q^{r^\alpha j}} - \frac{q^{r^{\alpha+1} j}}{1 - q^{r^{\alpha+1} j}} \right) = \Phi_r(q) \sum_{\alpha \geq 1} \frac{q^{r^\alpha j}}{1 - q^{r^\alpha j}}
 \end{aligned}$$

この両辺を $j \not\equiv 0 \pmod{r}$ について和を取れば, 再び因数分解を考慮して

$$\sum_{n \geq 0} c_{r,n} q^n = \Phi_r(q) \sum_{j \neq 0} \sum_{\alpha \geq 1} \frac{q^{r^\alpha j}}{1 - q^{r^\alpha j}} = \Phi_r(q) \sum_{m \geq 1} \frac{q^{rm}}{1 - q^{rm}}.$$

ここまでの話は対称群の「正則指標表」を考察するための準備であった。まず対称群 S_n の指標表を復習する。学部低学年の群論の講義で必ず触れられるように対称群の共軛類は分割でラベル付けられる。すなわち $\rho = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$ が、長さ i のサイクルが m_i 個の元全体からなる共軛類に対応する。群論の一般論より（通常）既約指標も分割でラベル付けられる訳である。分割 $\lambda \in \mathcal{P}(n)$ に対応する既約指標 χ^λ の共軛類 ρ における値 $\chi_\rho^\lambda \in \mathbb{Z}$ を正方行列に並べたもの T_n を指標表とよぶ。たとえば T_4 は以下の通り。

$\lambda \backslash \rho$	(1^4)	$(1^2, 2)$	$(1, 3)$	(4)	(2^2)
(4)	1	1	1	1	1
$(3, 1)$	3	1	0	-1	-1
(2^2)	2	0	-1	0	2
$(2, 1^2)$	3	-1	0	1	-1
(1^4)	1	-1	1	-1	1

有名な Littlewood の本 [L] には $n = 10$ までの表が載っているが、私はそのコピーを常持ち歩いている、って別に自慢にならないか。対称群の指標が通奏低音のように響いている数学をやってきたつもりだしこれからもそうありたい。「通奏低音」という例えは少しニュアンスが違うかもしれない。要するに、リー環の表現にしる、可積分系にしる「こんな面白い構造があるのは実は対称群の表現が背後にあるからなんだよ」という仕事をしたい。だから今回のように指標表を主人公としてモロに扱うのは、実は内心忸怩たるものがある。

さて群の指標の直交関係式、正確には第2直交関係式により

$${}^t T_n T_n = \text{diag}(z_\rho; \rho \in \mathcal{P}(n))$$

がわかる。ここで $z_\rho = a_\rho b_\rho$ は共軛類 ρ の任意の元の中心化群の位数である。これより $(\det T_n)^2 = \prod_{\rho \in \mathcal{P}(n)} z_\rho = a_n b_n = a_n^2 = b_n^2$ 、すなわち $\det T_n = a_n = b_n$ がわかる。ただし $\det T_n$ という記号でその絶対値を表すことにする。符号は共軛類や既約指標の並べ方に依存するので意味を持たないと（ここでは）考える。Sloane のオンライン整数列百科では $a_n = b_n$ には A007870 という番号が与えられている。

このように T_n の行列式は一発でわかってしまうのだが、対称関数を用いた別のアプローチを与えておこう。有名なシューア・ワイルの相互律を指標で見たものが次のフロベニウスの公式である。

$$p_\rho = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \chi_\rho^\lambda s_\lambda.$$

ここで p_ρ は冪対称関数、 s_λ はシューア関数である。記号は、誰でもそうするように Macdonald[M] に従う。対称関数の基底変換行列を使えば $M(p, s) = {}^t T_n$ ということになる。左辺の行列式を求めるために中間的な基底を考える。ここでは単項式対称関数 m_λ を使う。つまり $M(p, s) = M(p, m)M(m, s)$ というわけだ。ここで $M(m, s)^{-1} = M(s, m)$ はコストカ行列とよばれる整数行列で、組合せ論的に計算可能なものだ。さらに重要な事実として、これは upper unitriangular である。すなわち行、列を dominance 順序で（正確には dominance 順序と両立する全順序で）大きい順番に並べたとき、上三角、かつ対角成分がすべて1、という行列になっている。従って $\det M(m, s) = 1$ 。そこで問題は $M(p, m)$ 、すなわち

$$p_\rho = \sum_{\mu} L_{\rho\mu} m_\mu$$

の係数 $L_{\rho\mu}$ を調べることに帰着する。これについては [M] の 103 ページあたりに記述があるが、きちんと考えれば参照しなくても大丈夫。一般に

$$p_\rho = b_\rho m_\rho + \text{higher terms}$$

となる。従って $\det T_n = b_n$ がわかった。

さて再び $r \geq 2$ を固定しよう。対称群の正則指標表 $T_n^{(r)}$ を、行として r -正則な分割、列として r -類正則な分割を選んでできる T_n の小行列として定義する。たとえば $T_4^{(2)}$ は

$\lambda \backslash \rho$	(1^4)	$(1, 3)$
(4)	1	1
$(3, 1)$	3	0

とひどく小さくなる。この行列式（の絶対値）は3なので、容易に一般式が予想される。

定理 4. $\det T_n^{(r)} = a_{r,n}$.

この定理は Olsson[O] が 2003 年に示している. 指標の直交性が上手く使えないので, ちょっと工夫が必要となる. 我々は対称関数を用いた証明を [MY] に書いておいた. 概略を述べよう. フロベニウスの公式により,

$$T_n^{(r)} = M(s^{(r)}, p^{(r)}) \cdot \text{diag}(z_\rho; \rho \in \mathcal{P}_n^r)$$

である. ここで対称関数 $F = F(x_1, x_2, \dots)$ に対して, その r -被約関数を

$$F^{(r)} = F|_{p_r=p_{2r}=\dots=0}$$

により定義した. 次数が r の倍数の冪和をすべて「手で」0にするのだ. 上で突如として $x = (x_1, x_2, \dots)$ という可算個の「変数」が登場したが, 対称関数というのは, 普段表立って出てこないこの x に関して対称という意味である. だから冪和は

$$p_n = x_1^n + x_2^n + \dots$$

のように思っている. 一般線型群の表現と絡める場合にはこの x は行列の固有値に対応する. だから我々は仲間内では「固有値変数」とよんでいる. 有限サイズの行列の固有値として可算個の変数が出てくるわけだが, 不合理がないように対称関数の「安定性」が要求されるのだ. そうしておいて, F を一旦, 冪和対称関数により表示しておく. その上で $p_{ir} = 0$ ($i \geq 1$) とせよ, というのが r -被約という操作である.

閑話休題. 変換行列 $M(s^{(r)}, p^{(r)})$ の行列式を調べるために中間的な基底を選ぶ必要がある. 我々は Q' -関数というものを採用した. これは Hall-Littlewood 対称関数の一つだがあまり有名ではない. Hall-Littlewood というのは変数 x 以外にパラメータ t をもっており, $t = 0$ と特殊化するとシューア関数になる, という代物だ. まず分割 λ でラベル付けられる $P_\lambda(x; t) = P_\lambda(t)$ が定義され, その双対基底として相棒の $Q_\lambda(t)$ が定まる, というストーリーだ. 言い換えれば次式が定義になり得る.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} P_\lambda(x; t) Q_\lambda(y; t) = \prod_{i,j} \frac{1 - tx_i y_j}{1 - x_i y_j}.$$

双対である Q -関数を作るときと「内積」を変更し Q' -関数が定まる. [M] の 234 ページからしばらく演習問題の形で紹介されている. ここでは定

義だけ書いておこう.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} P_{\lambda}(x; t) Q'_{\lambda}(y; t) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}.$$

この $Q'_{\lambda}(t)$ において $t = \zeta = \exp(2\pi i/r)$ とおき, さらに r -被約を行ったものの $Q'_{\lambda}(\zeta)$ が求めるものだ. Lascoux-Leclerc-Thibon [LLT] により「 $\lambda \in \mathcal{P}_r$ でない限り, $Q'_{\lambda}(\zeta) = 0$ 」ということが示されている. この性質を生かして

$$M(s^{(r)}, p^{(r)}) = M(s^{(r)}, Q'^{(r)}) M(Q'^{(r)}, p^{(r)})$$

と分解する. 上手くできたもので, 右辺の行列 $M(s^{(r)}, Q'^{(r)})$ はコストカ行列の t -アナログを用いて書ける. そして行列式が 1 であることが示される. ここで次の基本補題が登場する.

補題 5.

$$(\det M(Q'^{(r)}, p^{(r)}))^2 = \frac{1}{r^{c_{r,n}} z_{r,n}}.$$

ただし $z_{r,n} := a_{r,n} b_{r,n} = \prod_{\rho \in \mathcal{P}^r(n)} z_{\rho}$ とおいた.

証明は一本道の計算なのだが, その道に乗るためにいささか準備が必要になるのでここでは省略しよう. これらをまとめて定理の式を得る.

たかが対称群の指標表でこれだけ遊べるのだ. もし r が素数であれば, こままでの議論はモジュラー表現と関係する. というよりそもそもの Olsson の問題意識は, モジュラー表現論を, 正確にはそれにまつわる組合せ論を「標数が合成数」の場合にも広げたい, というものであった. だからこれから述べることは Olsson の精神に逆行することになるが, 私にとっては新たな知見であった. モジュラー表現論ではブラウアー指標表が重要である. (こういうのを「釈迦に説法」という.) 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の場合, 標数 r における既約モジュラー表現は $\lambda \in \mathcal{P}_r(n)$ でラベル付けられる. また正則類は類正則 $\rho \in \mathcal{P}^r(n)$ である. ブラウアー指標の値 $\varphi_{\rho}^{\lambda} \in \mathbb{Z}$ を並べた行列 $\Phi_n^{(r)}$ をブラウアー指標表とよぶ. James-Kerber のモノグラフ [JK] に $r = 2, 3; n \leq 10$ の $\Phi_n^{(r)}$ が載っている. ただし $\Phi_{10}^{(2)}$ は何カ所も間違っている. 注意が必要だ. 実は次が言える.

命題 6. $\det \Phi_n^r = \det T_n^{(r)}$.

たとえば $\Phi_5^{(2)}$ は以下の通り. 行列式は確かに 15 である.

$\lambda \backslash \rho$	(1^5)	$(1^2, 3)$	(5)
(5)	1	1	1
$(4, 1)$	4	1	-1
$(3, 2)$	4	-2	-1

一般にブラウアー指標を求めることは難しい. そこで分解行列とかカルタン行列とかいうものが予備的な量として意味をもつのである. 対称群でいえば, 分解行列とは, 標数 0 で既約であったシュペイト加群の指標が $\bmod r$ でどのように「分解」するかを表した行列 D , カルタン行列は $C := {}^tDD$ という対称行列. 有限群の一般論を適用すれば, $\mathfrak{S}_n$ の r -カルタン行列について, $\det C_n^{(r)} = r^{c_{r,n}}$ が示される. この辺りのことは 10 年ぐらい前に宇野勝博と考えたことがある [UY].

ここまでは序章にすぎない. Olsson の後ろを追っかけているだけではつまらない. 一つの問題として「スピンの場合」を考察したい. よく知られているように対称群 $\mathfrak{S}_n$ は 2 枚の被覆群をもつ. 中心拡大とよんでもよい. すなわち

$$1 \longrightarrow \{1, z\} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{S}}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n \longrightarrow 1$$

という完全系列がある. 実は被覆群は 2 種類あって $\tilde{\mathfrak{S}}_n, \hat{\mathfrak{S}}_n$ と書かれる. これらは $n = 6$ の場合を除いて非同型である. 宇野氏から isoclinic という言葉を教わった. ろくに調べもせずに「同じ診療を受ける = 表現論が同じ」と勝手に理解していたのだが, そういう意味ではない. この $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ の既約表現, 既約指標が興味深い. Hoffman-Humphreys の本 [HH] があるが私にはいささか読みにくい. ただ, 最後に指標表が載っていて便利だ. 対称群のシューア・ワイル相互律における「お相手」が一般線型群, あるいはそのリー環であるのに対し, この被覆群の相方は超リー環 (Lie superalgebra) $\mathfrak{q}_N$ である. そんな事情もあり, 処理に困る 2 の冪が常についてまわる. シューア関数とシューアの Q -関数, KP 方程式系と BKP 方程式系などの対比もある. 私自身はそのあたりに興味を持っており, 宇野氏も巻き込んで騒いでいる. 指標表の数値的な事柄に関しては, 定式化にちょっと時間がかかったが, 満足すべき結果が得られつつある. 面白いのはこれからだ. でも今日はおしまい. 3/14/15, Happy super π day !

参考文献

- [AE] G. アンドリュース, K. エリクソン (佐藤文広訳) 整数の分割, 数学書房, 2006
- [HH] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys, Projective Representations of the Symmetric Groups, Oxford, 1992
- [JK] G. James and A. Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, Cambridge, 1981
- [L] D. E. Littlewood, The Theory of Group Characters, Oxford, 1950
- [LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, Fonctions de Hall-Littlewood et polynômes de Kostka-Foulkes aux racine de l'unité, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 316 (1993), no.1, 1-6
- [M] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed., Oxford, 1995
- [Mi] 水川裕司, 山田裕史, 正則分割の組合せ論, 数理研講究録「組合せ論的表現論と表現論的組合せ論」, 2015
- [MY] H. Mizukawa and H. -F. Yamada, Glaisher combinatorics of regular partitions, preprint 2014
- [O] J. B. Olsson, Regular character tables of symmetric groups, Electron. J. Combin. 10 (2003), N3
- [UY] K. Uno and H. -F. Yamada, Elementary divisors of Cartan matrices for symmetric groups, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 1031-1036